

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра...  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$9261 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{=27} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{=343} \cdot \underbrace{1 \cdot 1}_{=1}$$

$$C_3^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2} = 20 \cdot 28 = 560$$

ответ: 560 та

3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} & (1) \Rightarrow \underline{x, y > 0} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}} \Rightarrow y^{3\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ln x \cdot \ln y = \ln y \cdot \ln y + 2\ln x \cdot \ln x$$

$$\begin{cases} \ln x = a \\ \ln y = b \end{cases} \Rightarrow 3ab = b^2 + 2a^2 \Rightarrow (b - 2a)(b - a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a \\ b_2 = 2a \end{cases} \quad \underline{1)} \quad b = a \Rightarrow \ln x = \ln y \Rightarrow \underline{x = y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2) \Rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\underline{2)} \quad b = 2a \Rightarrow \ln y = 2\ln x \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2) \Rightarrow x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x &= 0 \\ x \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$x^2(x - 2) + x(x - 2) - 4(x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \Rightarrow \boxed{y = 4} \quad x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x > 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{OTBET: } (x; y) = (2; 2), (2; 4), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right).$$

$$\boxed{2} \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0.$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \\ 2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) & \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin \left(\frac{5x - 45^\circ}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{9x + 45^\circ}{2}\right) = 0$$

$$1) \sin \left(\frac{5x - 45^\circ}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{5x - 45^\circ}{2} = \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

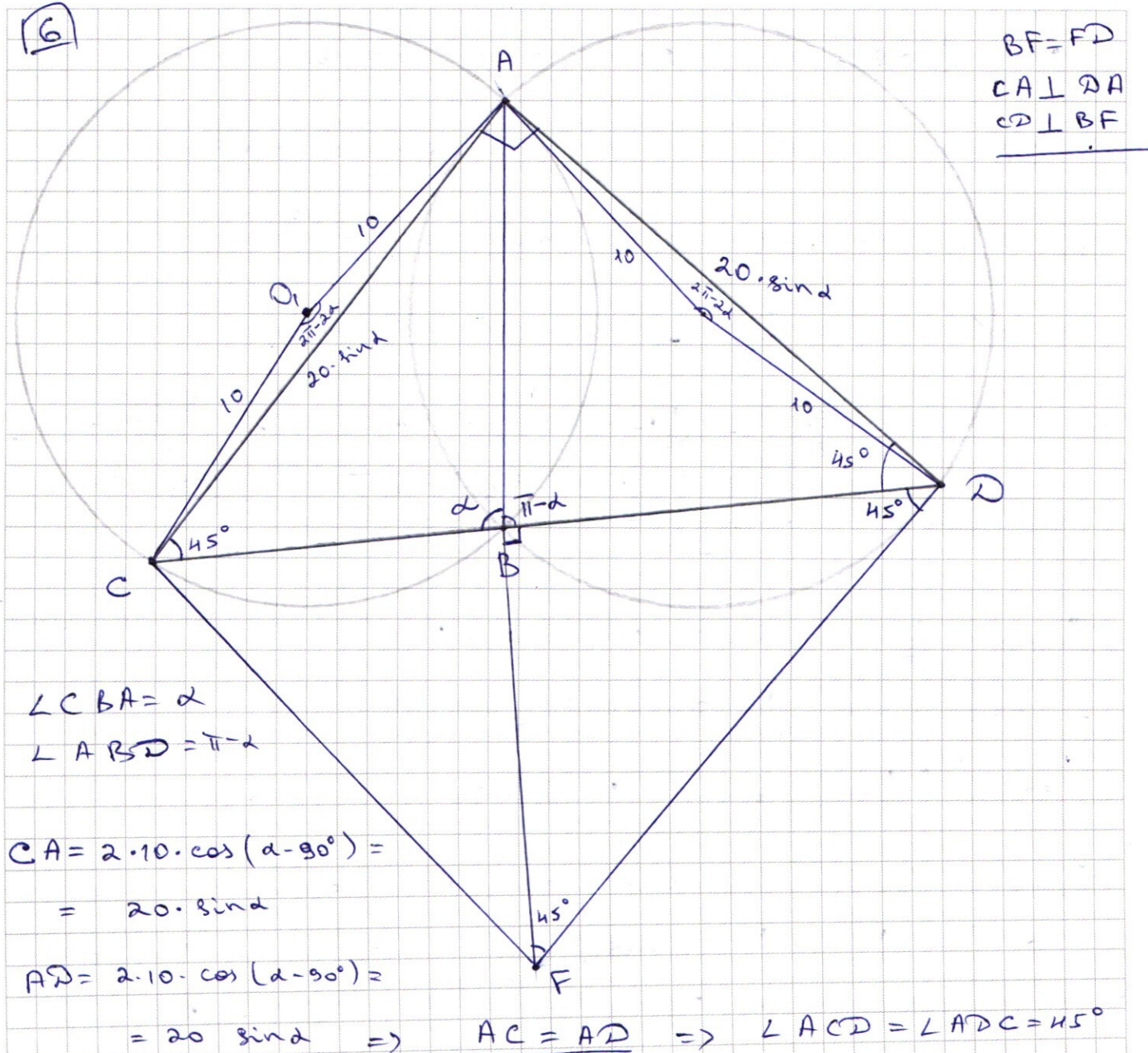
$$2) \cos \left(\frac{9x + 45^\circ}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{9x + 45^\circ}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{OTBET: } x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k; \quad x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16



$$\angle CBA = \alpha$$
$$\angle ABD = \pi - \alpha$$

$$CA = 2 \cdot 10 \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) = 20 \cdot \sin \alpha$$

$$AD = 2 \cdot 10 \cdot \cos(\alpha - 90^\circ) = 20 \sin \alpha =$$

$$AC = \underline{AD} \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\begin{cases} \angle CAB = 135^\circ - \alpha \\ \angle BAD = \alpha - 45^\circ \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Delta ABD \rightarrow \frac{20 \cdot \sin d}{\sin(\pi - d)} = \frac{BD}{\sin(d - 45^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_D = 20 \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$\Delta CAD \rightarrow \frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{\sin \angle CAB}{\sin \angle DAB} = \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{\cos(\alpha - 45^\circ)}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = \frac{\cos(\alpha - 45^\circ)}{\sin(\alpha - 45^\circ)} \cdot BD = \frac{\cos(\alpha - 45^\circ)}{\sin(\alpha - 45^\circ)} \cdot 20 \cdot \sin(\alpha - 45^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CB = 20 \cdot \cos(\alpha - 45^\circ)$$

$$BD = BF = 20 \cdot \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 20 \Rightarrow \boxed{CF = 20}$$

$$\underline{2)} CB = 12$$

$$S_{ACF} = ?$$

$$\boxed{BC = 12} \Rightarrow \boxed{BF = 16}$$

$$BC = 12 = 20 \cdot \cos(\alpha - 45^\circ) \Rightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{3^2 \cdot 2}{5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3^2 \cdot 2}{5^2} - 1 = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} \Rightarrow \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{3^4 \cdot 2^2}{5^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{5^4 - 3^4 \cdot 2^2}}{5^2} = \frac{\sqrt{625 - 81 \cdot 4}}{25} = \frac{\sqrt{301}}{25}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \sin \alpha \cdot 20 \cdot \sin(45^\circ + \angle BCF) =$$

$$= 200 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin(\angle BCF) + \cos(\angle BCF) \right) =$$

$$= 100\sqrt{2} \cdot \left( \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) \cdot \sin \alpha = 140\sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ACF} = 100\sqrt{2} \cdot \left( \sin(\angle BCF) + \cos(\angle BCF) \right) \cdot \sin \alpha =$$

$$= 100\sqrt{2} \cdot \left( \frac{BF}{CF} + \frac{BC}{CF} \right) \cdot \sin \alpha = 100\sqrt{2} \cdot \left( \sin(\alpha - 45^\circ) + \cos(\alpha - 45^\circ) \right) \cdot \sin \alpha$$

$$= 100\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \right) = 200 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$S_{ACF} = S_{ACF} \Rightarrow 140\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = 200 \cdot \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = 140\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = 140\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14 \cdot 14 = 196$$

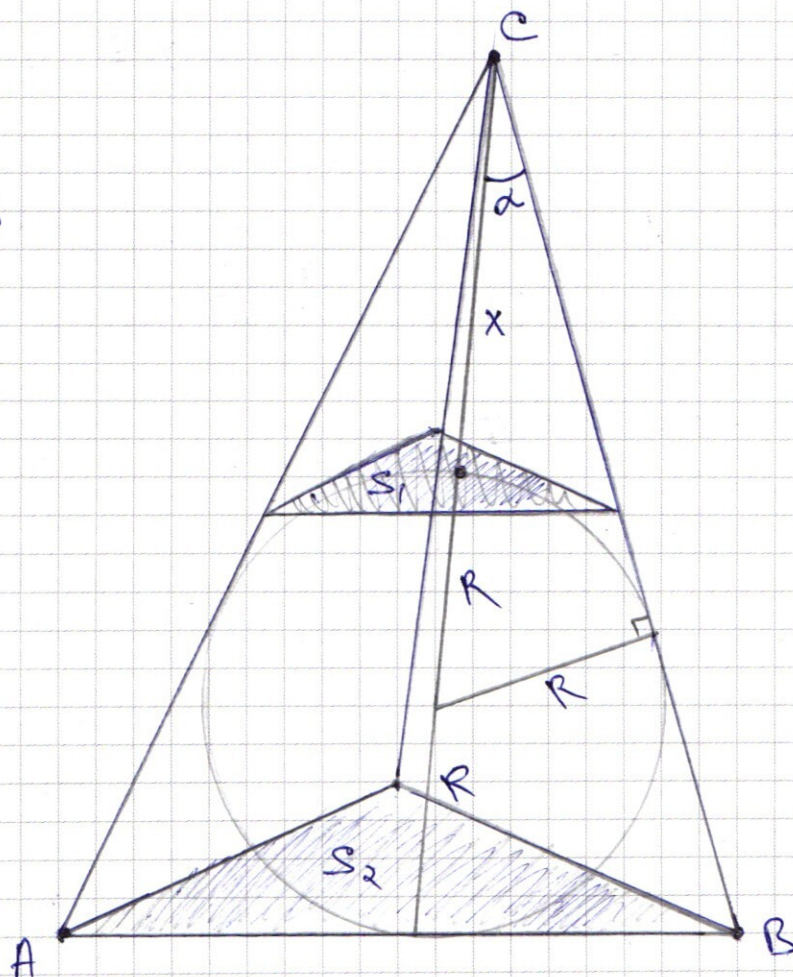
$$\text{ОТВЕТ: } CF = 20, S_{ACF} = 196$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 16$$



$$\frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{(x+2R)^2} \Rightarrow \frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{R+x} = \frac{R}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ответ:  $\alpha = \arcsin 0,6$

$$\boxed{5} \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$10 = |x+y+5| + |y-x+5| \geq |x+y+5 + y-x+5| = |2y+10| \Rightarrow y \leq 0, y \geq -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{-10 \leq y \leq 0.}$$

$$10 = |x+y+5| + |y-x+5| = |x+y+5| + |-y+x-5| \geq |x+y+5 - y+x-5| = |2x| \Rightarrow$$

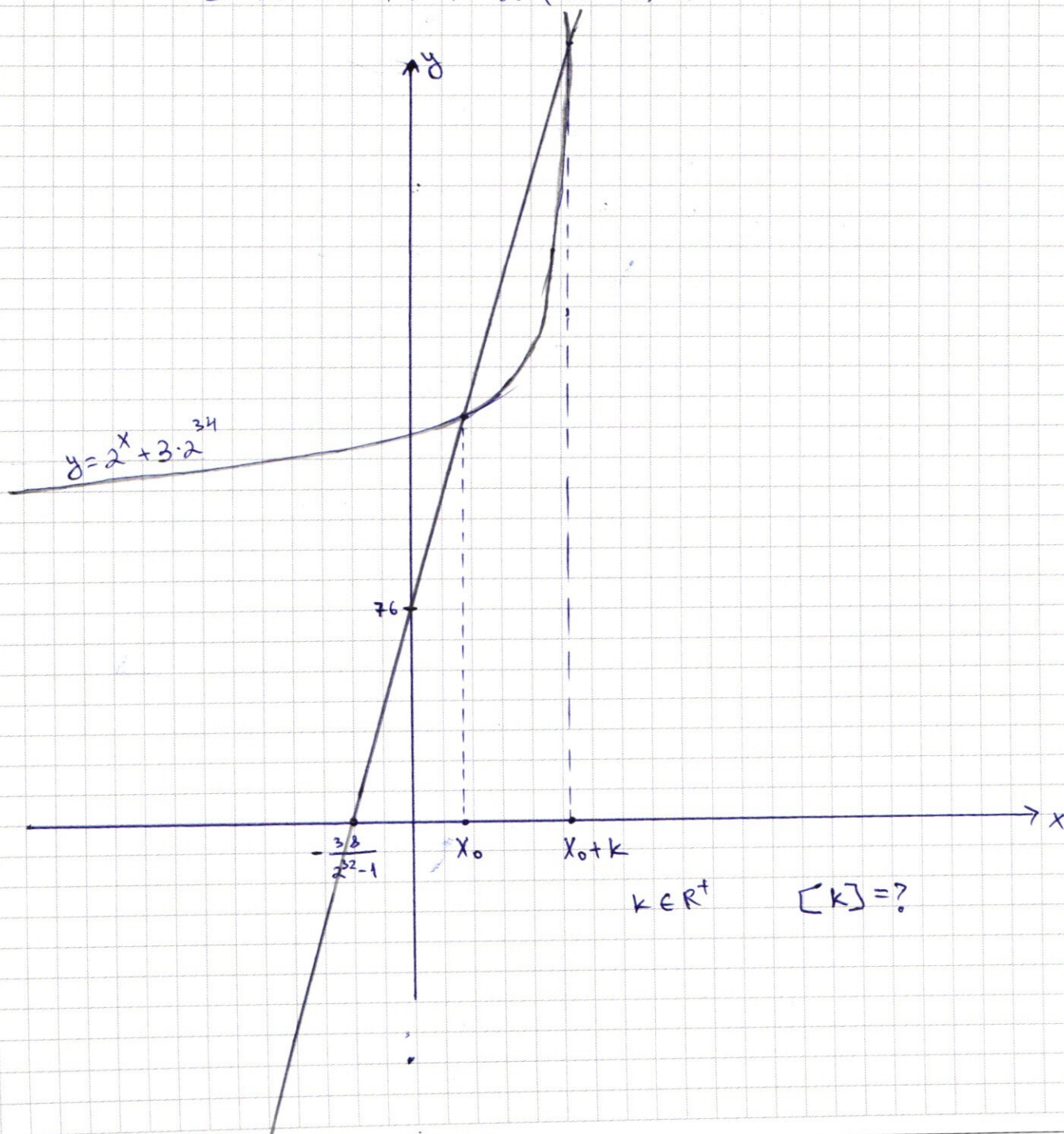
$$\Rightarrow \underline{-5 \leq x \leq 5}$$

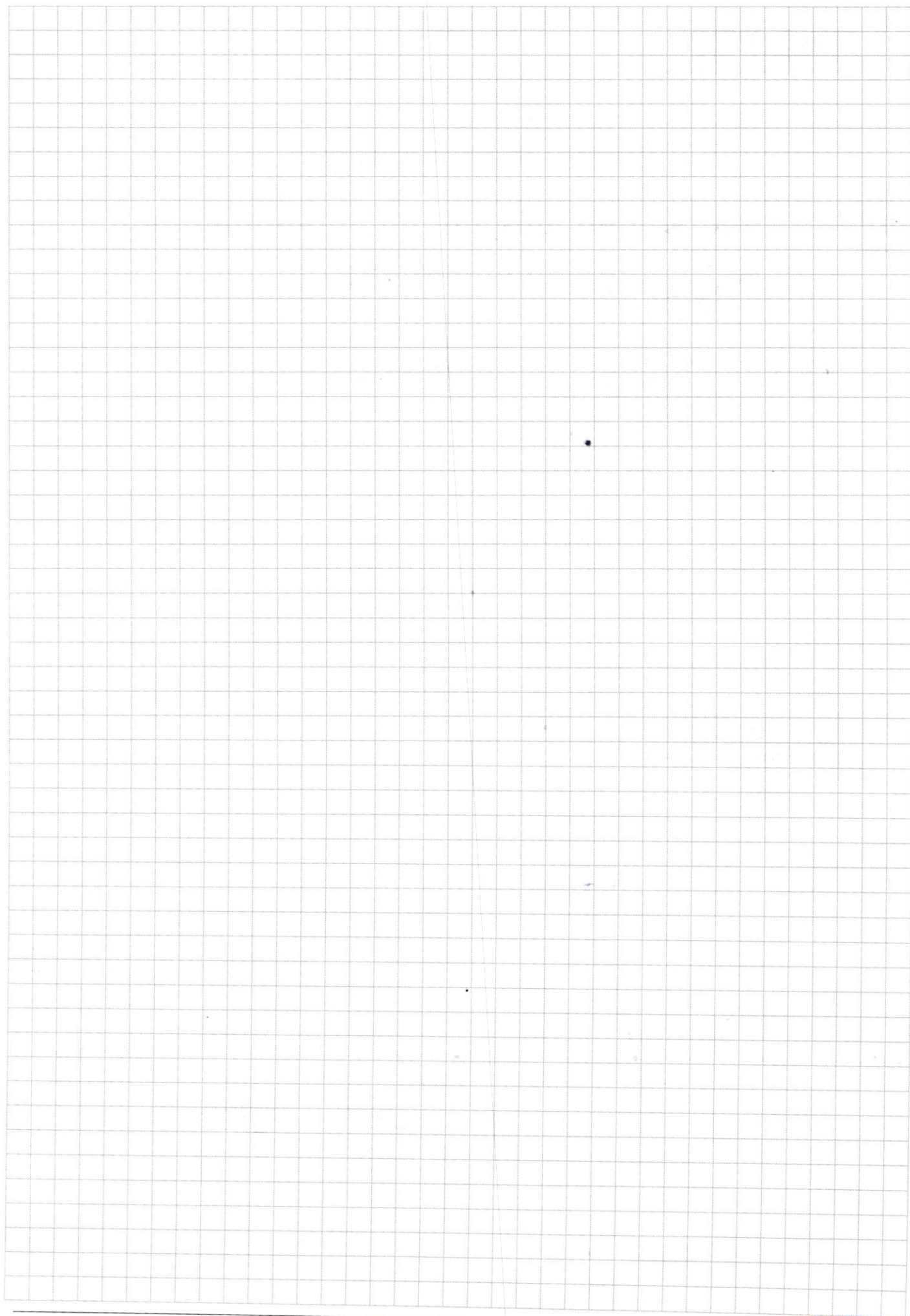
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$$





☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 3x + \sin 3x - \cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\textcircled{2} -2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 403 \\ 27 \\ \hline 8060 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C_3^3 \cdot C_5^3 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

$$\frac{403}{39} = \frac{13}{13}$$

$$560$$

$$(y-2)^2 - (x-4)^2 - x^2 - xy - 4 + 16 = 0$$

$$(y-2)^2 - (x-4)^2 - x^2 - xy + 12 = 0$$

$$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y = 0$$

$$(y-4)^2 + (y-x)^2 - 5x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x(x-2) = 0$$

$$x=2$$

$$y=2$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{4 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$

$$y^{3 \ln x} = \ln y \cdot 2 \ln x$$

$$3 \ln x \cdot \ln y = \ln y \cdot \ln y + \ln x \cdot 2 \ln x$$

$$3ab = a^2 + 2b^2$$

$$(a-2b)(a-b) = 0$$

$$a=b$$

$$\ln x = \ln y$$

$$x=y$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 + 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x^3 = x^2 + 6x + 8$$

$$x^3 + 1 = (x+2)^3$$

$$64 \pm 4 + 24 + 8 = 36$$

$$27 \pm 12 \pm 8 = -10$$

$$x^3 = (x+4)(x+2) < 2(x+2)$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$+16 = 16 \quad x=2$$

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$x^2(x-2) + x(x-2) - 4(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$\begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} x+y+5 \\ -x-y+5 \\ \hline x+y-5 \\ -y+x-5 \\ \hline 2x \end{array} \quad \begin{array}{r} y-x+5 \\ -y+x+5 \\ \hline y-x-5 \\ y-x-5 \\ \hline 2y \end{array}$$

$$10 = |x+y+5| + |y-x+5| \geq |2y+10|$$

$$5 \geq |y+5|$$

$$5 \geq |x|$$

$$-10 \leq y \leq 0$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$0 \leq y \leq 10$$

$$|x| \leq 5$$

$$\begin{cases} |x-y+5| + |x+y-5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases}$$

$$76 + 2^{33} - 2x > 2^x + 6 \cdot 2^{33}$$

$$76 - 2x > 2^x + 5 \cdot 2^{33}$$

$$x < 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x + \sin 5x \cdot \sin 4x = \cos 5x \cdot \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \sin$$

$$\cos 5x (1 - 2 \sin^2 2x - 1 + \sin 4x)$$

$$\cos 5x \cdot 2 \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sin 5x (2 \cos^2 2x - 1 + 1 - \sin 4x)$$

$$\sin 5x \cdot 2 \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$nq$$

$$n1$$

$$21 = |n1-x| + |x+x| \Rightarrow 21$$

$$s = h$$

$$59 \quad 2(\cos 2x - \sin 2x) \sin 7x = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$2x = 7x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

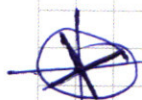
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$$



$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin(2x + 45^\circ)$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{5x-45^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x+45^\circ}{2}\right) = 0$$



$$\frac{5x-45^\circ}{2} = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} k$$

$$s \geq x$$

$$9x+45 = \pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k$$

$$91 = |0-h-x| + |5+h+x| \leq |12|$$

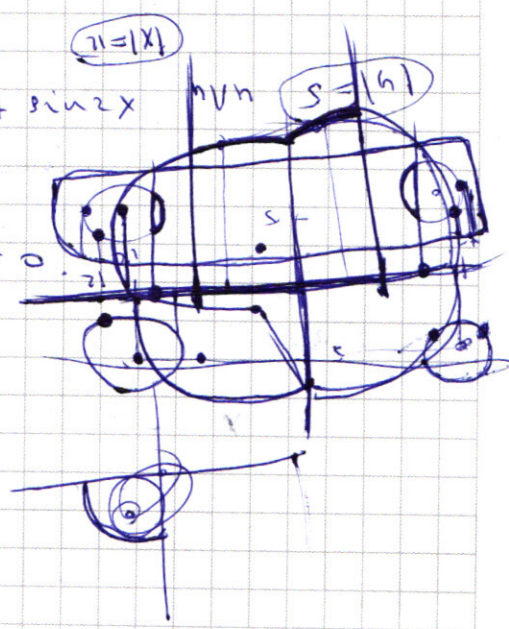
$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & -h \end{pmatrix}$$

$$s \geq |5+h|$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s \geq x \leq 5 \\ 0 \leq h \leq 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R & x \\ R & x \end{pmatrix}$$

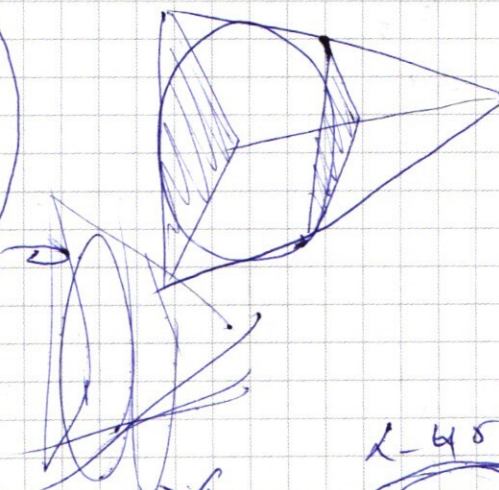
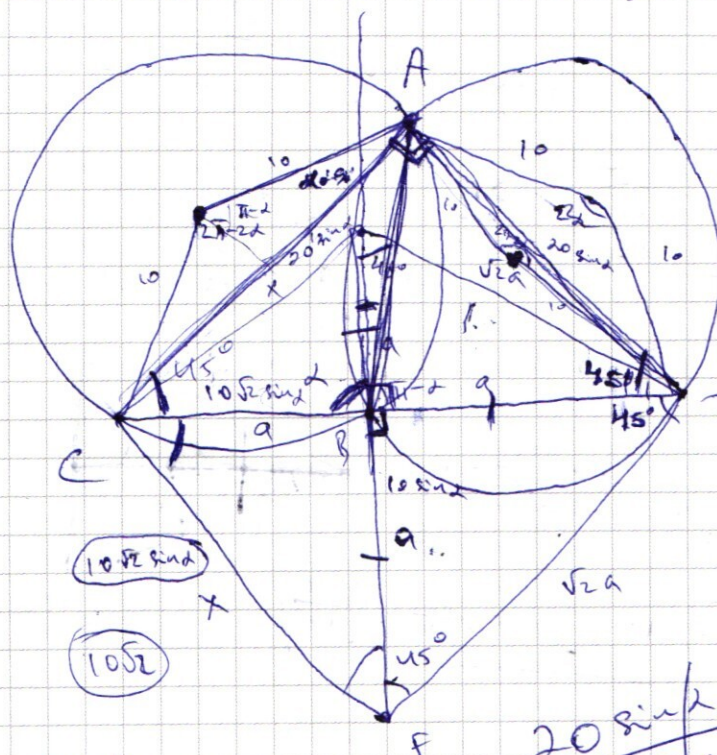


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

|    |      |
|----|------|
| 49 | (64) |
| 25 |      |



$$\frac{1}{2} \cdot (12+x) \pi r d \cdot \sqrt{144+x^2}$$



$$\frac{20 \sin 2}{\sin 2} = \frac{20 \sin(2 - 40)}{\sin(2 - 40)}$$

1-65

131-2

