

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (2) \\ 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 & (1) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \cos 2x \cos 3x - 2 \sin 2x \sin 3x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \cos 3x + 2 \cos \frac{\pi}{4}) - \sin 2x (2 \sin 3x + 2 \sin \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 2x \cdot 2 \cos \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \sin 2x \cdot 2 \cdot \sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos 2x \cos \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \sin 2x \sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$(2) \quad \cos 2x + \sin 2x = 0$$

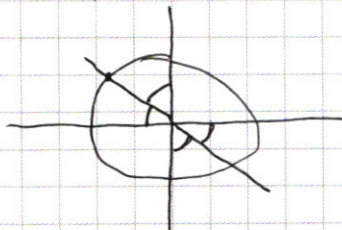
$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

↑

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin(2x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$



$$\begin{aligned} \rightarrow x_k &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Для знака в уравнении

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi e, e \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi e, e \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi e, e \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi e, e \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

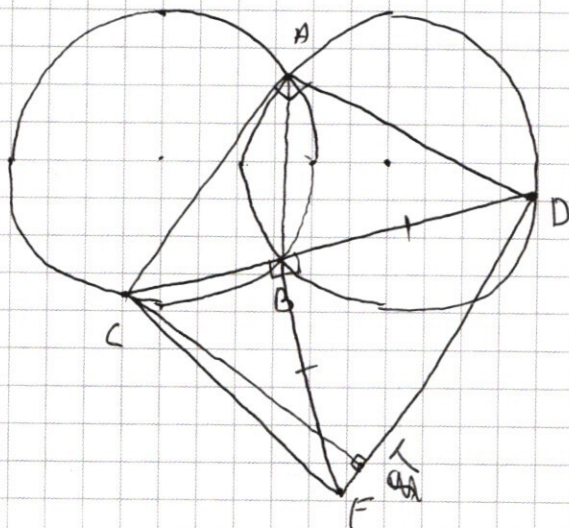
✓

Следующая страница,



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~6



Вино:

$$k=17$$

$\angle CAD = 90^\circ$

$$B^2 = B \cdot 0$$

a) Cl^- - ?

7 BC = 16

$$\sum_{ACP} - 7$$

~~For kak oshchutko~~

a) Теорема о сужении гл. $A \subset B$ и $A \subset B$:

$$2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \quad (2)$$

$$2R_2 = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$$

$\rightarrow R_1 = R_2 = R$ Take me $\#B$ - cobnagaer $\Rightarrow$
 $\angle ACB = \angle B$

$\Rightarrow \triangle CAD$ - прямоугольный, равнобедренный $\Rightarrow \angle CAD = \angle ADC = 45^\circ$

Посчитаем $AB: m_3(1)$

$$AB = 2R \cdot \sin \angle ACB = 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

Пусть $AD = x$ и $BD = e$

Тоуа по теор. космических.

$$AB^2 = x^2 + e^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \cdot e = x^2 + e^2 - \sqrt{2} x e$$

1345

Решение:

По теор. Пифагора

$$CD = \sqrt{2AB^2} = x\sqrt{2} \Rightarrow CB = x\sqrt{2} - e$$

По теор. Пифагора:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2$$

$$BF = BD = e \Rightarrow$$

$$CF^2 = 2x^2 - 2xe\sqrt{2} + e^2 + e^2 = 2(x^2 - \sqrt{2}xe + e^2) = 2 \cdot AB^2$$

$$\Rightarrow CF = AB\sqrt{2} = 34$$

$$5) BC = 16 = x\sqrt{2} - e$$

По теор. косинусов:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot \overset{AC}{AB} \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$$

$$2 \cdot 17^2 = 256 + AC^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AC \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Пусть } AC = t$$

$$2 \cdot 289 = 256 + t^2 - 16\sqrt{2}t$$

$$t^2 - 16\sqrt{2}t - 322 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 128 + 322 = 450$$

$$t = \frac{16\sqrt{2} \pm 15\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{450} = 3\sqrt{50} = 15\sqrt{2}$$

$$AC = 23\sqrt{2}$$

$\angle CDF = 45^\circ$; $\angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \angle CDF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$.

Построим $CT \perp FD \Rightarrow CT \parallel AD \Rightarrow CTDA$ - параллелограмм.

$$\Rightarrow CT = AD = AC$$

$$\cos \angle TCF = \frac{TC}{CF} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\angle TCF + 90^\circ) = \cos \angle TCF = \frac{23\sqrt{2}}{34}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{23 \cdot 34 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34}}{2} = \frac{529\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ответ: } AC = 34 \quad S_{\triangle ACF} = \frac{529\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \times 289 \\ \hline 289 \\ 256 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{-\ln(3x)}{3} = x$$

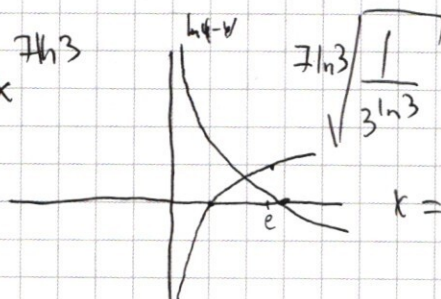
$$\frac{1}{3 \ln 3 x} = \frac{1}{3 \frac{\ln 3 + \ln x}{\ln 3 e}} = \frac{1}{3 x \frac{1}{\ln 3 e}} = x$$

$$1 = x^{6 \ln 3} \cdot (3x)^{\frac{1}{\ln 3 e}}$$

$$3 \cdot 3 \rightarrow 3^5$$

$$1 = x^{6 \ln 3} \cdot 3^{\ln 3} \cdot x^{\ln 3}$$

$$\frac{1}{3 \ln 3} = x^{7 \ln 3}$$



$$\sqrt[7 \ln 3]{\frac{1}{3 \ln 3}} = x$$

$$x = \left(\frac{1}{3 \ln 3}\right)^{\frac{1}{7 \ln 3}}$$

$$y = -3 \left(\frac{1}{3 \ln 3}\right)^{\frac{1}{7 \ln 3}}$$

$$y = x - 4$$

$$\left(-\frac{x}{(4-x)}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(x-4)^2)}$$

$$4-x > 0$$

$$0 < x < 4$$

$$L =$$

$$\frac{x^{2 \ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2 \ln x + 4 \ln(4-x)}$$

$$\frac{1}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2 \ln x - 3 \ln(4-x)}$$

$$x = 3 - \text{не кор.}$$

$$\frac{1}{(4-x)^{\frac{\ln 4 - x}{\ln 4 e}}}$$

Нет корней

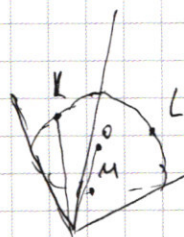
$$x = 0 - \text{корень}$$

$$y = -4$$

$$\frac{x^{2 \ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2 \ln x + 4 \frac{\ln x}{\ln 4}}$$

$$y = |x| + 3$$

$$y > |x|$$



$$x + y + p < 0$$

$$x - y + p < 0$$

$$y < -x - p$$

$$y > x + p$$

$$y = 16$$

$$y = 8$$

$$x + y + p < 0$$

$$x - y + p > 0$$

$$y = x + p$$

$$x - y + p > 0$$

$$x + y + p > 0$$

$$y < x + p$$

$$y > -x - p$$

$$2p + 16 = 2 \cdot 16$$

$$x = 0$$

$$x + y + p > 0$$

$$x - y + p < 0$$

$$y > -x - p$$

$$y > x + p$$

$$x + y + p - x - y - p = 16$$

$$y = 8$$

$$R = 17$$

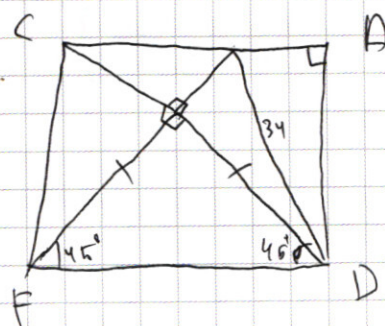
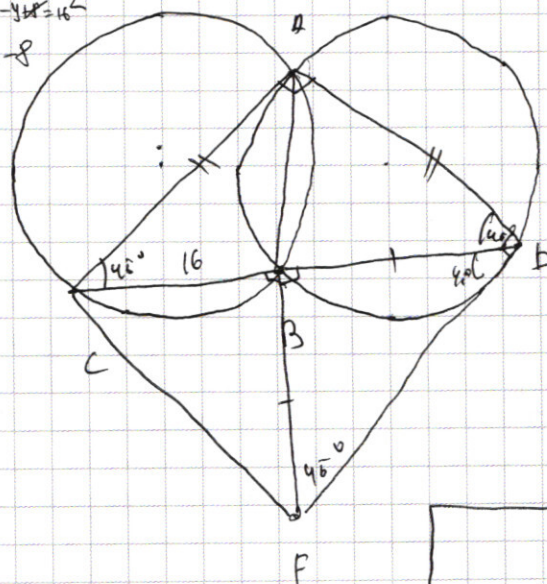
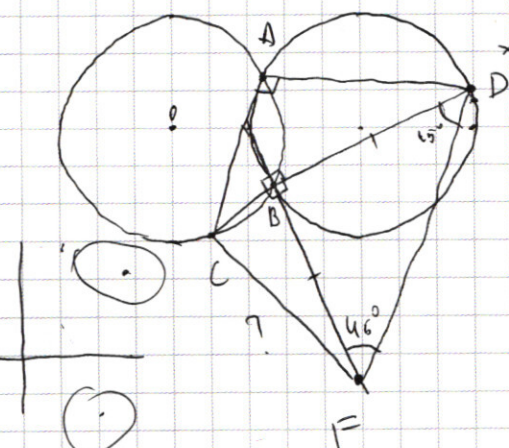
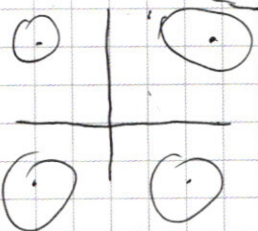
$$y < -x - p$$

$$y > x + p$$

$$x - y - p + x - y - p = 16$$

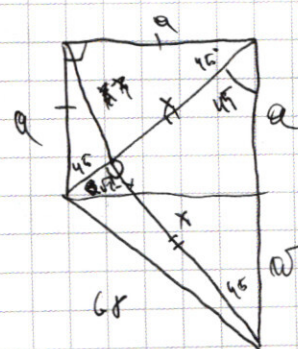
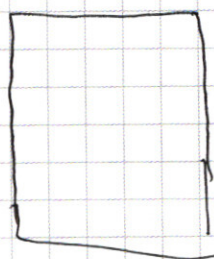
$$y = 8$$

sketch



$$2R = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{4R}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}R = 34\sqrt{2}$$



$$\frac{e + x}{x\sqrt{2}} = \frac{a}{x}$$

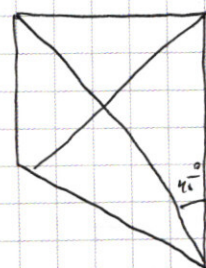
$$\sqrt{2} - a \quad e + x = a\sqrt{2}$$

$$e^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{2}x + x^2 + x^2 = a^2 + 2x^2 - 2a\sqrt{2}x + a^2$$

$$2 \cdot 34^2 = a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax$$

$$4 \cdot 34^2 = e^2$$

$$e = 34 \cdot 2 = 68$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 2231 \\ 2213 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2132 \\ 2123 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2312 \\ 1321 \end{array}$$

$$12$$

$$\frac{3012}{2143}$$

$$231$$

$$136$$

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 3 \\ 21609 & 3 \\ 7203 & 3 \\ 2401 & 7 \\ 343 & 7 \\ 88 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1322 \\ 1232 \\ 1223 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3122 \\ 3212 \\ 3221 \end{array}$$

$$1) 333 7777 1$$

$$3 - - - - -$$

$$1222$$

$$\frac{8!}{3!4!} = \frac{5678}{6}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

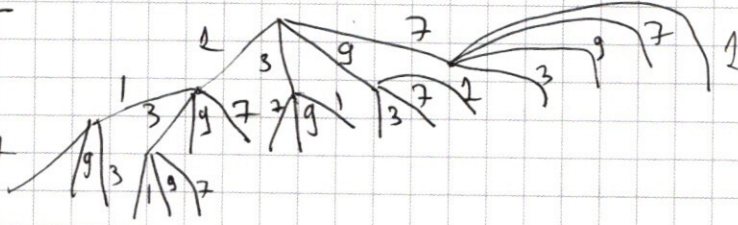
$$\frac{8!}{4!2!1!1!}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$2) 93 777711$$

$$\frac{8!}{4!2!1!1!}$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 8$$



$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \cos 3x \cdot \sin 7x + \sqrt{7} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x / \cos 7x + \sin 7x + \sqrt{7} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x / (\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{7} (\cos 7x - \sin 7x) / (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (2 \cos 5x + \sqrt{7} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{7} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$\cos 7x (2 \cos 3x + \sqrt{7} \cos \frac{\pi}{4}) - \sin 7x (2 \sin 3x + \sqrt{7} \sin \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 7x \cdot 2 \cos(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) \cos(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}) - \sin 7x \cdot 2 \sin(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) \sin(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha + \beta}{2}) \sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

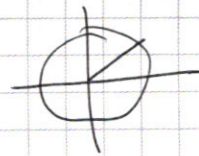
$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\begin{cases} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(2x) \cos(3x + \frac{\pi}{4}) - \sin(2x) \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \quad |2|$$



$$\begin{aligned} (1) \quad & \cos(2x + 3x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ & \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{4} + \pi n \\ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n \quad \frac{4\pi}{8} \\ \frac{7\pi}{8} \quad \frac{12\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^7 + 7xy - 3x^2 + 17x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} &= x^{2\ln(yx^3)} \quad \begin{matrix} y < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{matrix} \\ \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} &= x^{6\ln(y)} \quad x=0 - \text{корень} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln(3x)} &= x^{6\ln 3} \end{aligned}$$

$$y^7 + 7y(x + 2y) - 3x^2 + 17x = 0$$

$$3x^2 - 7x(6+y) - y^7 - 4y = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{y} &= x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 17x = -2x^2 - 8x + 4 = 0 \\ &= -2(x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{y} &= \frac{36 + 12y + y^2}{36 + 12y + y^2 + 3y^2 + 17y} = \\ &= 4y^2 + 74y + 36 = \\ &= 4(y^2 + 6y + 9) = \\ &= 4(y+3)^2 \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{(y+4)^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln((y+4)y^2)}$$

$$x = \frac{6+y \pm |2697y+6|}{3}$$

$$\frac{(y+4)^{2\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = (y+4)^{2\ln((y+4)y^2)}$$

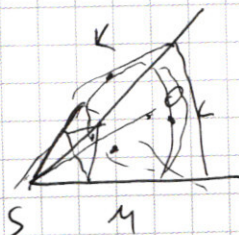
$y = -4$ - корень

$$\frac{1}{(-y)^{\ln(-y)}} = (y+4)^{2\ln((y+4)y^2) - 7\ln(-y)}$$

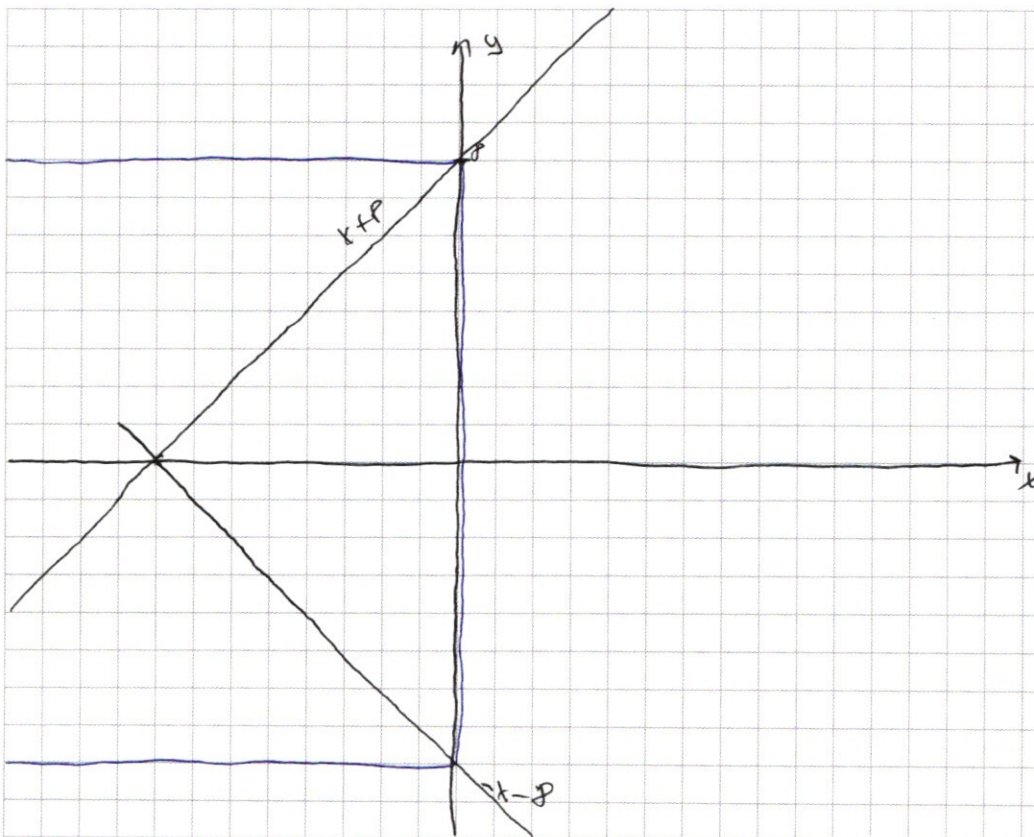
$$x = \frac{6+y+7y+6}{3} = y+4$$

$$x = \frac{6+y-2y-6}{3} = -\frac{y}{3}$$

$$\downarrow \\ y = -3x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x+y+p| + |x-y+p| = 16$$

1) + +

$$x+y+p \geq 0 \quad y \geq -x-p$$

$$x-y+p \geq 0 \quad y \leq x+p$$

$$2p = 0 \quad x = 0$$

2) + -

$$x+y+p \geq 0 \quad y \geq -x-p$$

$$x-y+p \leq 0 \quad y \geq x+p$$

$$y = p$$

3) - +

$$x+y+p \leq 0 \quad y \leq -x-p$$

$$x-y+p \geq 0 \quad y \leq x+p$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

4) - -

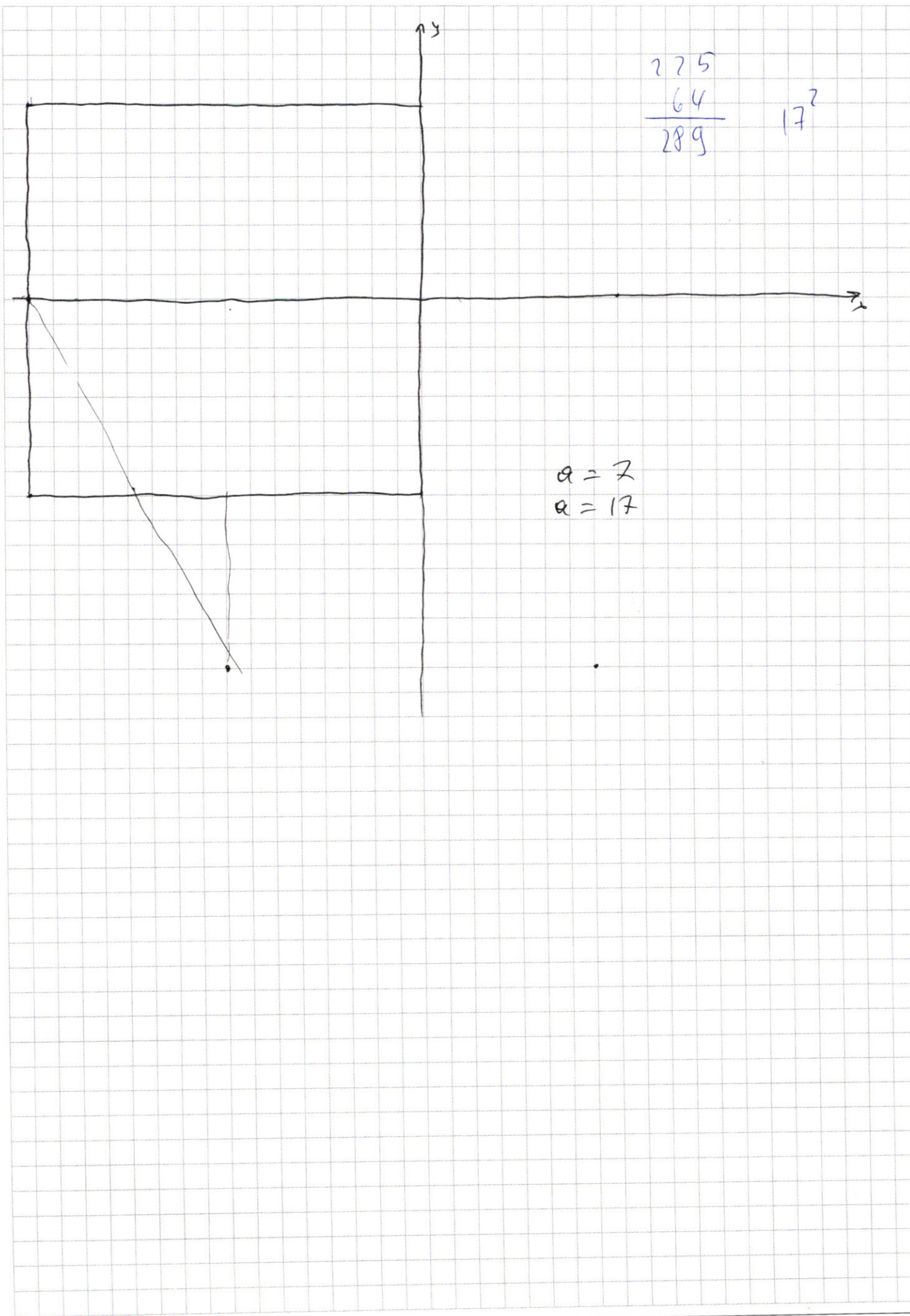
$$x+y+p \leq 0 \quad y \leq -x-p$$

$$x-y+p \leq 0 \quad y \geq x+p$$

$$-x-y-p - x+y-p = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{-2\ln(3)}$$

$$\frac{1}{3^{\ln(3x)}} = \frac{1}{x^{2\ln(3)}} \rightarrow 3^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3)}$$

$$3^{\frac{\ln \log_3 3x}{\log_3 e}} = x^{2\ln(3)} \rightarrow (3x)^{\frac{1}{\log_3 e}} = x^{2\ln(3)} \rightarrow (3x)^{\ln 3} = x^{2\ln(3)}$$

$x=0$ - не корни, т.к. $\ln(0)$ - не определён.

$$3^{\ln 3} = x^{\ln(3)} \quad x=3$$

$$(2) : \begin{cases} x=3 \\ y=-3x \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-9 \end{cases}$$

$$(3) \quad x=y+4 \quad y=x-4$$

$$\left(\frac{x+4}{4}\right)^7$$

$$\left(\frac{x-4}{x-4}\right)^{-\frac{x^7}{(x-4)}} = x^{\ln(4-x)} \quad 2\ln(x(x-4)^2)$$

$$\frac{x^{7\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2\ln x + 4\ln(4-x)}$$

$x=0$ - не корни

$\ln(0)$ - не определён.

$$\frac{1}{(4-x)^{\ln(4-x)}} = x^{2\ln x - 3\ln(4-x)}$$

$$\left(\frac{x^3}{(4-x)}\right)^{\frac{\log_x(4-x)}{\log_x e}} = x^{2\ln x} \quad \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{\frac{\log_x(4-x)}{\log_x e}} = x^{2\ln x}$$

$$\left(\frac{(4-x)^3}{(4-x)^{\log_x(4-x)}}\right)^{\frac{1}{\log_x e}} = x^{2\ln x} \quad \frac{(3 - \log_x(4-x))}{(4-x)} \ln x = x^{2\ln x}$$

$$(4-x) \cdot \frac{(3-\log_x(4-x)) \cdot \frac{\log_{4-x} x}{\log_{4-x} e}}{\log_{4-x} e} = x^{2 \ln x}$$

$$\frac{(3-\log_x(4-x)) \cdot \ln(4-x)}{x} = x^{2 \ln x}$$

$$2 \ln x = (3 - \log_x(4-x)) \cdot \ln(4-x)$$

$\nearrow$ возрастающая ф-ция $\nwarrow$ убывающая ф-ция

$\Rightarrow$ решение единственно

$x=2$ — подходит.

$$x=2 \quad y=-2$$

Отв: $x=2 \quad y=-2$

$$x=3; y=-9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5
а-?

$$|x+y+p| + |x-y+p| = 16$$

$$|x+p|^2 + |y-15|^2 = 9$$

Имеет ровно 2 решения

Решить графически Построить $|x+y+p| + |x-y+p| = 16$

1) $\begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-p \\ y \leq x+p \end{cases}$ После упрощения: $x=0$

2) $\begin{cases} x+y+p \geq 0 \\ x-y+p \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-p \\ y \geq x+p \end{cases}$ После упрощения $x=y$

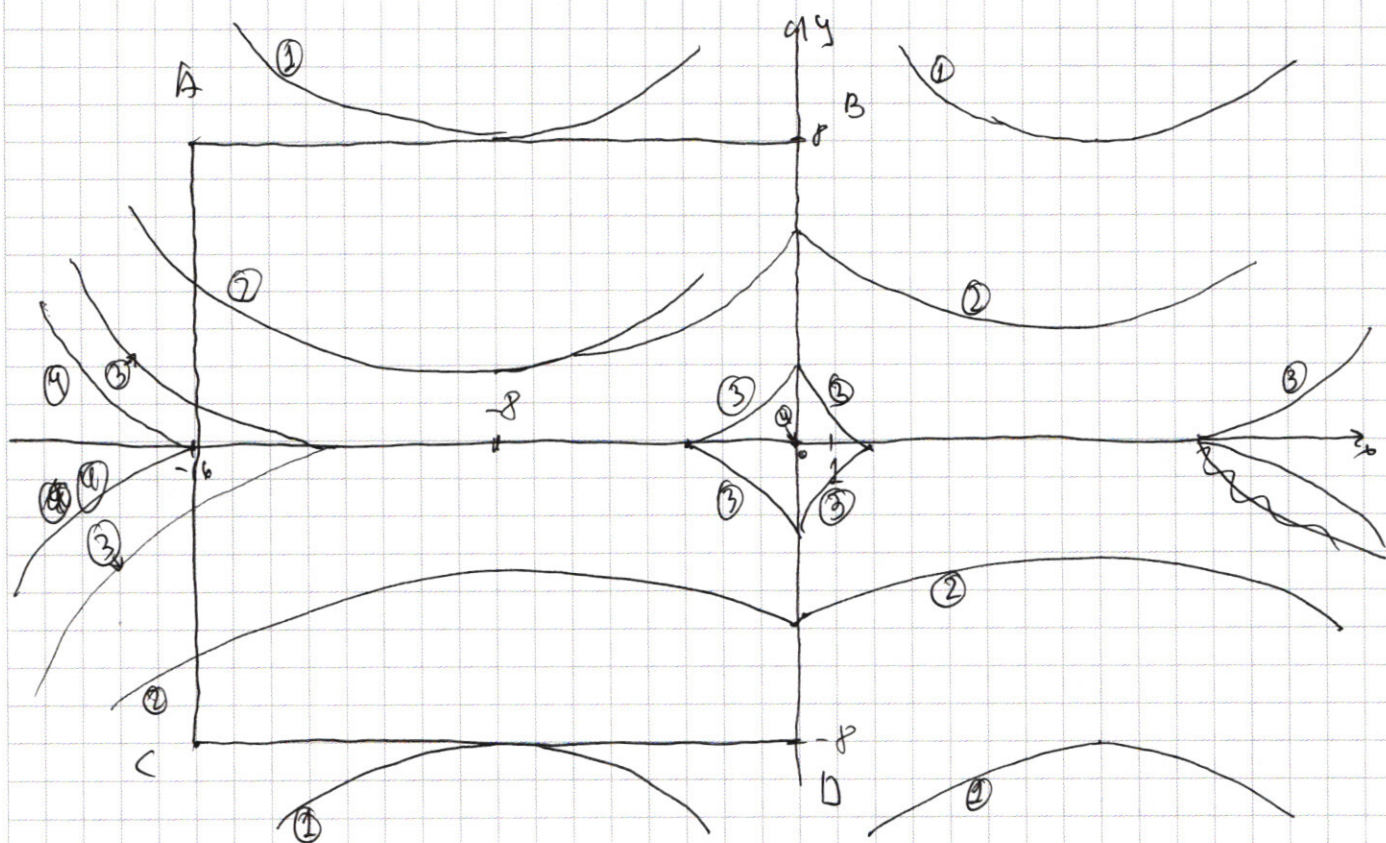
3) $\begin{cases} x+y+p \leq 0 \\ x-y+p \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-p \\ y \leq x+p \end{cases}$ После упрощения $y=-p$

4) $\begin{cases} x+y+p \leq 0 \\ x-y+p \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-p \\ y \geq x+p \end{cases}$ После упрощения $x=-16$

Итого:

$$\begin{cases} y \geq -x-p \\ y \leq x+p \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-p \\ y \leq x+p \\ x=0 \end{cases}$$

Построить эту фигуру на координатной плоскости



В итоге получается квадрат ABCD.

$$(|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \quad - \text{ либо окружности в каждой из четвертей с радиусом } \sqrt{a},$$

либо точка окружности

$(8; 15); (-8; 15); (8; -15); (-8; -15)$ На картинке $R_0 > R_2 > R_3 > R_4$

чем больше a , тем больше радиус окр.

В ① случае будет 2 точки пересечения.

$$a = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{27} \quad - \text{ подходит} \quad a = R_1^2 = (15 - 8)^2 = 49$$

При $a > 49$, мы получим позиции ②; ③; ④ и позиции где радиус больше R_4

② как не подходит, т.к. будет минимум 4 точки пересечения (по 2 верхней и нижней окружности)

③ также не подходит, т.к. будет ~~минимум~~ минимум 4 точки пересечения, по 2 на сторонах AC и BD

④ - имеет точку пересечения ~~(-16; 0)~~ также $(0; 0)$
 $\Rightarrow$ подходит $a \leq R_4 = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \Rightarrow a \leq 17^2 \quad a = 17^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a > R^2$ окружности не будут иметь пересечений с квадратом ABCD.

$$\Rightarrow a \leq R^2$$

$\Rightarrow$ всего 2 таких значения a , где у окружностей / окружности будет 2 точки пересечения.

$$a = 49 ; a = 289$$

Ответ: $a = 49 ; a = 289$

✓ 1

Факторизуем число 64827:

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Всего 6 цифр 7 простых множителей $\Rightarrow$ можно быть всего 2 варианта цифр искомого числа.

$$1) 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

$$2) 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1$$

Каждый множитель ~~должен~~ должен быть меньше 10 // $\Rightarrow$ мы не можем отделить никакие множители кроме 2х 3х.

$$1) \text{ из цифр } 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1 \text{ можно составить } 8! / (4! \cdot 3! \cdot 1!) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 8$$

$$2) \text{ из цифр } 7, 7, 7, 7, 3, 9, 1, 1 \text{ можно составить: } \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$\text{Всего: } 5 \cdot 7 (8 + 24) = 35 \cdot 32 = 1120$$

Ответ: 1120

$$\sqrt[3]{1 - \frac{x^7}{y}} \ln(-y) = x \quad 2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 7xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad |2|$$

$$12) \quad y^2 + 7xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$3x^2 - 7x(y+6) - y^2 - 4y = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 12y + 36 + 3y^2 + 12y =$$

$$= 4y^2 + 24y + 36 = 4(y^2 + 6y + 9) = 4(y+3)^2$$

$$x = \frac{y+6 \pm |2y+6|}{3}$$

Так как при модуле
стоит $\pm$ мы можем
раскрыть его
и всегда будут 2 корня
на всей области

$$\begin{cases} x = y+4 \\ x = -\frac{y}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ y = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{1 - \frac{x^7}{y}} \ln(-y) = x & 2 \ln(xy^2) \\ y = x-y & (3) \\ \sqrt[3]{1 - \frac{x^7}{y}} \ln(-y) = x & 2 \ln(xy^2) \\ y = -3x & (2) \end{cases}$$

$$12) \quad \sqrt[3]{1 - \frac{x^7}{-3x}} \ln(3x) = x \quad 2 \ln(9x^3)$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x \quad 4 \ln(3x)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln(3x)} = x$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x \quad 2 \ln 9 + 6 \ln(x)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln(3x)} = x \quad 2 \ln 9 + 6 \ln(x) - 6 \ln(3) - 6 \ln(x)$$

$x=0$ - не корень, так
 $\ln(0)$ не определен.

$x=0$ - не корень,
 $\ln(0)$ не определен