

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложите число 64827 на простые множители!

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 3 \\ 21609 & 3 \\ 7203 & 3 \\ 2401 & 7 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Соответственно восьмизначное число должно состоять из 3-х троек, 4-х семерок и единицы. Значит кол-во таких чисел равно:

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 280$$

Ответ: 280

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 5x \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 5x \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 5x + \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)) = 0$$

① $\cos 2x = \sin 2x$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

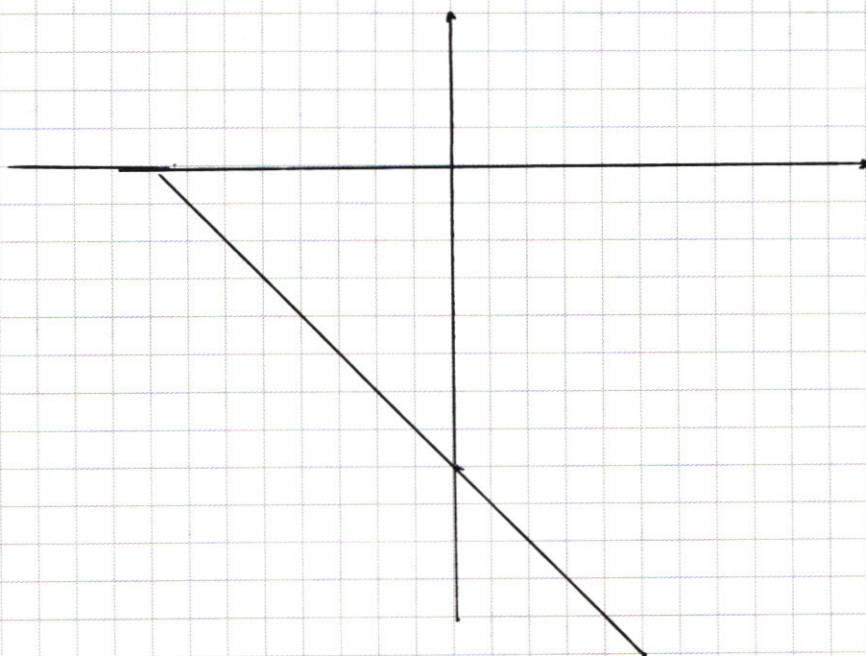
$$\begin{cases} \ln(-y) = 2\ln x \\ \ln(-y) = \ln x \\ y = x-4 \\ y = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = x^2 \\ -y = x \\ y = x-4 \\ y = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = x^2 \\ y = x-4 \\ -y = x^2 \\ y = -3x \\ -y = x \\ y = x-4 \\ -y = x \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x = x^2 \\ y = x-4 \\ 3x = x^2 \\ y = -3x \\ 4-x = x \\ y = x-4 \\ 3x = x \\ y = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} - 4 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ y = 0 \\ y = -9 \\ x = 2 \\ y = -2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ x = 3 \\ y = -9 \\ x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{\sqrt{17}-9}{2}\right) \vee (3; -9) \vee (2; -2)$

5.
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

(1)
$$\begin{cases} y = -x-8 \\ y = x+8 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \begin{cases} 5x = -\left(2x + \frac{\sqrt{11}}{4}\right) + 2\sqrt{11}n \\ 5x = \sqrt{11} + \left(2x + \frac{\sqrt{11}}{4}\right) + 2\sqrt{11}n \end{cases} \\ & \begin{cases} 7x = 2\sqrt{11}n - \frac{\sqrt{11}}{4} \\ 3x = \frac{5\sqrt{11}}{4} + 2\sqrt{11}n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{11}n}{7} - \frac{\sqrt{11}}{28} \\ x = \frac{5\sqrt{11}}{12} + \frac{2\sqrt{11}n}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{11}}{8} + \frac{\sqrt{11}n}{2}$

$$x = \frac{2\sqrt{11}n}{7} - \frac{\sqrt{11}}{28} \quad n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\sqrt{11}}{12} + \frac{2\sqrt{11}n}{3}$$

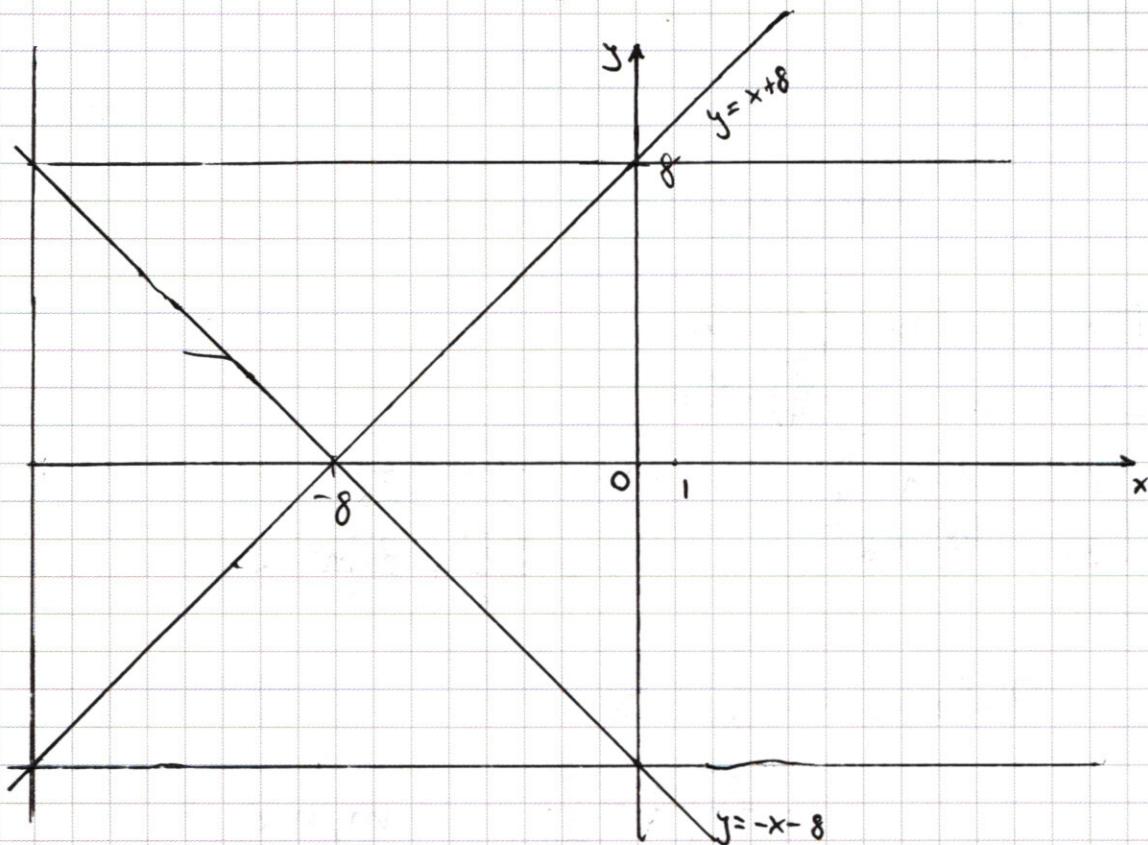
$$\begin{aligned} 3. \quad & \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right) \ln(-y) = x^{2\ln(xy^2)} & \textcircled{1} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ОДЗ: $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & y(y+3x) - x(y+3x) + 4(y+3x) = 0 \\ & (y-x+4)(y+3x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = x-4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{-x^{2\ln(-y)}}{y^{\ln(-y)}} = x^{\ln x^2} \cdot x^{\ln y^4} \\ & -y^{\ln(-y)} = x^{2\ln(-y) - \ln x^2 - \ln y^4} \\ & \ln(-y^{\ln(-y)}) = \ln x^{(2\ln(-y) - \ln x^2 - \ln y^4)} \\ & \ln(-y) \cdot \ln(-y) = \ln x (2\ln(-y) - \ln x^2 - \ln y^4) \\ & \ln^2(-y) = -2\ln^2 x + 2\ln x \ln(-y) - \ln y^4 \\ & (\ln(-y) - 2\ln x)(\ln(-y) - \ln x) = 0 \end{aligned}$$



$$1) \quad x + y + 8 + x - y + 8 = 16 \\ x = 0$$

$$2) \quad x + y + 8 - x + y - 8 = 16 \\ y = 8$$

$$3) \quad -x - y - 8 + x - y + 8 = 16 \\ y = -8$$

$$4) \quad -x - y - 8 - x + y - 8 = 16 \\ x = -16$$

(2) $16 \leq 8$

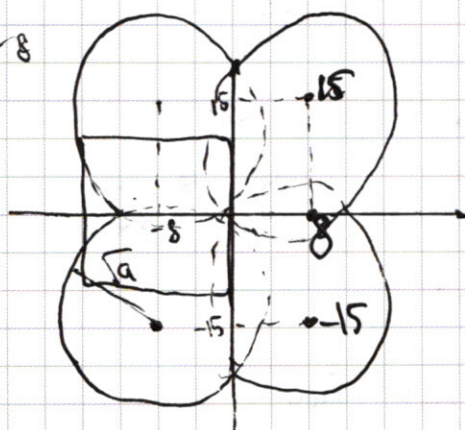


график имеет такой вид

Ответ:

$$a = 49 \cup$$

$$a \in (225; 289)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

01

$$\begin{array}{r|l} 64 & 827 \\ 21 & 609 \\ 72 & 03 \\ 240 & 17 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 240 & 17 \\ 21 & 804 \\ \hline 301 & \\ 28 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

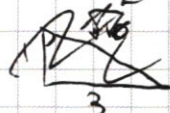
$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 28 & 49 \\ \hline 63 & \end{array}$$

$$7^4 \cdot 3 \cdot 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = -(2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n$$

$$5x = 5\pi(2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n$$



$$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

$$\cos 2x + \cos 3x + \sin 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0 \quad | (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \dots \quad \ln x^2 + \ln y^2$$

$$\begin{cases} (-\frac{x^2}{y})^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

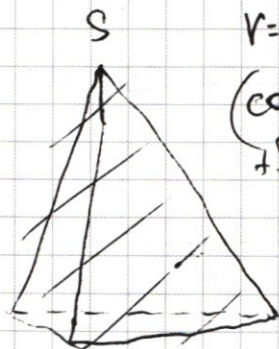
$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$93 + 3^{28}x - 3x > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$3^x + 3^{28}(4-x) + 3x - 93 = 0$$

$$3^{x-1} + 3^{27}(4-x) + x - 31 = 0$$



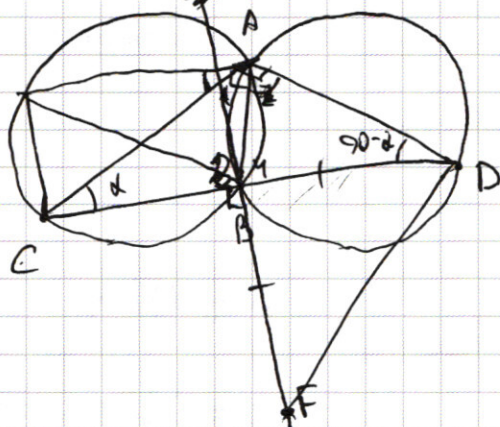
$$r = \frac{3V}{S}$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) / \sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin 5x \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$



$$\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$$

$$\angle 1 = 180^\circ - \alpha$$

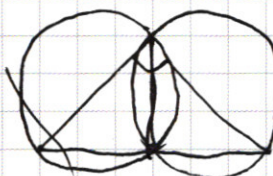
$$\begin{cases} \angle 1 = 90^\circ - \angle 2 \\ \angle 3 = 180^\circ - \angle 4 \\ 180^\circ - \angle 1 - \angle 3 = \alpha \\ 180^\circ - \angle 2 - \angle 4 = 90^\circ - \alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \angle 2 + \angle 4 - 90^\circ$$

$$180^\circ - 90^\circ + \angle 2 - 180^\circ + \alpha$$

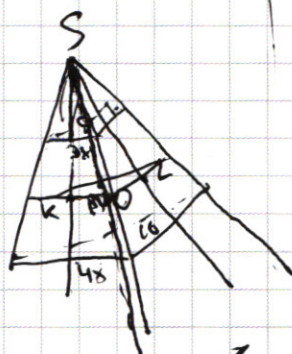
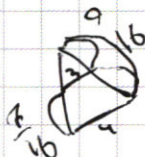


$$x y = 28$$



$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

28h



$$V_1 = \frac{1}{3} h \cdot 9 \quad V_1 = 3h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} (h + H) \cdot 16 \quad V_2 = \frac{17}{3} h$$

$$\Delta V = \frac{1}{3} (16h + 16H - 9h) = \frac{85}{3} h$$

$$\Delta V = \frac{1}{3} (7h + 16H)$$

$$\frac{H}{2} = \frac{3V}{S} \quad \Delta V$$

$$\frac{H}{2} = \frac{2}{3} h = \frac{85h}{3S}$$

$$\frac{17.5 \cdot 16}{7} \quad 2h = \frac{85h}{S}$$

$$\frac{85}{S} = 2 \quad S = 42.5$$

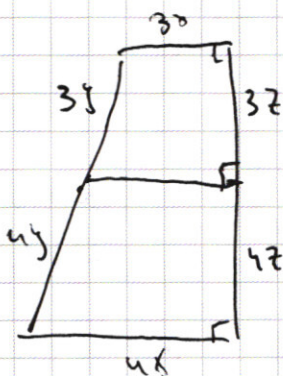
$$S_8 = 17.5$$

$$S_8 = 40$$



$$H = \frac{4}{3} h$$

$$\frac{1}{2} \cdot H \cdot \frac{1}{2} \cdot P = 40$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^{2\ln(xy^3)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{aligned} -y &> 0 & xy^2 &> 0 \\ y &< 0 & x &> 0 \end{aligned}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\frac{y(3x+y) - x(3x+y) + 4(3x+y)}{y(y+4)} = 0$$

$$3x(x+y) + y(y+4)$$

$$y(y+3x) - x(y+3x) + 4(y+3x)$$

$$(y-x+4)/(y+3x) = 0$$

$$3x \cdot x(3x+y-3x) + y(y+3x)$$

$$\begin{cases} y = 4x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\frac{7\ln(-y)}{4y^{\ln(-y)}} = x^{\ln x^2} \cdot x^{\ln y^3}$$

$$-y^{\ln(-y)} = x^{7\ln(-y) - \ln x^2 - \ln y^3}$$

$$\ln -y^{\ln(-y)} = \ln x^{\dots} \ln y^3$$

$$\ln(-y) \ln(-y) = (7\ln(-y) - \ln x^2 - \ln y^3) \ln x$$

$$\ln^2(-y) = \ln x (7\ln(-y) - \ln x^2)$$

$$\ln^2(-y) = -2\ln^2 x + 7\ln x \ln(-y)$$

$$\ln(-y)(\ln(-y) - \ln x) + 2\ln x(\ln(-y) - \ln x)$$

$$(\ln(-y) - 2\ln x)(\ln(-y) - \ln x) = 0$$

$$\ln(-y) = 2\ln x \quad \ln(-y) = \ln x$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

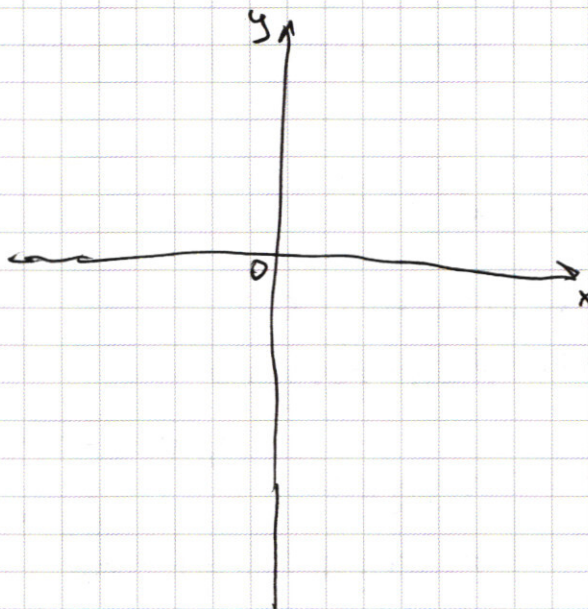
$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 3 \quad x = 0$$

$$5. \quad |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9$$

$$(1) \quad \begin{cases} y = -x-8 \\ y = x+8 \end{cases}$$





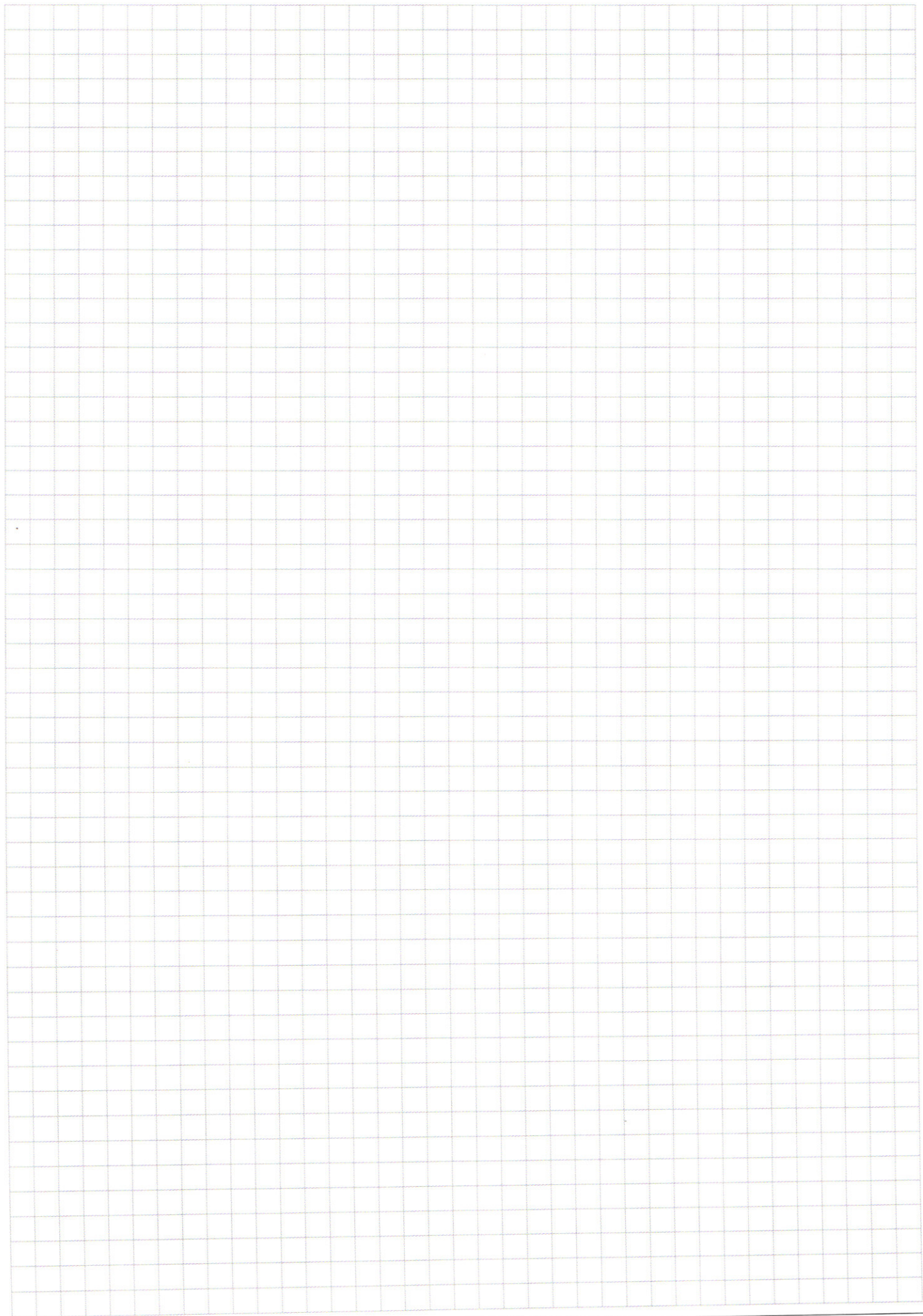
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



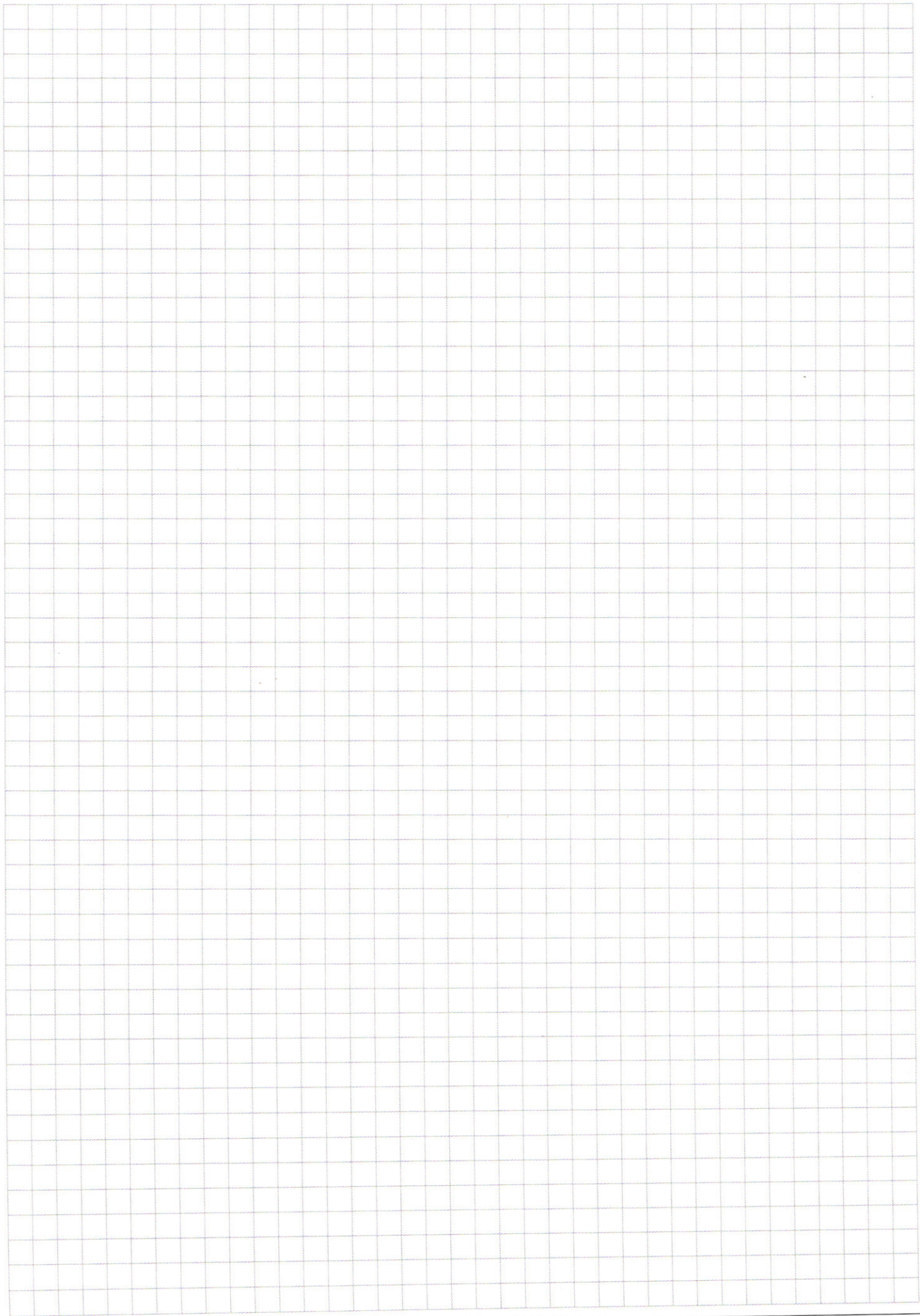
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)