

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

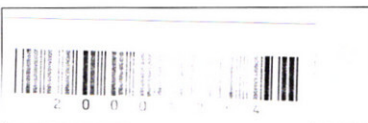
$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ $b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$
 $2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$ $b^2 - ab - 2ab$

① $abcde fgh = 16875 = 3375 \cdot 5 = 675 \cdot 25 = 135 \cdot 25 \cdot 5 = 27 \cdot 25 \cdot 25$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

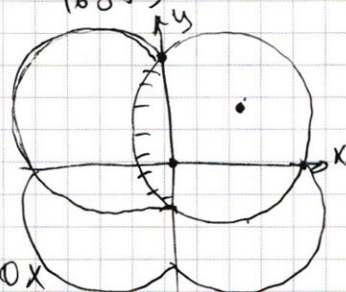
$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

$$abcde fgh = 27 \cdot 25 \cdot 25 = 3^3 \cdot 5^4$$

Одно из чисел обязательно 1

1.



② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

2 cos

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - 2 \cos 2x \sin 5x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$x^2 + 17x + 16 = 0$$

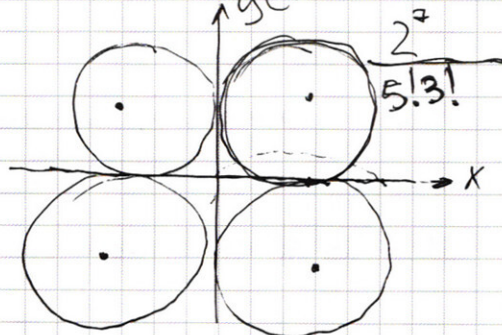
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -16 \end{cases}$$

$$x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$y^2 + x^2 + 6x + 4y = 0$$

$$y^2 - x^2 + 6 - x - y + 6 = 12$$

$$\begin{array}{r} 5555 \\ 333 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$$



$$\textcircled{5} \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases} \text{ - равно 2 решения}$$

Рассмотрим графики ур-ний (1) и (2) в системе ОХУ и будем искать a , при которых графики имеют равно 2 общие точки

$$1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Нули подинормальных выражений:

$$y = x - 6$$

$$y = 6 - x$$

$$\textcircled{I} \quad x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$\boxed{x = 12}$$

$$\textcircled{II} \quad y-x+6 + x-6+y = 12$$

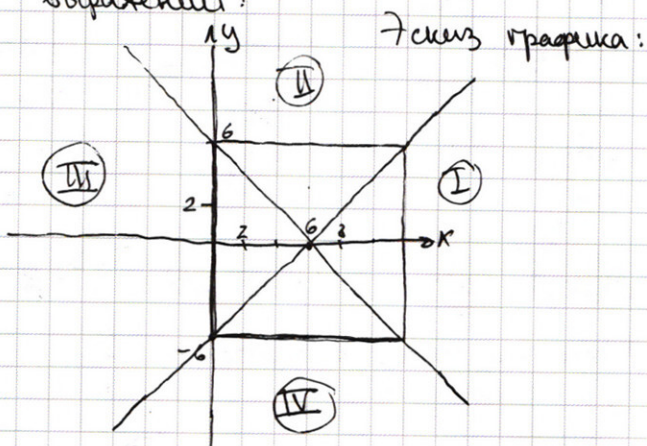
$$\boxed{y = 6}$$

$$\textcircled{III} \quad -x+6+y - x-y+6 = 12$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$\textcircled{IV} \quad x-6-y - x+6-y = 12$$

$$\boxed{y = -6}$$



Графиком (1) ур-ние является квадрат (см. эскиз)

$$2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

Если $a < 0$, то не суш.

Если $a = 0$, то график - точки $(\pm 6; \pm 8)$

Если $a > 0$, то ^{исходный} график - окр-ть с центром $(\pm 6; \pm 8)$

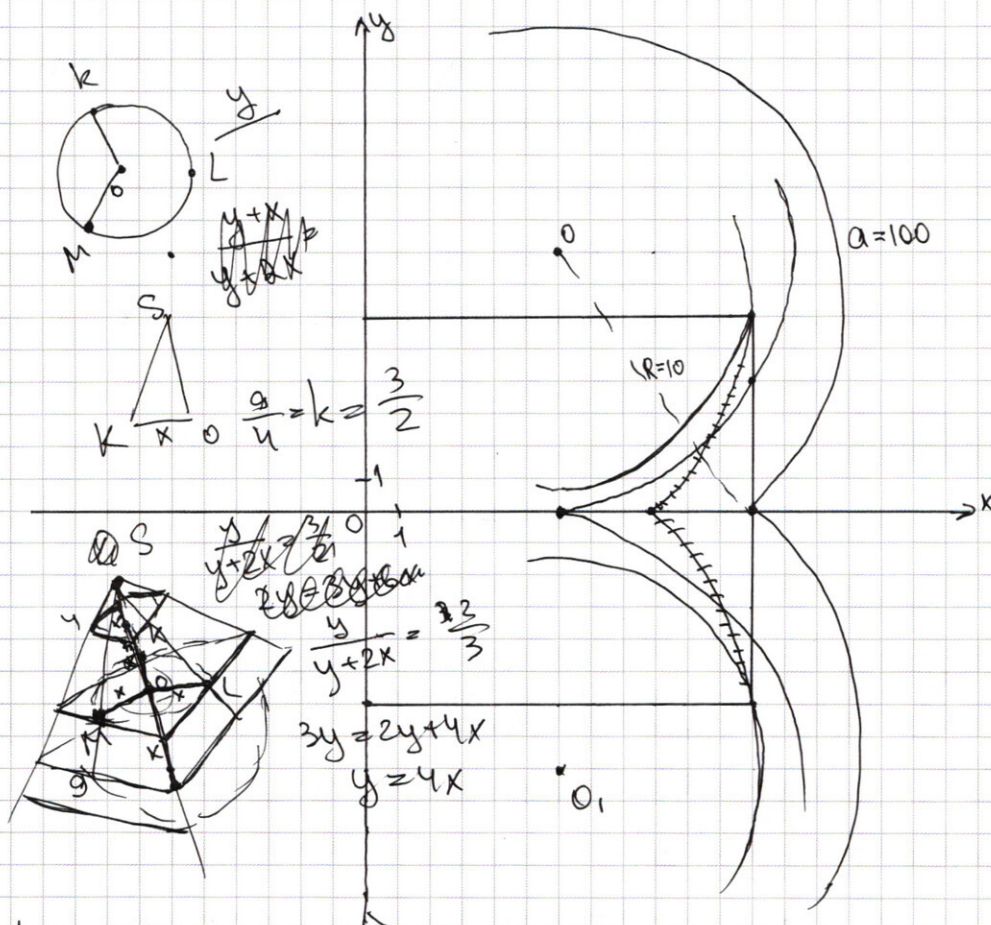
~~и~~, а потом симметричное отражение относ. осей ОХ и ОУ



ШТАМП

(заполняется секретарём)

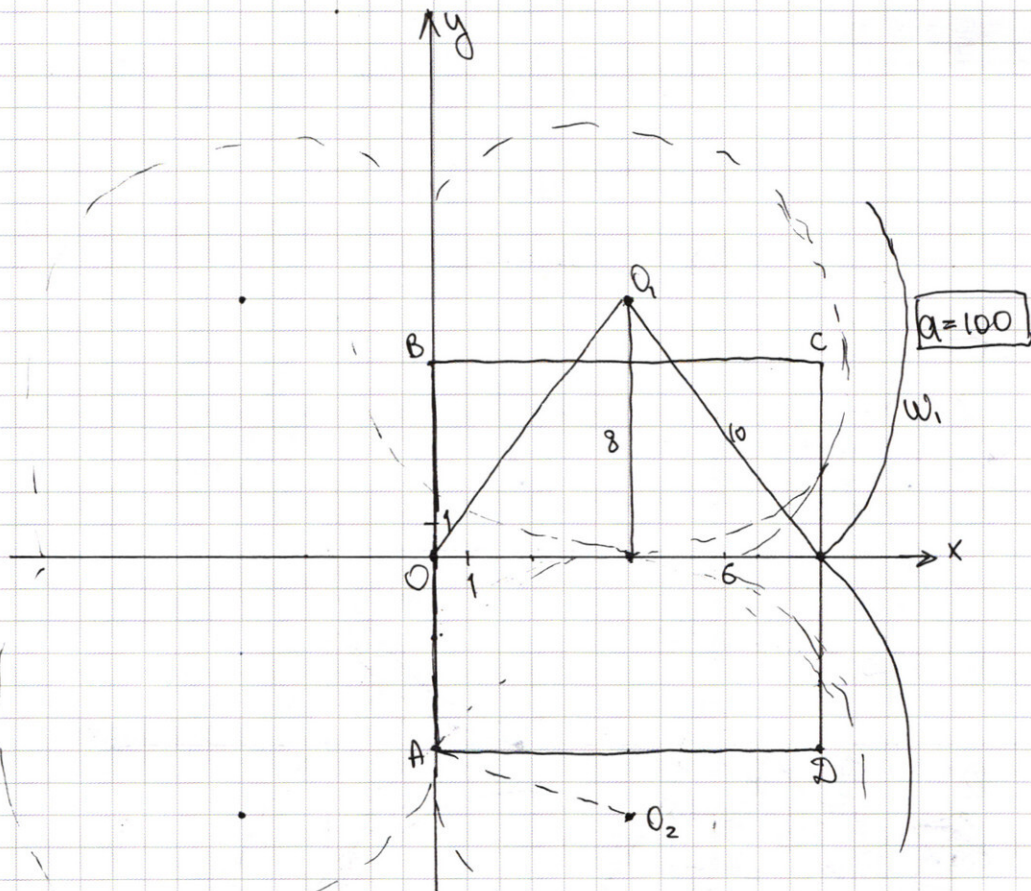
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Если R будет меньше 8, то больше 2, то окружность с центром O точно будет иметь с квадратом 2 общие точки, и окружность с центром O_1 симметрично будет иметь 2 общие точки $\Rightarrow$ ~~тогда~~ $a > 64$

$$\begin{aligned} y &= x+4 \\ y &= -\frac{x}{2} \\ x+4 &> 0 \\ -\frac{x}{2} &> 0 \\ \begin{cases} x > -4 \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y} \right)^{2 \lg y} &= (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = \\ &= -x^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} \\ \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-x)} \left(\frac{x^4}{y^2(-x)} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \\ &= \left(\frac{x^3}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \end{aligned}$$



Если R будет больше 2, но меньше 8, то окр-та с центром O , будет иметь с квадратом 2 общие точки $\Rightarrow$ из симметрии окр-та с центром O_2 будет иметь 2 общие точки с квадратом $\Rightarrow$ $a \geq 8$

Найдем a для граничного положения окр-ты с центром O_1

Из геометр. соображений для W_1 : $R = 10 \Rightarrow a = 100$ (см. чертёж)

~~Окончательно устанавливаем, что $a \in [64, 100]$~~

~~ОТВЕТ: $[64, 100]$~~

~~Если $a < 100$, то окр-та с центром O_1 и O_2 не пересекают AB~~

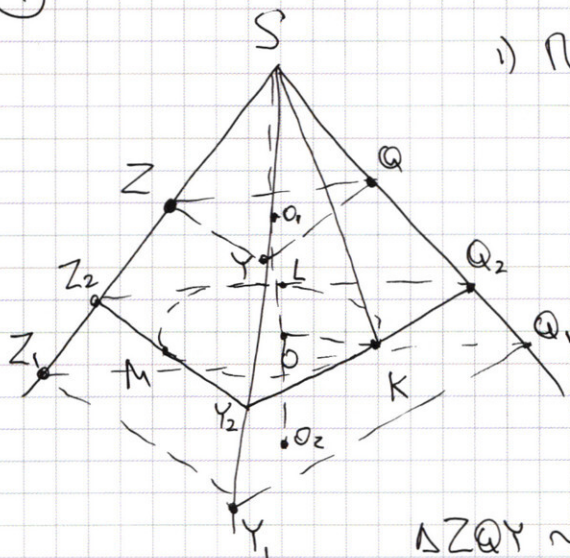
Тогда есть только одно положение графика, при котором он проходит через $(0,0)$ и $(12,0) \Rightarrow$ $a = 100$

ОТВЕТ: $a = 100$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



1) Пусть X - радиус сферы;
 $OO_1 = OK = X = OO_2$
Согласно тригранного угла
плоскостями $SZQY$

ΔZQY и $\Delta Z_1Q_1Y_1$,

площади которых:

$$\frac{S_{ZQY}}{S_{Z_1Q_1Y_1}} = \frac{4}{9}$$

$$\Delta ZQY \sim \Delta Z_1Q_1Y_1 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Пусть $SO_1 = y$, тогда $\frac{y}{y+2x} = \frac{2}{3}$, т.к. $\Delta SZQ \sim \Delta SZ_1Q_2$
 $2y + 4x = 3y$

ΔSOK - прямоугольн.: $SO = y + x = 5x$
 $OK = x$
 $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle KSO = \frac{OK}{OS} =$

$$= \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \boxed{\operatorname{arctg} \frac{1}{5}}$$

2) Пусть $Z_2Y_2Q_2$ - искомое сечение

$$\frac{S_{Z_2Y_2Q_2}}{S_{ZQY}} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2 = \left(\frac{5x}{4x}\right)^2 = \frac{25}{16} \quad (\text{по подобию})$$

$$S_{Z_2Y_2Q_2} = \frac{25}{16} S_{ZQY} = \frac{25}{16} \cdot 4 = \boxed{\frac{25}{4}}$$

$$\boxed{\text{ОТВЕТ: } \operatorname{arctg} \frac{1}{5}; \frac{25}{4}}$$

$$abcde fgh = 5^4 3^3$$

~~5 5 5 5~~

~~5 5 5 5~~

$$5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 3 \ 3 \ 9$$

$$\cdot \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 3 \ 3 \ 9$$

$$\cdot \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 9 \ 3 \ 1$$

~~5 5 5 5~~

~~5 5 5 5~~

~~5 5 5 5~~

~~5 5 5 5~~

$$C_n^k =$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$2^7$$

~~2^7~~

$$\frac{2^7}{4! 3!}$$

$$y = x + 4$$

$$y > 0$$

$$x > -4$$

$$\frac{x^4}{(x+4)^2}$$

$$= (-x) \lg(-x(x+4))$$

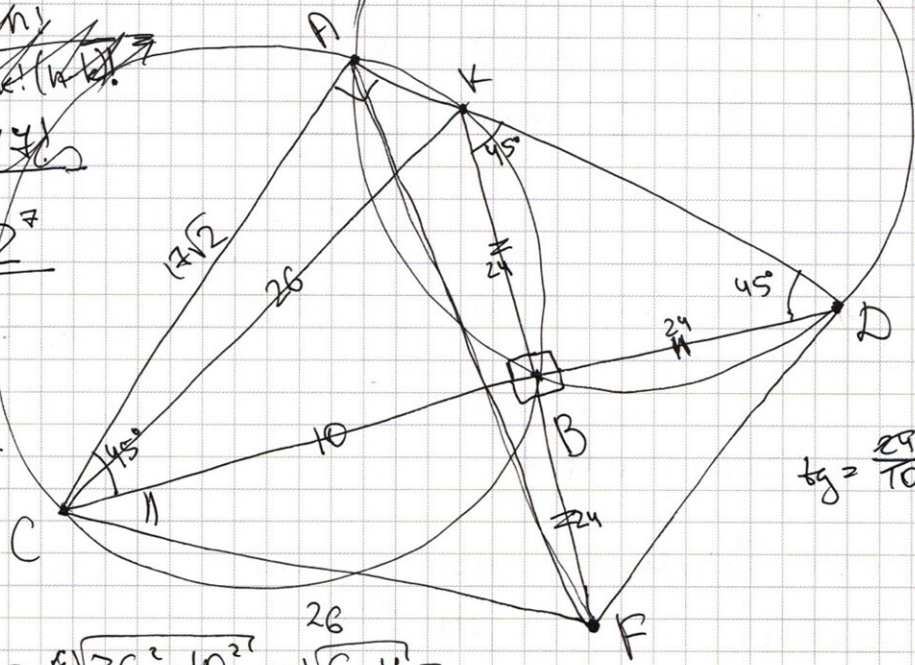
~~3! 4!~~

~~3! 4!~~

$$\frac{x^4}{(x+4)^2}$$

$$\lg(2+B) = \lg(-x) + \lg(x+4)$$

$$\lg(x+4) \lg \frac{x^4}{(x+4)^2} = \lg(x+4) (\lg x^4 - \lg(x+4)^2) = \lg(-x) + \lg(x+4)$$



$$KB = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{6 \cdot 4} =$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{KD}{CD} = \frac{24\sqrt{2}}{34}$$

$$\frac{24}{AC} = \frac{24\sqrt{2}}{34}$$

$$AC = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \cos (5x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2 (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \cos (5x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2 (\cos 5x - \sin 5x) (-2) \sin \left(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ \sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 5x = 1 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k \\ \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ -\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{8} + \pi k \\ \frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k; \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}k; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z}$

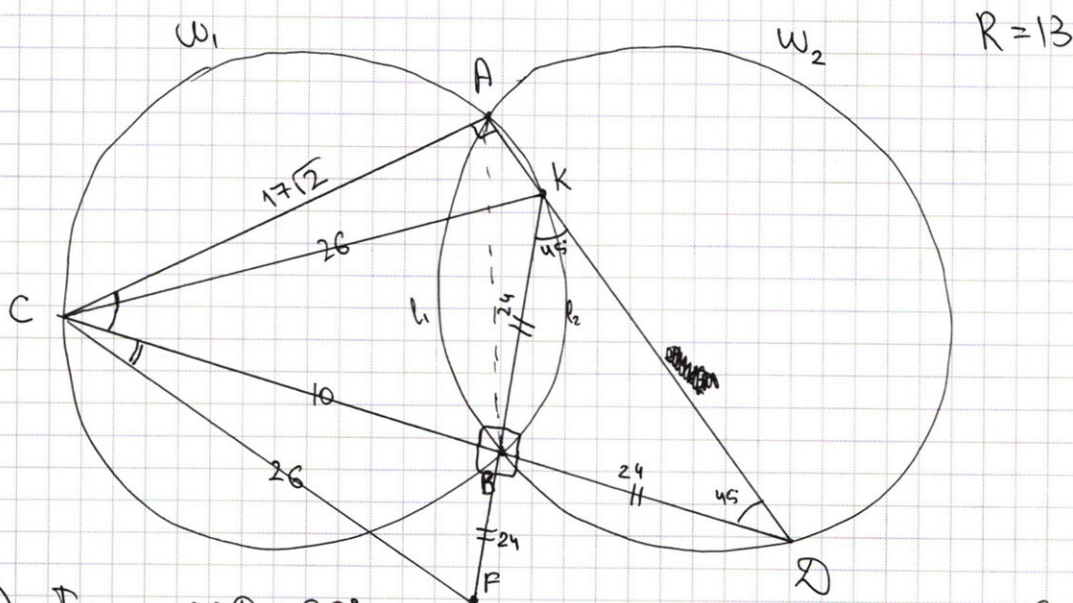
① $abcde fgh = 16875 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$ есть 2 набора
(a...h - цифры)

цифры числа
используются: $5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1$
 $5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥



- 1). Т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то этот угол опир. на диаметр в W_1 .
Значит, CK - диаметр, а $\angle CBK = 90^\circ$, т.к. тоже опир. на
диаметр $\Rightarrow BK \perp CD$

Радиусы W_1 и W_2 равны $\Rightarrow$ дуги l_1 и l_2 равны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{1}{2} l_1$ $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
 $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ$

В $\triangle BKD$ $\angle BKD = 90 - \angle BDK = 45^\circ \Rightarrow BDK$ - р/б $\triangle$ (по признаку)

$\Rightarrow BK = BD = BF$

$\triangle CKP$: CB - высота и медиана $\Rightarrow CK = CP$
($KB \perp CD$) ($KB = BF$)

А т.к. CK - диаметр $\Rightarrow CP = 2R = \boxed{26}$

$$2) \triangle CBK: \text{По т. Пифагора: } BK = \sqrt{KC^2 - BC^2} = \sqrt{36 - 16} = 24$$

$$\Rightarrow BD = 24$$

$$\triangle BDK - \text{прямоуг} \Rightarrow KD = BD\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$\triangle BKD \sim \triangle ADC \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CD}{KD}$$

$$\frac{AC}{24} = \frac{34}{24\sqrt{2}} \Rightarrow AC = 17\sqrt{2}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}, \cos \angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\underbrace{\angle ACD}_{45^\circ} + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \sin \angle BCF =$$

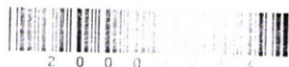
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13} = \frac{17}{26}\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17}{26}\sqrt{2} =$$

$$= 289$$

$$\text{ОТВЕТ: А) } CF = 26$$

$$\text{Б) } S_{ACF} = 289$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad y = -\frac{x}{2} \quad y = (x+4)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y - xy - x^2 - 4x = 0$$

$$2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 24x = 9x^2 + 40x + 64 =$$

ЗСВ

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

ЗСВ

$$\cancel{y^2 - x^2 - 4x}$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

ЗСВ 2.3.8

$$y = \frac{x+8+3x+8}{4}$$

$$y = \frac{x+8-3x-8}{4}$$

$$y = x+4$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2(-x)^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\left(-\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{-x(x+4)}{(-x)^{\lg(-x)+\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{-x}{(-x)^{\lg(-x)+\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$y = x+4$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

$x < 0$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$2) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

Рассм. данное ур-ние, как квадратное отн. y

$$2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 - 8(-x^2 - 4x) = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+8+3x+8}{4} \\ y = \frac{x+8-3x-8}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

Если $y = -\frac{x}{2}$, то:

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$\lg(16y^2)^{\lg y} = \lg(2y)^{\lg 2 + 2\lg y}$$

$$\lg y \cdot \lg(16y^2) = (\lg 2 + 2\lg y)(\lg 2 + \lg y)$$

$$\lg y \cdot (\lg 16 + 2\lg y) = (\lg 2 + 2\lg y)(\lg 2 + \lg y)$$

Пусть $\lg y = t$

$$t(\lg 16 + 2t) = (\lg 2 + 2t)(\lg 2 + t)$$

$$\lg(16)t + 2t^2 = \lg^2 2 + 2t \cdot \lg 2 + t \lg 2 + t^2$$

$$t \cdot \lg 16 = \lg^2 2 + t(\lg 4 + \lg 2) = \lg^2 2 + t \cdot \lg 8$$

$$t(\lg 16 - \lg 8) = \lg^2 2$$

$$t = \frac{\lg^2 2}{\lg 2} = \lg 2$$

Опр. замена:

$$\lg y = \lg 2 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=-4}$$

Подставим $(-4; 2)$ в исходное ур-ние: $4^{\lg 2} = 4^{\lg 2}$ (верно)

Корни ур-ния
проверить в конце!



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $y = x+4$, то

Корни ур-ния проверим в
конце!

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg 4}$$

$$\lg(x+4) \lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right) = (\lg(-x) + \lg(x+4)) \lg(-x)$$

$$\lg(x+4) (\lg x^4 - \lg(x+4)^2) = \lg^2(-x) + \lg(x+4) \lg(-x)$$

Пусть $a = \lg(x+4)$

$b = \lg(-x)$

$$a(4b - 2a) = b^2 + ab$$

$$4ab - 2a^2 = b^2 + ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b^2 - ab - 2ab + 2a^2 = 0$$

$$b(b-a) - 2a(b-a) = 0$$

$$(b-2a)(b-a) = 0$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ b = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(-x) = 2\lg(x+4) \\ \lg(-x) = \lg(x+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = x+4 \\ -x = x^2 + 16x + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = -16 \end{cases}$$

→ сразу же проверяем, т.к. $y = x+4$ должно
быть > 0

Если $x = -2$, то $y = 2$:

$$\left(\frac{16}{4}\right)^{\lg 2} = (2)^{\lg 4}$$

$$4^{\lg 2} = 2^{\lg 4} \text{ — верно } \Rightarrow \boxed{(-2; 2)} \text{ подходит}$$

Если $x = -1$, то $y = 3$, т.е.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\lg 3} = 1^{\lg 3} \text{ — неверно } \Rightarrow (-1; 3) \text{ не подходит}$$

ОТВЕТ: $(-2; 2)$; $(-4; 2)$



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

