

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

все цифры < 10 и равны $3^a \cdot 5^b$
где a и $b \in [0; 3]$.

→ число состоит из цифр: $3^0 \cdot 5^0 = 1$

$3^1 \cdot 5^0 = 3$, $3^0 \cdot 5^1 = 5$, $3^2 \cdot 5^0 = 9$, остальные
кр-я > 10 ($3^1 \cdot 5^1 = 15$, $3^3 = 27$), другие
больше $3 \cdot 5$.

1) Если в числе есть 9:

он состоит из:

1-9	1-9
1-3	1-3
3-5	3-5
(8-3-1-1)-1	4-1

таких чисел:

$$N_1 = \frac{8!}{4 \cdot 3}$$

, т.к. варианты где 1 и 5 идут
крас. между собой нужно
убрать

2) Если в числе нет 9:

состоит из:

3-3
3-5
2-1

$$N_2 = \frac{8!}{3 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$N = N_1 + N_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} \right)$$

$$N - \text{кол-во таких 8-знач. чисел} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{8} = 100 \cdot 78 = 7800$$

≈ 5600

Ответ: 5600 чисел.

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} + 2 \cos \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{3x-11x}{2} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (1) \\ \sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$(1): \sin 7x = -\cos 7x$$

$\cos 7x = 0$ — не решается, т.к. при мал $\cos 7x$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 7x = 1 \\ \sin 7x = -1 \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2): \sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x = 0$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x = -\sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x = \sin \left(-7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$4x = -7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi l$$

$$4x = \pi + 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$11x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l$$

$$3x = -\frac{5\pi}{4} - 2\pi n$$

$$l, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}$$

$$x = -\frac{5\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}; -\frac{5\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7},$$

где $k, l, n \in \mathbb{Z}$ — целые числа.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

ОДЗ: $x > 0$
 $xy > 0 \Rightarrow x > 0$
 $\frac{y^5}{x} > 0 \Rightarrow y > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$(2): x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4$$

$$= (2y - 2)^2$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = 2y - 2$$

$$x = y + 2 \pm 2y - 2$$

$$x = 3y$$

$$x = y + 2 + 2y - 2$$

$$x = 4 - y$$

$$(1): \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$1) x = 3y$$

$$y^{5 \lg(3y)} = y^{2 \lg 3y^2} \cdot (3y)^{\lg 3y}$$

$$y^{5 \lg(3y)} = y^{2 \lg 3y^2 + \lg 3y + \lg 3y} \cdot y^{2 \lg 3y^2} \cdot (y^{\lg 3y + 1})^{\lg 3y}$$

$$y^{5 \lg(3y)} = y^{2 \lg 3y^2 + \lg 3y (\lg 3(y+1))}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5 \lg(3y) = 2 \lg(3y^2) + \lg(3y) \cdot \lg_3 y + \lg(3y)$$

$$5 \lg(3y) = 2 \lg 3 + 2 \lg y^2 + \lg 3y (\lg_3 y + 1)$$

$$\lg 3y (\lg_3 3y) = 5 \lg 3y - 2 \lg 3 - 2 \lg y^2$$

$$\lg 3y (\lg_3 3y) = \lg 3y + 4(\lg 3y - \lg y) - 2 \lg 3$$

$$\cancel{\lg 3y} \approx \lg \quad \lg 3y (\lg_3 3y) - \lg 3y = 4 \lg 3 - 2 \lg 3$$

$$\lg 3y (\lg_3 y + 1 - 1) = 2 \lg 3$$

$$\lg 3y \cdot \lg_3 y = 2 \lg 3$$

$$\frac{\lg 3y \cdot \lg y}{\lg 3} = 2 \lg 3$$

$$\lg 4y = \lg 9 \cdot \lg 3$$

$$\lg 4y = \lg 12$$

$$4y = 12$$

$$y = 3 \rightarrow x = 9$$

$$2) x = 4 - y$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{5\lg(4-y) - 2\lg(4-y) \cdot y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{5\lg(4-y) - 2\lg(4-y) - 2\lg y} = y^{\lg_y(4-y) \cdot \lg(4-y)}$$

$$3\lg(4-y) - 2\lg y = \lg_y(4-y) \cdot \lg(4-y) \quad | : \lg(4-y)$$

$$\lg(4-y)$$

$y=3$ — не решение,
т.к. $-2\lg 3 \neq 0$

$$3 - 2\log_{4-y} y = \log_y 4-y$$

$$3 = \frac{1}{\log_{4-y} y} + 2\log_{4-y} y$$

$$\text{З.П. } \log_{4-y} y = t, \quad t \neq 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{D} = 1$$

$$\left[t = \frac{3+1}{2} \right]$$

$$\left[t = 2 \right]$$

$$\left[t = \frac{3-1}{2} \right]$$

$$\left[t = 1 \right]$$

$$1) \log_{4-y} y = 1$$

$$y = 4-y \rightarrow y = 2$$

$$x = 2$$

$$2) \log_{4-y} y = 2$$

$$y = 16 - 8y + y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 - 9y + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{17}$$

$$x = 4 - \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 4 - \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} < 0$$

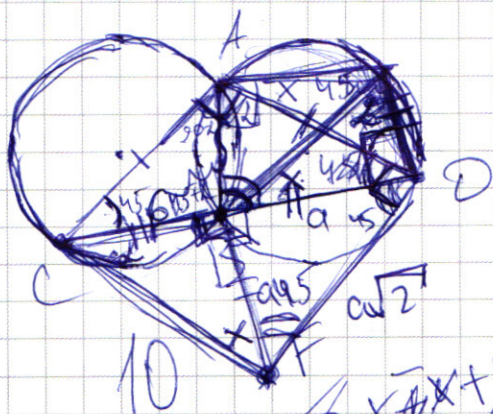
$$y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 3); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right).$$



$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2}$$

$$= \sqrt{BD^2 + CB^2} \quad y < x+3$$

$$y > x+3$$

$$y = 3 - x + y = 6$$

$$x = -3$$

$$a\sqrt{2} = 10$$

$$a = 5\sqrt{2}$$



$$\cos x = \frac{3}{5}$$

$$\sin x = \frac{4}{5}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$- \sin x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} (\cos x - \sin x)$$

$$y = \frac{x+3}{3} \quad y > x+3$$

$$y = 3 - x \quad y > x-3$$

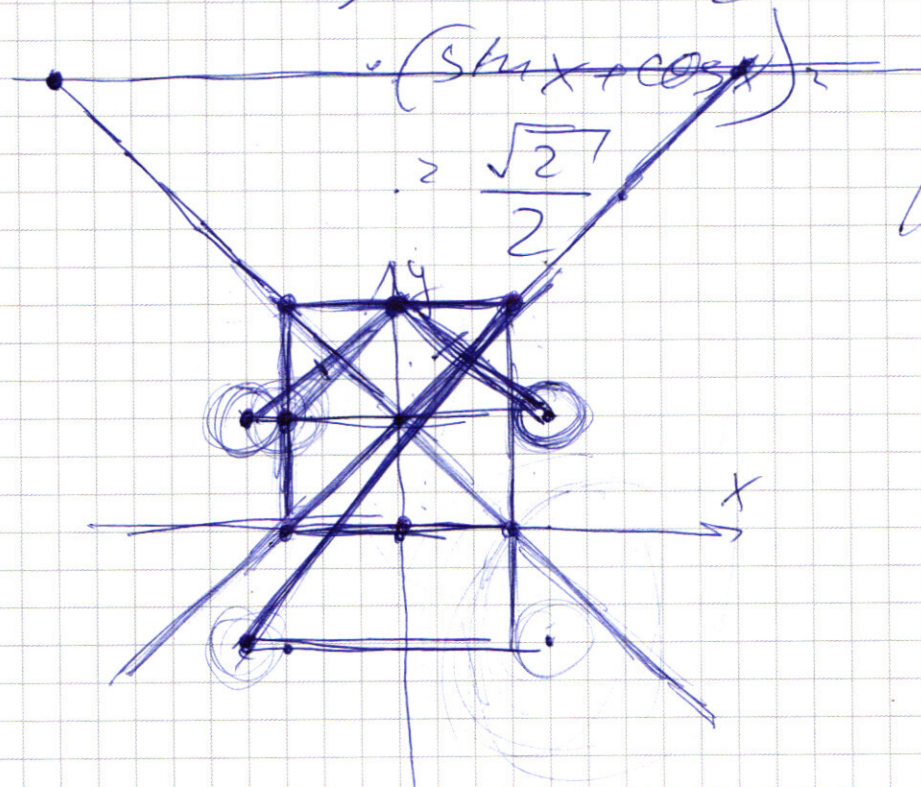
$$y > x+3 \quad 2y = 12$$

$$y = 3 - x + y = 3 + x$$

$$y = 12$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$y = 6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано:

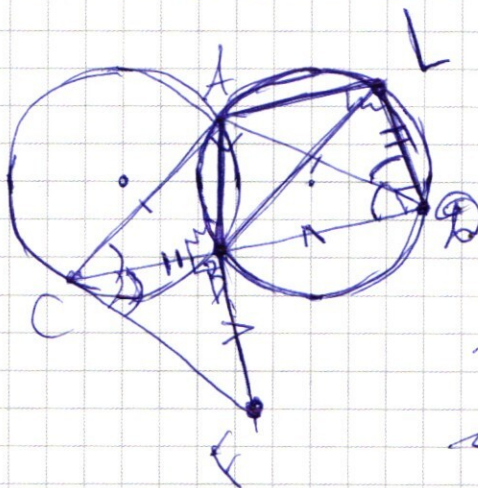
$$R_1 = R_2 = 5$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF \perp CD$$

$$BF = BD, BC = 6$$

$$CF, S_{\triangle CFB} = ?$$



Проведем:

$$DL \perp CD$$

$$\angle ADL = 45^\circ$$

$$\angle ADB = 45^\circ$$

$\angle ADB = \angle ACB$, так как

опираются на хорду AB, вписаны в окружности одинаковых радиусов и оба острые. $\rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACB \rightarrow AC = AD$

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ, \text{ т.к. } \angle CAD = 90^\circ.$$

$$\rightarrow \angle ADL = 90^\circ - \angle ADC = 45^\circ \rightarrow \angle ADC = \angle ACD$$

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle CBA, \text{ т.к. } B \in CD$$

$$\square ABDL \text{ впис. в окр.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle ABD + \angle ALD = 180^\circ$$

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle ALD \rightarrow \angle ALD = \angle CBA$$

Рассмотрим $\triangle ALD$ и $\triangle ABC$:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADL = \angle ACB \\ \angle ABC = \angle ALD \end{array} \right\} \rightarrow \angle DAL = \angle BAC$$
$$AD = AC$$

$\rightarrow \triangle ALD = \triangle ABC$ по стороне и 2-м прил. к ней углам. $\rightarrow BC = DL$

Рассмотрим прямоугольные $\triangle CBF$ и $\triangle LDB$:

$$\left. \begin{array}{l} DL = BC \\ BF = DB \end{array} \right\} \rightarrow \triangle CBF = \triangle LDB \rightarrow$$

$$\rightarrow CF = BL$$

$$\angle BDL \text{ впис. в окр. и } = 90^\circ \rightarrow$$

$\rightarrow$ он опирается на диаметр $\rightarrow$

$$\rightarrow BL = 2R = 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow CF = 10$$

$$BC = 6 \quad CF = 10$$

По т. Пифагора в $\triangle CBF$:

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle ACF = \angle ACD + \angle FCB = 45^\circ + \angle BCF.$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF)}{2}$$

$$AC = AD$$

$$DB = BF = 8 \rightarrow CD = BD + CB = 6 + 8 = 14$$

По Пифагору в $\triangle ACD$:

$$AC^2 + AD^2 = CD^2$$

$$2AC^2 = 14^2$$

$$AC = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 10 \sin \angle ACF}{2} = 35\sqrt{2} \sin \angle ACF$$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \cdot \sin \angle BCF$$

$$\sin \angle BCF = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \angle BCF + \sin \angle BCF)$$

$$\cos \angle BCF = \frac{CB}{CF} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \angle ACF = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{5 \cdot 2}$$

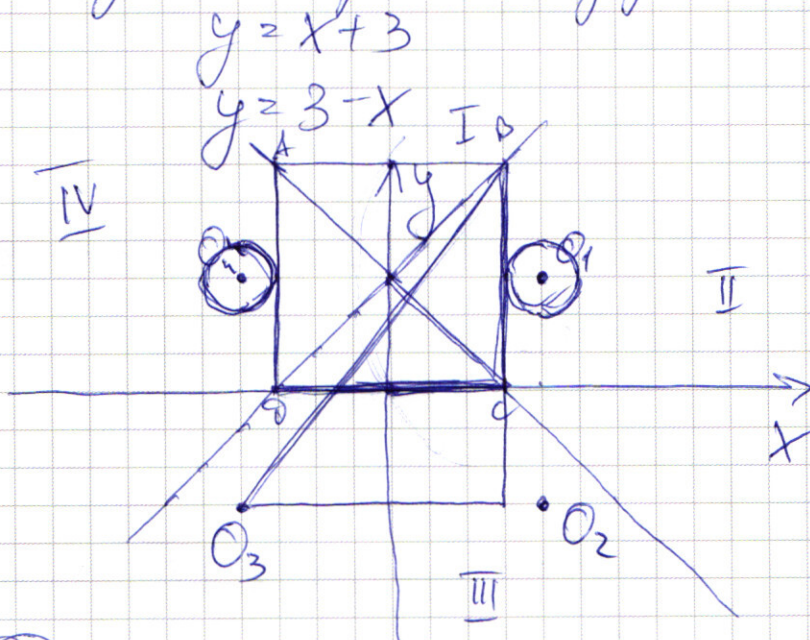
$$S_{ACF} = \frac{35\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 7}{5 \cdot 2} = 49$$

Ответ: а) 10; б) 49.

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Построим график (1):
нужны для модулей будут:



Эти прямые
дают плоскость
на 4 части:

Ⓘ $y \geq x+3$
 $y \geq 3-x$

(1) имеет вид:

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y=12 \rightarrow y=6$$

Ⓜ $y \geq 3-x$
 $y < x+3$

(1): $x+3-y+y-3+x=6$

$$2x=6$$

$$x=3$$

Ⓝ $y < 3-x$
 $y < x+3$

(1): $x+3-y-y+3-x=6$
 $y=0$

Ⓚ $y \geq 3+x$
 $y < 3-x$

(1): $y-3-x-y+3-x=6$
 $-2x=6 \rightarrow x=-3$

Таким образом это
Квадрат со стороной 6.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Графикам (2) являются 4 окружности
с центрами: $O_1(4; 3)$; $O_2(4; -3)$;
 $O_3(-4; -3)$; $O_4(-4; 3)$
и радиусом $\sqrt{a}$

Система имеет ровно 2 решения
в 2-х случаях:

1) Окружности 1 и 4 касаются
сторон квадрата.

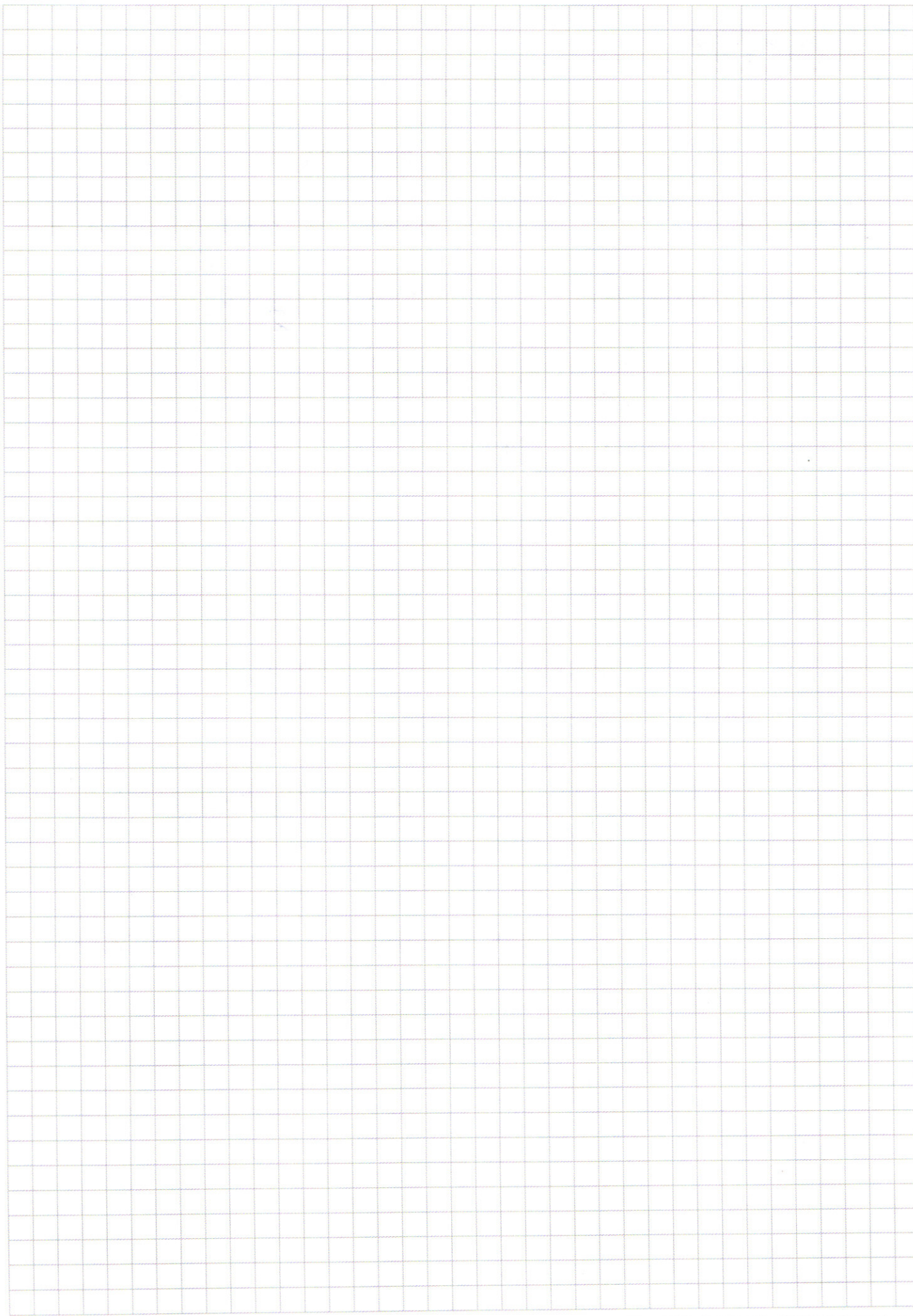
2) Окружности 2 и 3 проходят
через A и B соответственно,
т.к. в этом случае окр 1 и 4
уже не будут пересекать стороны
квадрата.

$R_1 = 4 - 3 = 1$, в этом случае $a = 1$.

$$R_2 = \sqrt{(6+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$$

$$a = R_2^2 = 130$$

Ответ. при $a = 1$ и $a = 130$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including geometric diagrams and algebraic calculations.

Geometric Diagrams:

- Top left: A sphere with points A, B, C, D, E, F and various lines and angles.
- Top center: A triangle with points S, C, and a line segment labeled $R_1 = R_2 = 5$.
- Top right: A sphere with points A, B, C, D and a line segment labeled d .
- Bottom left: A coordinate system with points A, B, C, D and a line segment labeled x .

Algebraic Calculations:

Equation 1:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 2:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 3:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 4:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 5:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 6:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 7:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 8:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 9:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 10:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 11:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 12:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 13:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 14:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 15:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 16:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 17:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 18:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 19:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 20:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 21:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 22:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 23:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 24:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 25:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 26:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 27:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 28:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 29:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 30:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 31:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 32:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 33:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 34:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 35:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 36:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 37:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 38:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 39:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 40:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 41:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 42:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 43:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 44:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 45:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 46:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 47:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 48:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 49:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 50:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 51:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 52:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 53:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 54:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 55:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 56:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 57:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 58:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 59:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 60:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 61:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 62:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 63:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 64:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 65:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 66:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 67:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 68:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 69:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 70:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 71:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 72:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 73:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 74:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 75:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 76:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 77:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 78:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 79:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 80:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 81:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 82:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 83:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 84:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 85:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 86:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 87:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 88:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 89:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 90:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 91:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 92:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 93:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 94:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 95:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 96:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 97:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 98:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 99:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

Equation 100:
$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x$$

$$1) x = 3y$$

$$x = y = 0$$

$$y^{2 \lg y} (3y)^{\lg 3y} = y^{3 \lg 3y}$$

$$3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y} = y^{3 \lg 3y}$$

$$3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3} = y^{2 \lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$y^{2 \lg 3} = y^{\lg 3y \cdot \lg 3y}$$

$$2 \lg 3 = \lg 3y \cdot \lg 3y$$

$$\lg 3y = \frac{\lg 9}{\lg 3y} = \lg 3y \cdot \lg 9$$

$$\lg 3y \cdot \lg 3y = 2$$

$$\lg 3y = 2$$

$$4y = 9 \quad y = \frac{9}{4}$$

$$2) x = 4 - y$$

$$y^{2 \lg y} = \frac{y^{3 \lg (4-y)}}{(4-y)^{\lg (4-y)}} = \frac{y^{3 \lg 4} \cdot (4-y)^{\lg 4}}{y^{3 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg y}}$$

$$y^{5 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg 4} = y^{3 \lg 4} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$y^{5 \lg y - 3 \lg 4} = (4-y)^{\lg (4-y)}$$

$$\frac{12}{10} \cdot \frac{10}{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and notes on graph paper:

Left side (vertical list):

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

Top middle (crossed out):

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 28 \\ \hline 1000 \\ 2500 \\ \hline 3500 \end{array}$$

Top right (crossed out):

$$3.5^3$$

Right side (vertical list):

$$\begin{array}{r} 3, 5, 1 \\ 3-5 \\ 1-9 \\ 1-3 \\ 3-1 \end{array}$$

Bottom left (vertical list):

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 24 \\ \hline 224 \\ 112 \\ \hline 1344 \end{array}$$

Bottom middle (crossed out):

$$H=82, H=6, H=4$$

Bottom right (vertical list):

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 16 \\ \hline 336 \\ 896 \\ \hline 896 \end{array}$$

Bottom center (equation):

$$H_1 = \frac{8!}{3 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3} = 16 \cdot 7 \cdot 8 = 896$$

Bottom left (equation):

$$H_2 = \frac{8!}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{H_1}{2} = 8 \cdot 56 = 448$$

Bottom right (equation):

$$H = 56(16+8) = 56 \cdot 24 = 1344$$

$$(2): x^2 = 2xy + 4y^2$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\left[\begin{aligned} x &= y+2+2y-2 \\ \frac{x^2}{4} &= y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} x &= y+2-2y+2 \\ x^2 &= 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} x &= 3y \\ x &= 4-y \end{aligned} \right.$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} x &= 3y \\ x &= 4-y \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$1) x = 3y$$

$$y \lg y \left(y \lg 3 \right)^{\frac{y}{3y}} = y \lg y \cdot y^{\frac{1}{3}} \lg 3y = y^{\frac{4}{3}} \lg 3y = \left(y \lg y \lg 3 \right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \cos \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2}$$

$$\sin \frac{L+B}{2} \neq$$

$$\sin L + \sin B = 2 \sin \frac{L+B}{2} \cos \frac{L-B}{2}$$

$$\sin L \cos B + \sin B \cos L$$

$$\cos x + \cos y = \cos(L+B) + \cos(L-B)$$

$$\begin{cases} L = \frac{x+y}{2} \\ B = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$L+B = x$$

$$L-B = y \quad a^{\log_a 36} = 36 = a^{\log_a 36} = a^{\log_{ab} 36}$$

$$\rightarrow \cos L \cos B - \sin L \sin B = \cos(L+B) = \cos x$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cos 4x$$

$$\sin x - \sin y = \sin L \cos B + \sin B \cos L -$$

$$- \sin L \cos B + \sin B \cos L \rightarrow 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin 7x - \sin 11x = 2 \sin 7x \cos 4x$$

$$2(\sin 7x \cos 4x - \sin 11x \cos 4x) = 2 \sin 7x (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \sin$$

$$\cos x - \cos y = \cos L + \beta - \cos L - \beta = \cos L \cdot \cos \beta - \sin L \sin \beta - \cos L \cos \beta + \sin L \sin \beta = -2 \sin L \sin \beta$$

$$\begin{cases} L = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = L + \beta \\ y = L - \beta \end{cases}$$

$$= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = \sin L + \beta - \sin L - \beta = \sin L \cos \beta + \cos L \sin \beta - \sin L \cos \beta + \cos L \sin \beta = 2 \cos L \sin \beta = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 7x \sin 4x + 2 \cos 7x \sin 4x$$

$$= 2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x) \right) = 0$$

$$\cos 7x = -\sin 7x$$

$$\tan 7x = -1 \quad \Rightarrow \quad 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x = 0$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0 \quad x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$



$$4x = -\frac{\pi}{4} + 7x + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$$

$$4x = \frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi n$$

$$11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi l}{7}$$

$$k, l, n \in \mathbb{Z}$$



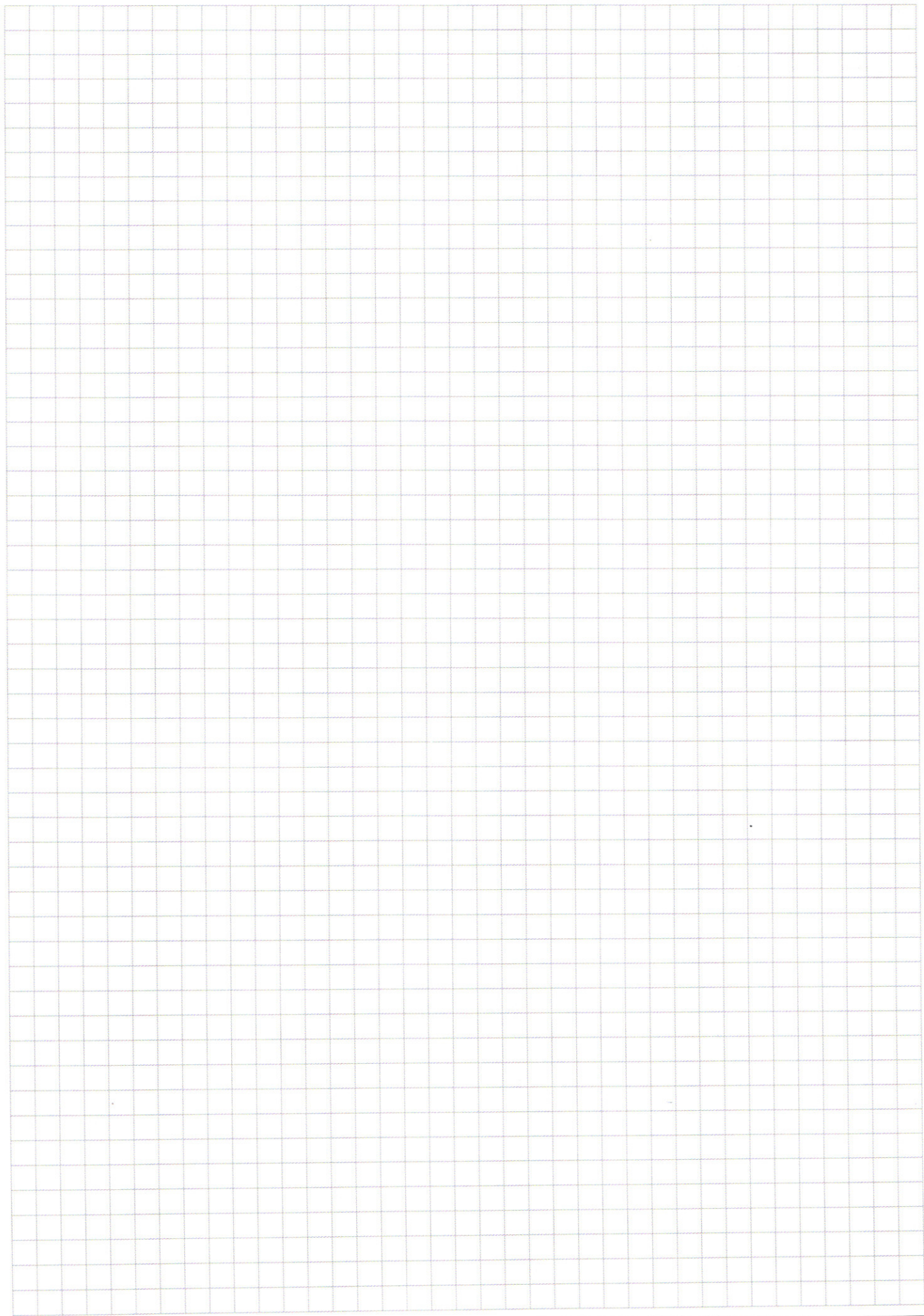
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)