

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$y = 2 \quad x = -4 \quad \left| \quad y = 2 \quad x = -2 \right.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} 8 + 4 - 4 + 8 - 16 = 0 \\ 8 + 8 - 16 + 16 - 16 = 0 \end{matrix}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1. Разобьём число 16 875 на простые числа:

$$16\,875 = 5^4 \cdot 3^3$$

⇒ обязательно в искомым числах должны обязательно содержаться 4 пятёрки

для оставшихся 4 цифр существуют 2 комбинации:

1) 3 тройки, 1 единица

2) 1 тройка, 1 девятка, 2 единицы

Посчитаем кол-во чисел для каждого случая:

$$1) \frac{8!}{4!3!1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 280$$

$$2) \frac{8!}{4!2!1!1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

всего: $280 + 840 = 1120$ ~~чисел~~ чисел

Ответ: 1120

№ 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)' \cdot y = (-x)' \cdot y + (-xy)' & (1) \\ 2xy^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{ДЗ: } y > 0$$

$$-xy > 0 \Rightarrow x < 0$$

сумма:
-y-4

произв.
-2y(y-4)

$$(2): x^2 + x(y+4) + 2y(4-y) = 0$$

$$x = -2y$$

(I)

$$x = y-4$$

(II)

$$\text{II: } x = y - 4$$

$$\left(\frac{(4-y)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y) \lg(y(4-y))$$

$$\frac{(4-y)^4 \lg y}{(4-y)^{\lg y + \lg(4-y)}} = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^{3 \lg y - \lg(4-y)} = y^2 \lg y \quad (\text{лог. по осн. 10})$$

$$\lg(4-y) \cdot (3 \lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg^2 y$$

$$\lg(4-y) \cdot 3 \lg y - \lg^2(4-y) = 2 \lg^2 y$$

$$\text{при } \lg y = 0 : \lg(4-y) = 0$$

$$y = 1$$

$$y = 3$$

$$\Rightarrow \emptyset$$

$\Rightarrow \lg y \neq 0$, тогда поделим уравн $\lg^2 y$

$$\left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y} \right)^2 - 3 \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y} \right) + 2 = 0 \quad \text{2:1}$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 1$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 2$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$4-y = y$$

$$y = 2$$

$$x = 2 \quad (\text{не подходит})$$

$$\emptyset$$

$$x = -2$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2$$

$$4-y = y^2 \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

с учетом од 3:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

I: $x = -2y$

$$\left(\frac{(2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(2^4 \cdot y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2 + 2 \lg y}$$

$$2^{4 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2} \cdot 2^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{\lg 2} = \frac{2^{4 \lg y}}{2^{\lg 2} \cdot 2^{2 \lg y}}$$

$$y^{\lg 2} = 2^{2 \lg y - \lg 2} \quad (\text{лог. по осн. } 10)$$

$$\lg y \cdot \lg 2 = \lg 2 (2 \lg y - \lg 2)$$

$$\lg y = \lg 2$$

$$\underline{y = 2} \Rightarrow \underline{x = -4}$$

Ответ: $\rightarrow (-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right); (-2; 2)$

№2.

$$\rightarrow \cos(7x+3x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin x \quad \lg x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\rightarrow \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

№ 5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): квадрат с центром $(6;0)$ и стороной = 12

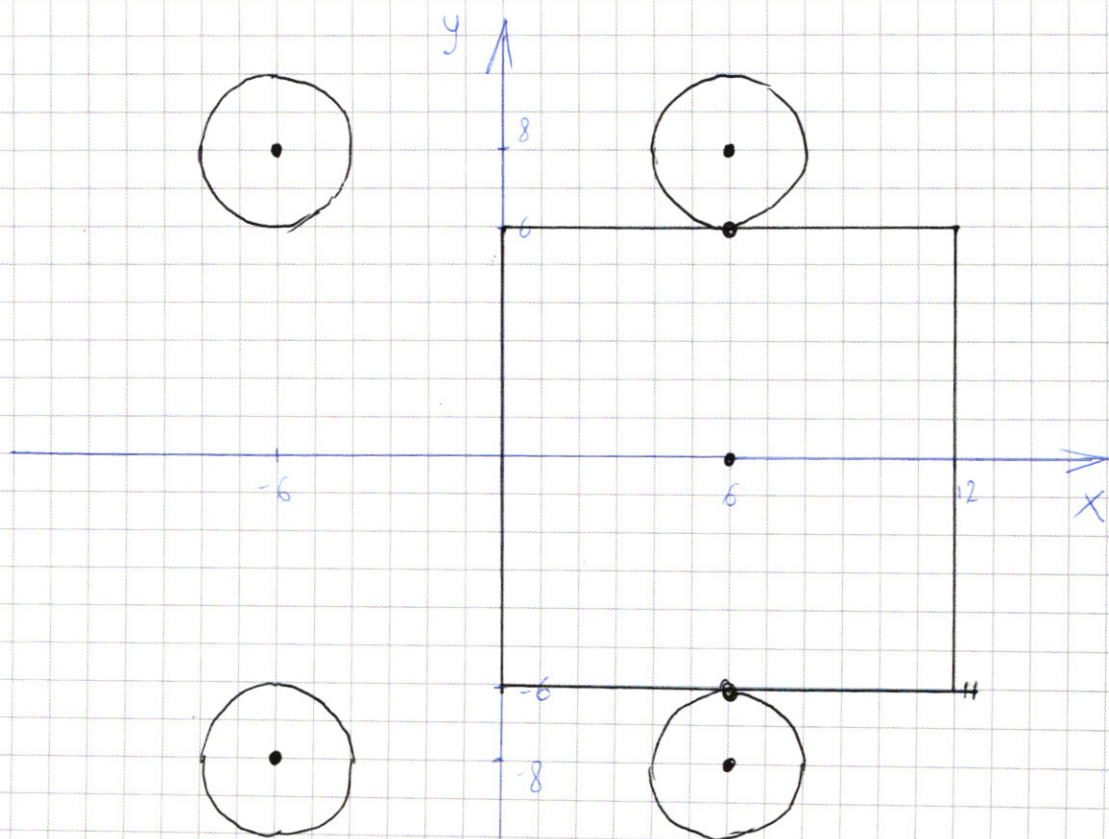
(2): при $a < 0$ — реш. нет.

при $a = 0$ — 4 т. (0 реш.)

при $a \neq 0$:

есть 4 симметричные окружности с $R = \sqrt{a}$

и центрами $(6;8)$; $(-6;8)$; $(-6;-8)$; $(6;-8)$

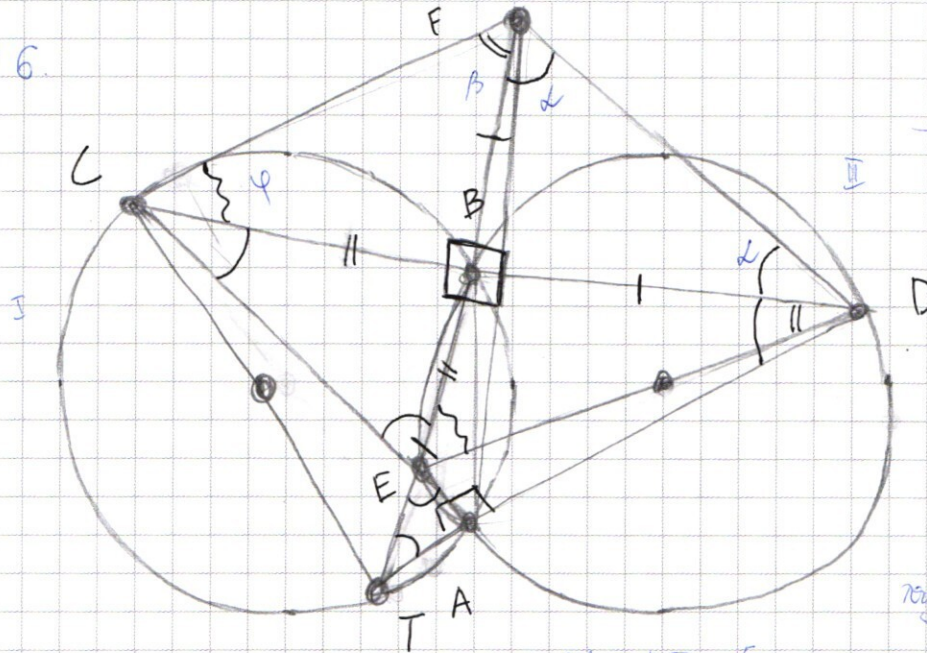


Конструкция ~~есть~~ есть левее оси OY симметрична относительно оси $OX \Rightarrow$ 2 реш. Будет только в том случае, когда окружности, расп. левее оси OY касаются квадрата: $a = 12$

Ответ: $\sqrt{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6.



$$R = 13$$

Пусть $\angle CDA = \alpha$

Пусть $\angle CDA = \alpha$

$\angle CDA = \alpha$

Пусть $BF \cap I \text{ окр} = T$

где CT - диаметр ($\angle CBT = 90^\circ$)

пусть $CA \cap BT = T.E$

одновременно $\angle EBD = 90^\circ$

$\Rightarrow T.E \in II \text{ окр.}$

a) Пусть $\angle CDA = \alpha$

$$\triangle ABD: AB = 2R \sin \alpha$$

$$\triangle DTC: \triangle DTC \sim \triangle DBA \quad (\text{высоты к двум сторонам})$$

$$k = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB = CT \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2R \sin \alpha = 2R \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha; \quad \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \angle CDA = \angle BCA = \angle BTD$$

$$\Rightarrow BD = BT$$

$$\Rightarrow \triangle BTD \sim \triangle BTD$$

$$\angle ECD = \angle EFD \quad (\text{опир. на } ED)$$

$\Rightarrow$ вокруг E, C, F, D можно описать окружность

$$\Rightarrow \angle CFE = \angle CDE \quad (\text{опир. на } CE)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (продолжение)

$$\underline{AC = CE + AE = 10\sqrt{2} + 31}$$

$$\angle FCD = \angle FED = \varphi \quad (\text{опр. на } FD)$$

$$\sin \triangle BED: \sin \varphi =$$

$$\triangle BED: \cos \varphi = \frac{BE}{ED} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

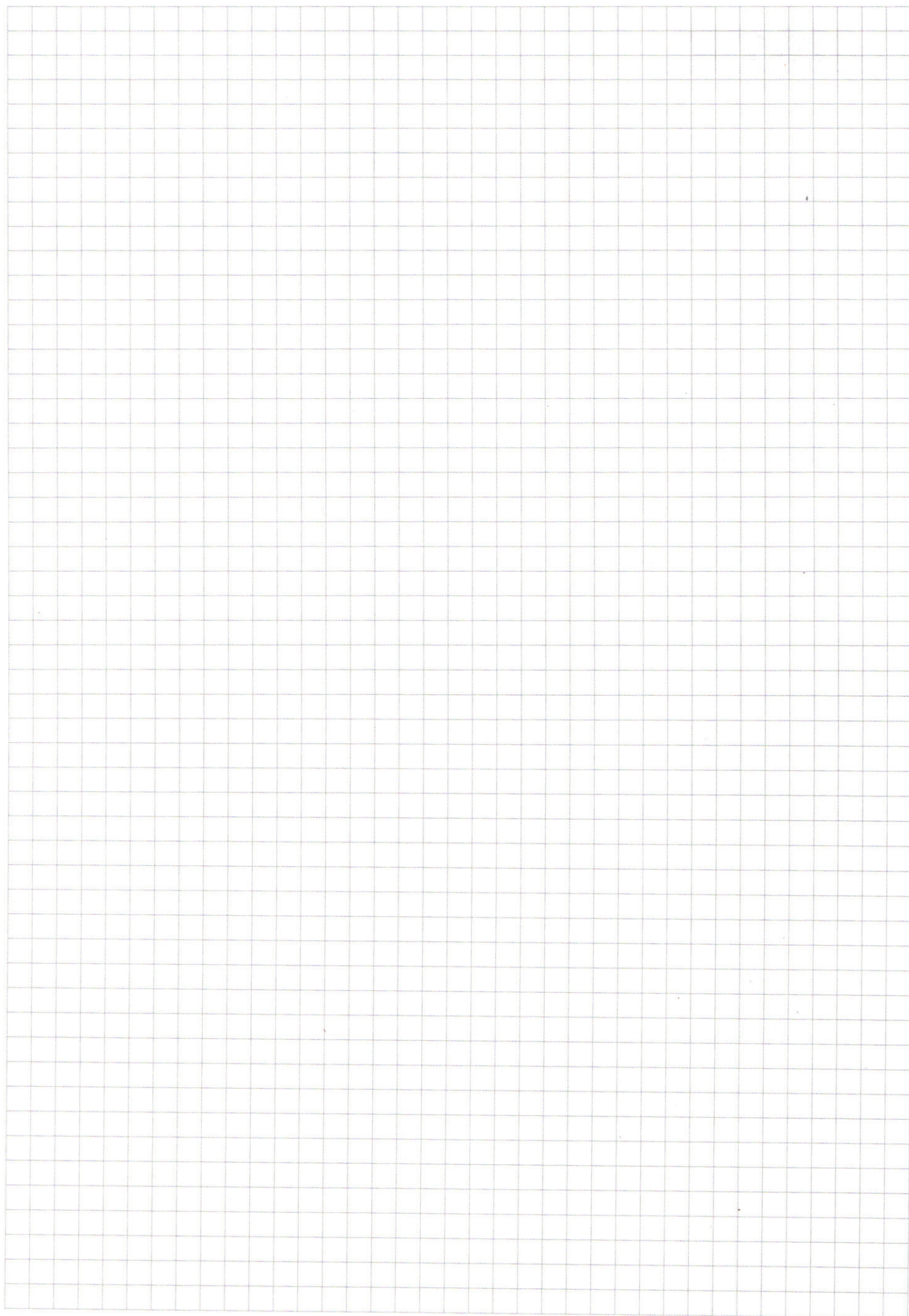
$$\angle ACF = 45^\circ + \arccos \frac{5}{13}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{CF \cdot AC \cdot \sin \angle ACF}{2} =$$

$$= \frac{\sin \angle ACF \cdot \cancel{26}^{13} \cdot (10\sqrt{2} + 31)}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13} \right) \cdot 13 \cdot$$

$$= 13(10\sqrt{2} + 31) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13} \right)$$

Ответ: а) 26 б) $13(10\sqrt{2} + 31) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13} \right)$



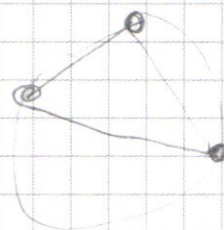
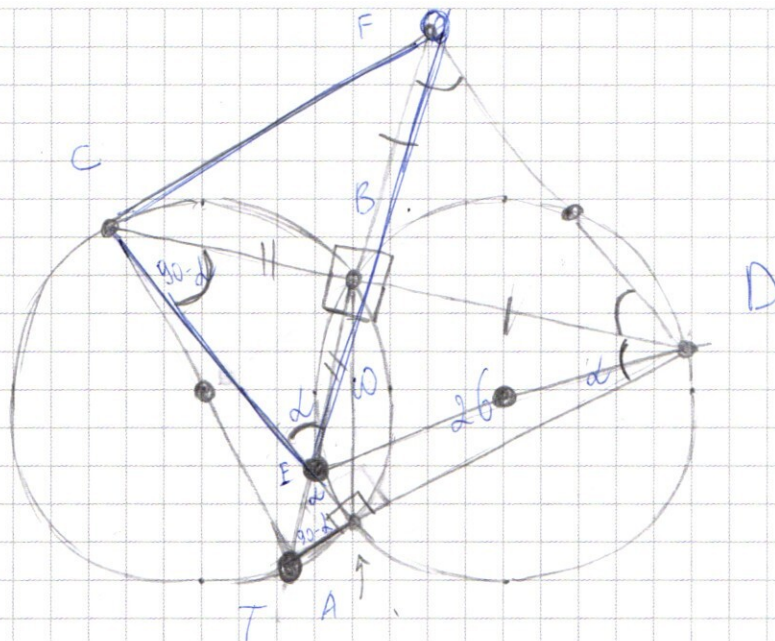
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6.

d)

 $R = 13$ 

$$DB \cdot DC = DA \cdot DT$$

$$2R \cdot AB$$

$$\frac{2R}{AB} = \cos \alpha = \frac{DT}{BD} = \frac{CD}{AD} = \cos \alpha$$

$$2R \cos \alpha = AB$$

$$R = \frac{AB}{2 \sin d}$$

$$AB = \frac{2R}{\cos \theta}$$

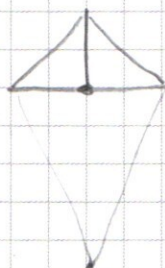
$$AB = 2R \sin \alpha$$

$$AB = 2 \sin \alpha R$$

$\Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$, wegen $\alpha = 45^\circ$

$$90 - 45 = 45^\circ$$

~~AB: 2.13~~



$$BD = 2 \sqrt{13^2 - 5^2} = 24.2$$

$BD = 24$

$$\begin{array}{r} 164 \\ \times 25 \\ \hline 820 \\ 3280 \\ \hline 4100 \end{array}$$

NS.

Квадрат

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y$$

$$x-6+y$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a^2$$

при $a < 0$ - решений нет

при $a = 0$ - max 1 реш.

$$I \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$II \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases}$$

$$III \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases}$$

$$IV \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

у

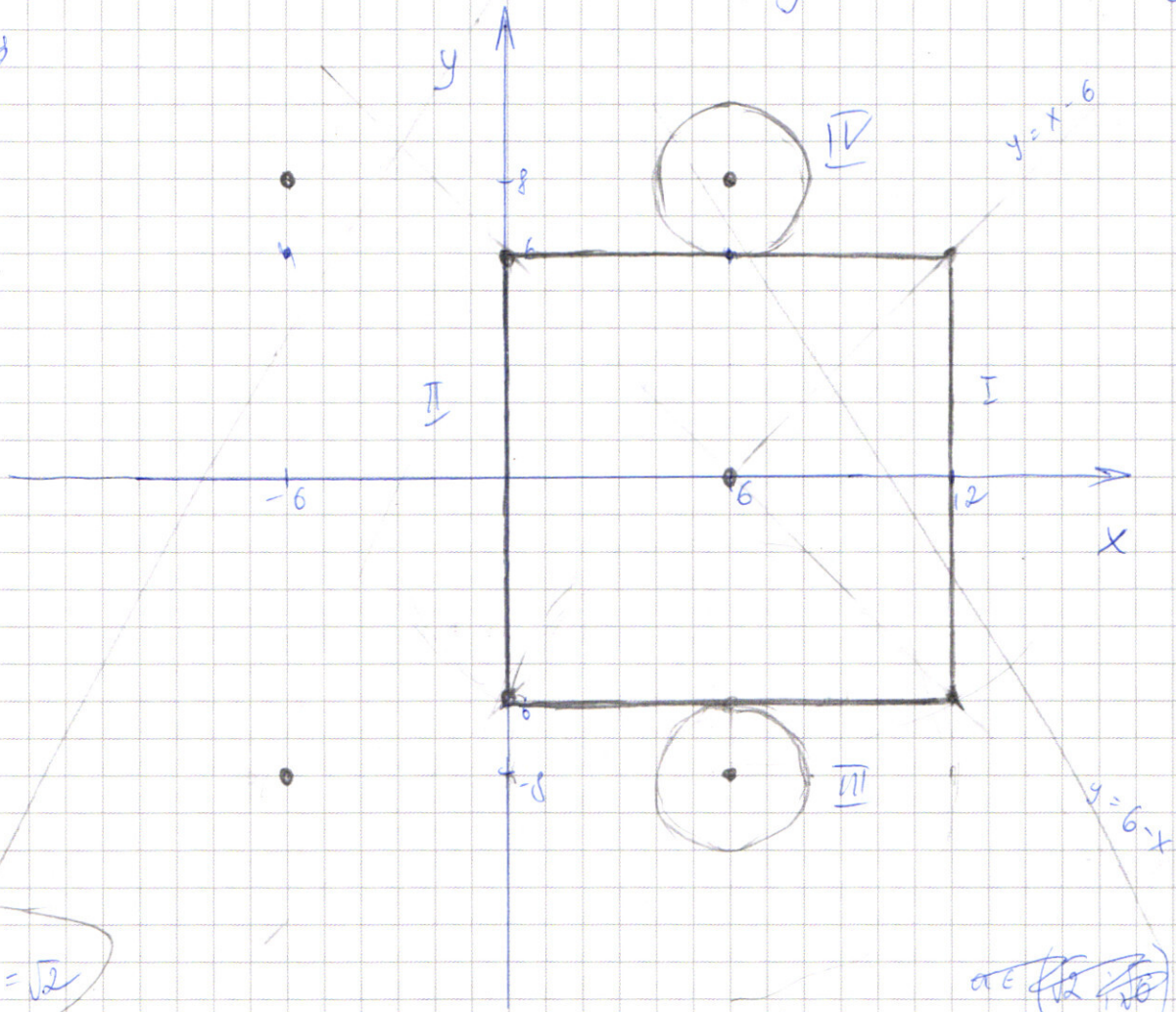
$$\begin{cases} x-6-y+x-6+y=12 \\ y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x=12 \end{cases}$$

6

$$\begin{cases} 12+x-6-y+x-6+y=0 \\ y \geq x-6 \\ y \leq 6-x \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-y-12+x-6+y \\ 2y = -12 \\ y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6+y=12+x-6-y \\ y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \\ y = 6 \end{cases}$$



$$a = \sqrt{2}$$

$$a \in (\sqrt{2}, \sqrt{6})$$

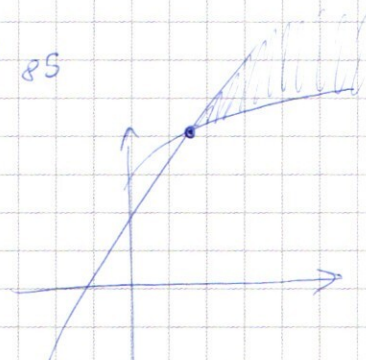
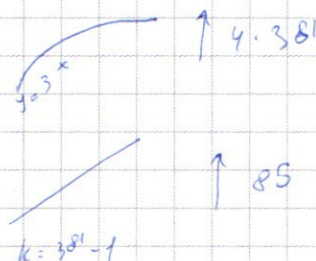
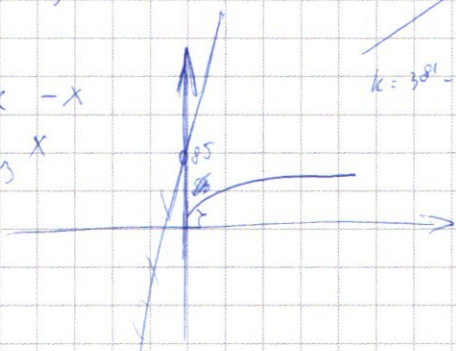
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3 \cdot 3^{81} (x - 4) - x + 85 = 3^x$$



$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

№ 2.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos (2x + 8x) = \cos 2x \cos 8x - \sin 2x \sin 8x$$

$$= \cos 2x \cos 8x - \sin 2x \sin 8x$$

$$\cos 10x = \cos (7x + 3x) = \cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$0 \neq \Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\frac{26}{\sqrt{2}} = 13\sqrt{2} \quad \text{tg } x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x \quad \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{2} \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin 7x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

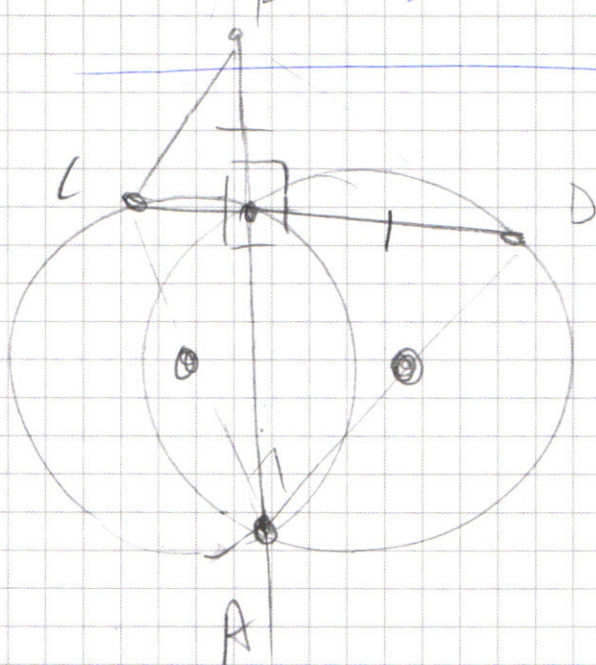
$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin 3x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{6x + \frac{\pi}{2}}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{6x + \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos \left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) + \cos \left(\frac{6x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \cos 10x$$

$$2 \cos \frac{20x + \frac{\pi}{2}}{4} \cdot \cos \frac{28x}{4} = \cos 10x$$



$$+ \quad - \quad - \sqrt{2} \quad + \quad - = - \quad + \quad - \sqrt{2} \quad + \quad -$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

5

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3 = \underline{5^4 \cdot 3^3}$$

1

$$27 \xrightarrow{3^3} 9 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 16875 | 5 \\ \hline 3375 \\ \hline 675 | 5 \\ \hline 135 | 5 \\ \hline 27 | 3 \\ \hline 9 | 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

обязательно: 4 пятёрки

$$\begin{array}{r} \times 625 \\ 27 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5555 \\ 5555 \\ \hline 55555 \end{array}$$

1) 3 тройки 1 ед.

2) тройка, девятка, 2 ед.

способы 5:

$$\frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 70$$

способы 1:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

способы 2:

$$\frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$= 70(4+12) = 70 \cdot 16 =$$

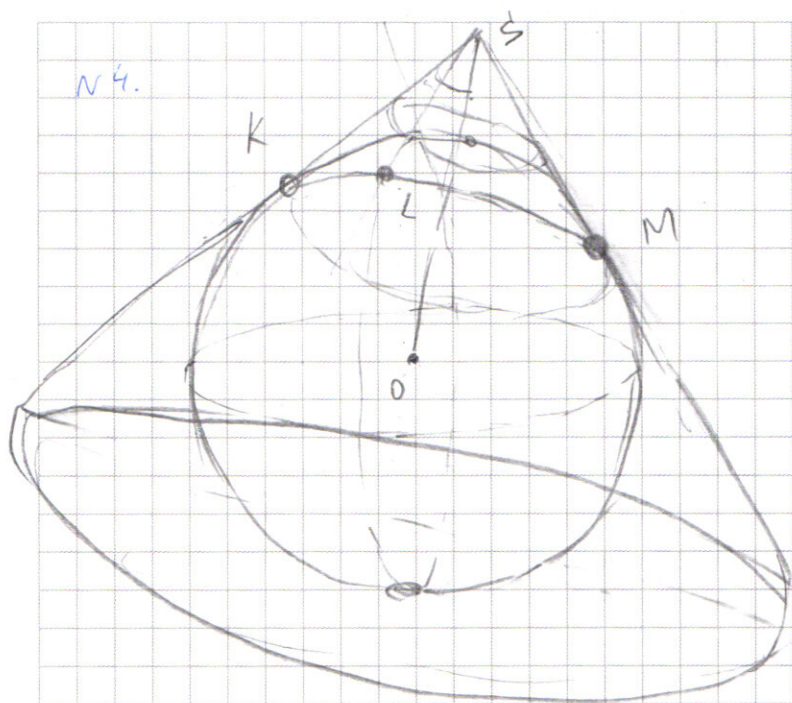
$$= \underline{1120}$$

$$I) \frac{8!}{4!3!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 280$$

$$II) \frac{8!}{4!2!} = \frac{5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2}} = 120 \cdot 7 = 840$$

$$\begin{array}{r} 840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

N 4.



N 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x^4}{y^2} \right) \lg y = (-x) \lg (-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{array} \right.$$

~~$x \neq 0$~~

$$x^2 + 4x + 8y + xy - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (y+4)^2 - 4(8y - 2y^2) = y^2 + 16 + 8y - 4 \cdot 8y + 8y^2 =$$

$$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

~~Заметим, что~~

$$\cancel{x \neq 0} \quad \cancel{y \neq 0} \quad (\text{огд})$$

~~ОДЗ:~~

$$\cancel{y > 0}$$

$$\cancel{xy < 0 \Rightarrow x < 0}$$

$$\cancel{-y-4}$$

$$\cancel{-2y+4+y}$$

~~$x =$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5. (н.р.)

$$x^2 + x(y+4) + 2y(4-y) = 0$$

$$x = -2y \quad \text{I} \quad x = y-4 \quad \text{II}$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg y}$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} + \lg y$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2 + 2\lg y}$$

$$\lg^2 y \cdot \lg y \cdot \lg(16y^2) = (\lg 2 + 2\lg y) \cdot \lg(2y)$$

$$2^4 \lg y \cdot y^2 \lg y = 2y^{\lg 2} \cdot 2y^2 \lg y$$

$$2^4 \lg y \cdot y^2 \lg y = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2} \cdot 2^2 \lg y \cdot y^2 \lg y$$

$$\frac{2^4 \lg y}{2^{\lg 2} \cdot 2^2 \lg y} = y^{\lg 2}$$

$$2^2 \lg y - \lg 2 = y^{\lg 2}$$

$$-y-4 \quad -2y(4-y)$$

$$\left(\frac{(4-y)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = 4-y \lg(4-y)$$

$$\frac{(4-y)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{(4-y)^4 \lg y}{4-y \lg y + \lg(4-y)} = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^{3\lg y - \lg(4-y)} = y^2 \lg y$$

$$\lg(4-y) (3\lg y - \lg(4-y)) = 2\lg^2 y$$

$$\lg(4-y) \cdot 3\lg y - \lg^2(4-y) = 2\lg^2 y$$

$$\lg(4-y) \cdot 3\lg y = 2\lg^2 y + \lg^2(4-y) \quad (\lg^2 y)$$

$$\frac{\lg^2(4-y)}{\lg^2 y} - 3 \cdot \frac{\lg(4-y)}{\lg y} + 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\sqrt{1-8} \quad D=0$$

или $\lg y = 0$ $\lg^2(4-y) = 0$

$$y = 1$$

$$4-y = 1$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$2; 1$$

$$\emptyset \quad y = 3$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 1$$

$$2 \cdot 2\lg y - \lg 2 = y \lg 2$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 2$$

$$\lg 2 \lg 2$$

$$\lg 2 (2\lg y - \lg 2) = \lg 2 \lg y$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$\lg y = \lg 2$$

$$4-y = 2y \quad y = 2$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$x = -4$$

$$4-y = y^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} - 4$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17} - 8}{2}$$

$$\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$-\sqrt{8}$$