

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-4 \ln x = \log_2 x \cdot \ln 2^4 - 5 \ln 2$$

$$= \frac{\ln x}{\ln 2} \cdot \ln 2$$

$$y \ln x = \ln x - 5 \ln 2$$

$$-\ln 2 = -\ln 2$$

$$\ln x > \ln 2$$

$$x = 2$$

$$(2^2 \cdot 2^8)^{-\ln 2} = 2$$

$$2 - 10 \ln^2$$

$$= 2$$

$$\text{Zu } y = 4 - x$$

$$(4-x)^2 - x(4-x) - 2x^2 + 8x - 4(4x) = \cancel{16} - \cancel{8x} + \cancel{x^2} - 4x + \cancel{x^2} - \cancel{2x^2} + \cancel{8x} - \cancel{16} + 4x$$

$$16 - \cancel{8x} + \cancel{x^2} - \cancel{4x} + \cancel{x^2} - 2x^2 + \cancel{8x} - \cancel{16} + \cancel{4x} = -2x^2 + 4x$$

$$(x^2(4-x)^4)^{\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)} = \ln(4-x) - 2\ln x$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot (4-x)^{-4 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{-7 \ln x} \Big|_{\log_4 x}$$

$$\log_{4-x} 2 \cdot (-2 \ln 2) \cdot (-4 \cancel{\ln x}) = \ln(4-x) \cdot (-7 \cancel{\ln x})$$

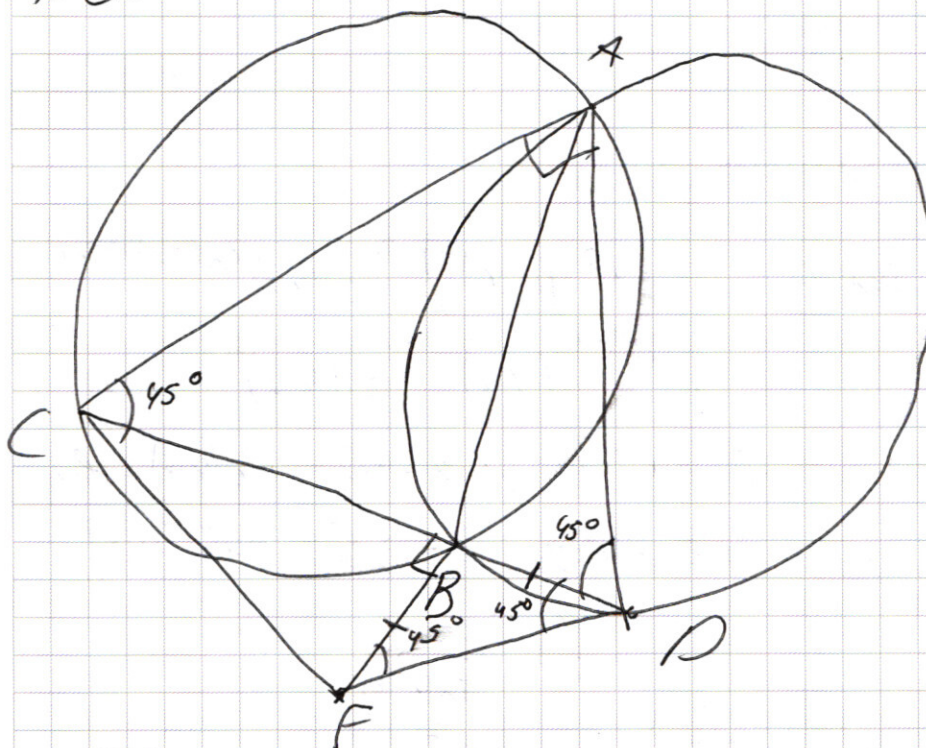
2. ~~27~~ 6.5.4.3.2

3. 2.32.2

$$= 30.8 = 100.7$$

$\ln x = 0$
 $x = 1$
 $y = 3$

№ 6.



Дано: $\angle CAD = 90^\circ$

$BD = BF$;

$R = 10$

$BF \perp CD$.

$CF = ?$

По Теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACD} = \frac{AB}{\sin \angle ADC} = 2R \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ;$$

$$\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ.$$

$$AB = 2R \cdot \sin \angle ACD = \sqrt{2} \cdot 10.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (2)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 0x - 4y = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y - 2x)^2 + 3x(y - 2x) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}; \text{ подставим в (2) };$$

$$1) \quad y = 2x: \quad \int (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$x^{-6\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6\ln x}$$

$$x^{-6\ln x} \cdot 2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{-\ln 2} \cdot x^{6\ln x} \cdot 2^{-6\ln x} \quad | : x^{-6\ln x}$$

$$2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot 2^{-6\ln x} \cdot x^{-\ln 2}$$

Логарифмируем по основанию 2:

$$-4\ln x = \ln 2 - 6\ln x - \ln 2 \cdot \log_2 x;$$

$$2\ln x = \ln 2 - \ln 2 \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\ln x = \ln 2;$$

$$\boxed{x = 2; \quad y = 4}$$

$$2) y = x^2 \cdot (4-x)^4 \cdot \ln x \quad \ln(4-x) = 7 \ln x$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot (4-x)^{-4 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{-7 \ln x}$$

Трансформируем по основанию $(4-x)$:

$$\rightarrow 2 \ln x \cdot \log_{4-x} x - 4 \ln x = \ln(4-x) - 7 \ln x;$$

$$-2 \ln x \cdot \frac{\ln x}{\ln(4-x)} = \ln(4-x) - 3 \ln x \quad | \cdot \ln(4-x); \ln(4-x) \neq 0, \text{ т.к. } x < 4.$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2(4-x) - 3 \ln x \cdot \ln(4-x)$$

$$\ln^2(4-x) - 3 \ln x \cdot \ln(4-x) + 2 \ln^2 x = 0$$

Решая как квадратное, относительно $\ln(4-x)$,

имеем:

$$\ln(4-x) = \frac{3 \ln x \pm \ln x}{2} \quad D = \ln^2 x$$

$$\begin{cases} \ln(4-x) = 2 \ln x, \\ \ln(4-x) = \frac{2 \ln x}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4-x = x^2, \\ 4-x = x; \end{cases} \quad | \text{ } x > 0, \quad 4-x > 0$$

$$x = 2$$

$$16 - 8x + x^2 = x; \quad x^2 + x - 4 = 0 \quad (3)$$

$$(3) D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \quad \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не угод.}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2};$$

$$\begin{cases} x = 2, & y = 2^2 \cdot \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, & y = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 4); (2; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \quad | : 2$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & | : \cos 2x; \cos 2x \neq 0 \\ \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan 2x = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right); \text{ синусы равны, если } \begin{matrix} 1) \text{ углы равны} \\ 2) \text{ сумма } = \pi \end{matrix} \text{ но все с периодом } 2\pi \text{ до периода.}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & | : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} + 2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & | : 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y - 2x)^2 - 3x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$(2x - y)(y - 2x - 3x + 4) = 0$$

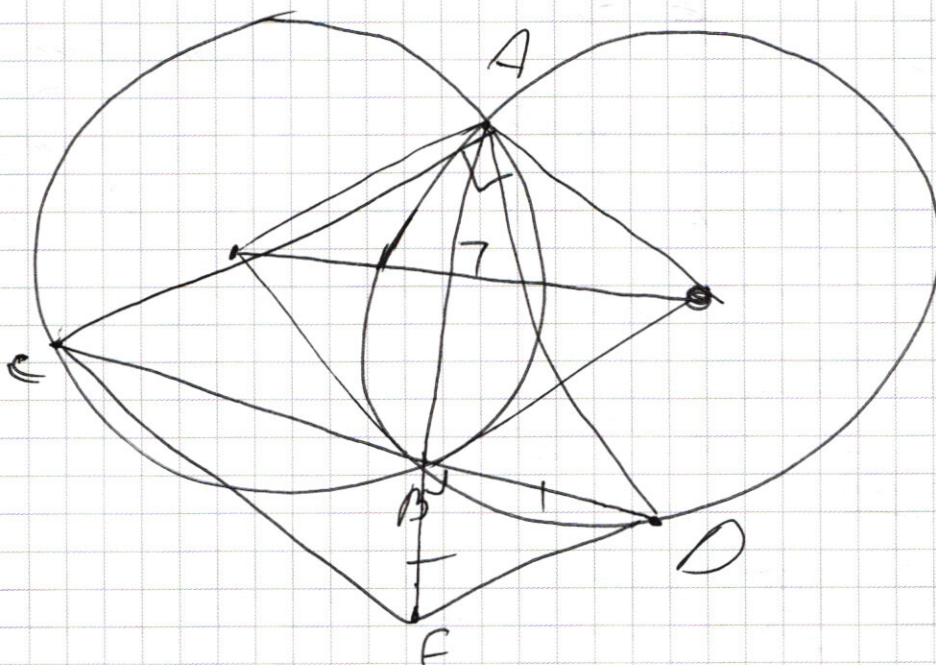
$$\begin{aligned} y &= 2x \\ y - x + 4 &= 0 \\ y &= 4 - x \end{aligned}$$

$$x \in [0; 4]$$

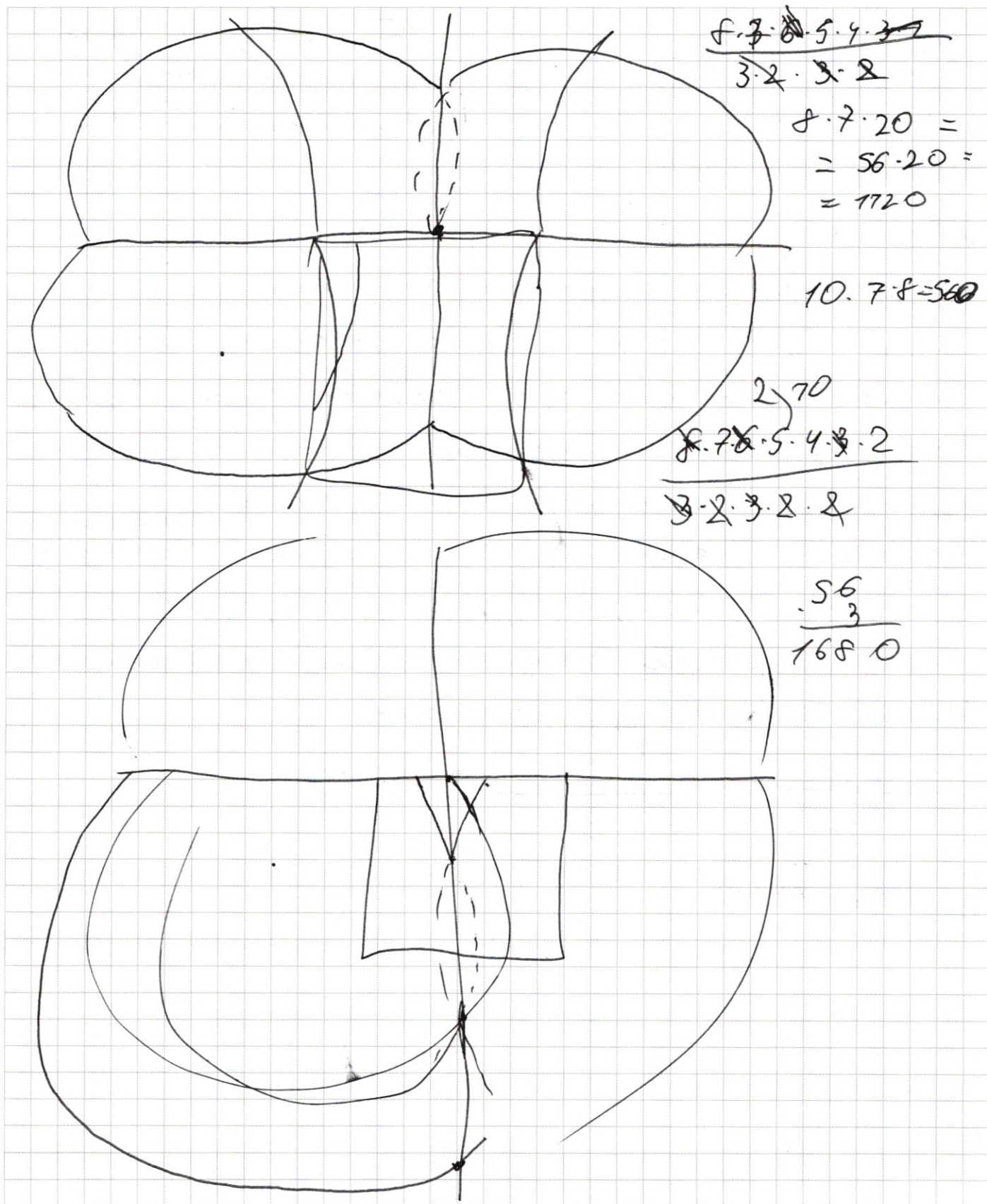
$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2x}{x^6} \right)}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6} \right)}$$

$$(2^4 \cdot x^4)^{-\ln x} \cdot (x^2)^{-\ln x} = (2x)^{-\ln x} \cdot x^{-\ln x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Handwritten calculations and notes:

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \end{array}$$

$$8 \cdot 7 \cdot 20 =$$

$$= 56 \cdot 20 =$$

$$= 1120$$

10. 7. 8 = 560

2. 70

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ \hline 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

пересекать квадрат в одной точке на радиусе.
 (точки $(0,0)$ и $(0,-10)$). Тогда при $r > 13$ ↑
 таких точек не будет.

Имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 7; \\ \sqrt{a} = 13; \end{cases} \begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$$

Т.е. каждая пара
 перескает квадрат
 в одной точке

Ответ: 49; 169.

11.

Разложение на простые множители

$3261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. Число должно быть
 восьмизначным, а чтобы произведение
 оставалось неизменным две или три
 цифры должны быть равны цифре
 Имеем следующие наборы цифр:

3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1 и 9; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1.

Посчитаем возможные числа перестанов-
 ками с повторениями:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1680$$

Ответ: 1680

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, & (1) \\ (|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a, & (2) \end{cases}$$

Решим графически:

(1) — ломаная, рассмотрим интервалы раскрытия модулей:

1) $y \geq -x-5; y \geq x-5:$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2y = 0$$

$$y = 0;$$

2) $y < -x-5; y \geq x-5:$

$$-x-y-5 + y-x+5 = 10;$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

3) $y \geq -x-5; y < x-5:$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$2x = 10$$

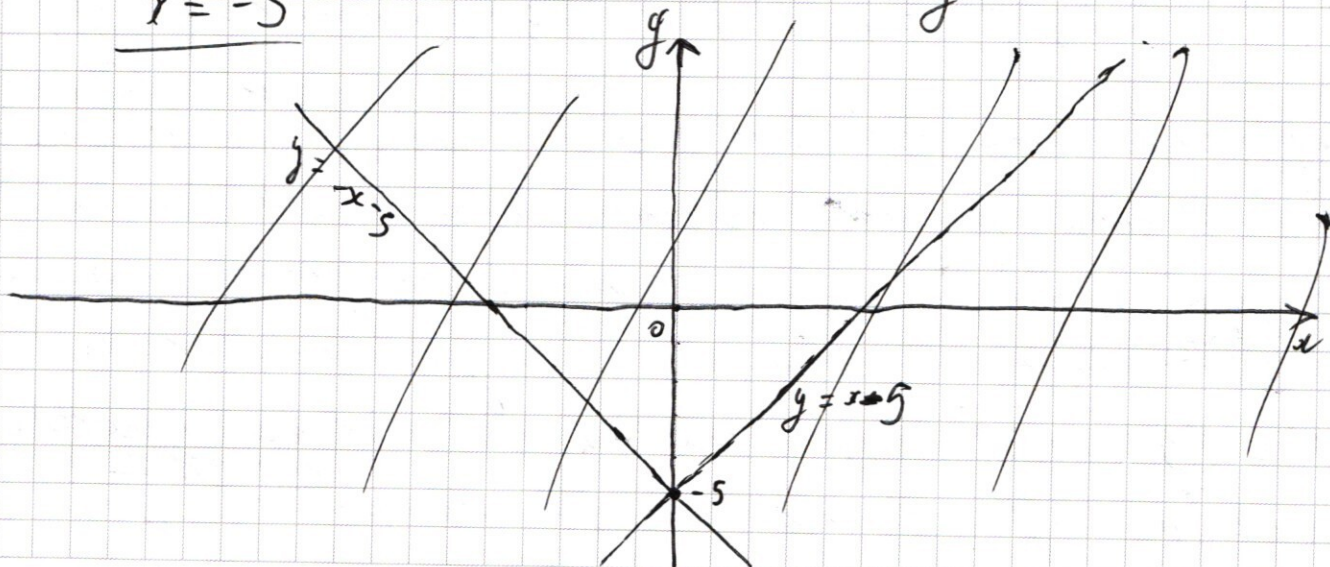
$$x = 5$$

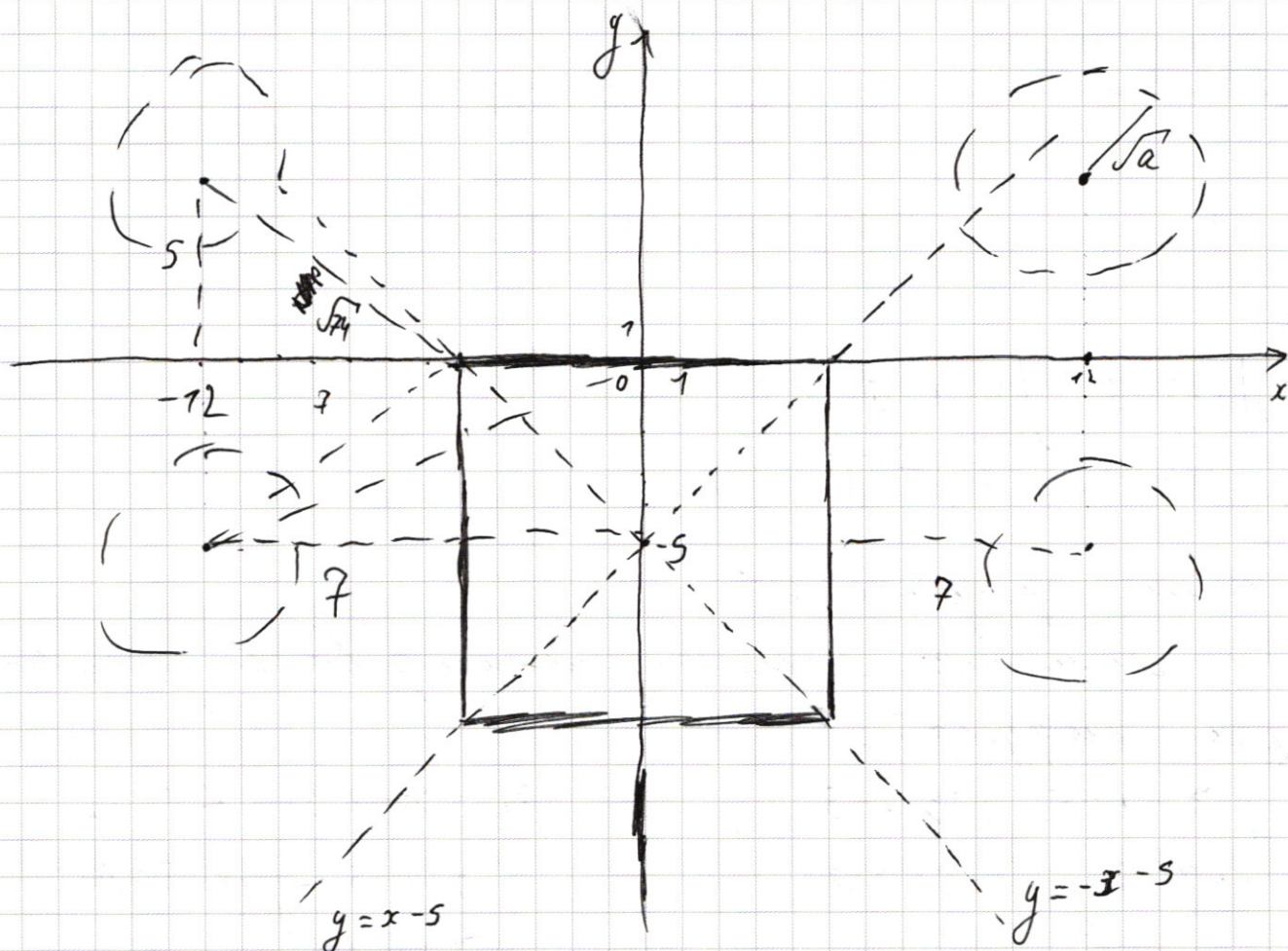
4) $y < -x-5; y < x-5:$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$





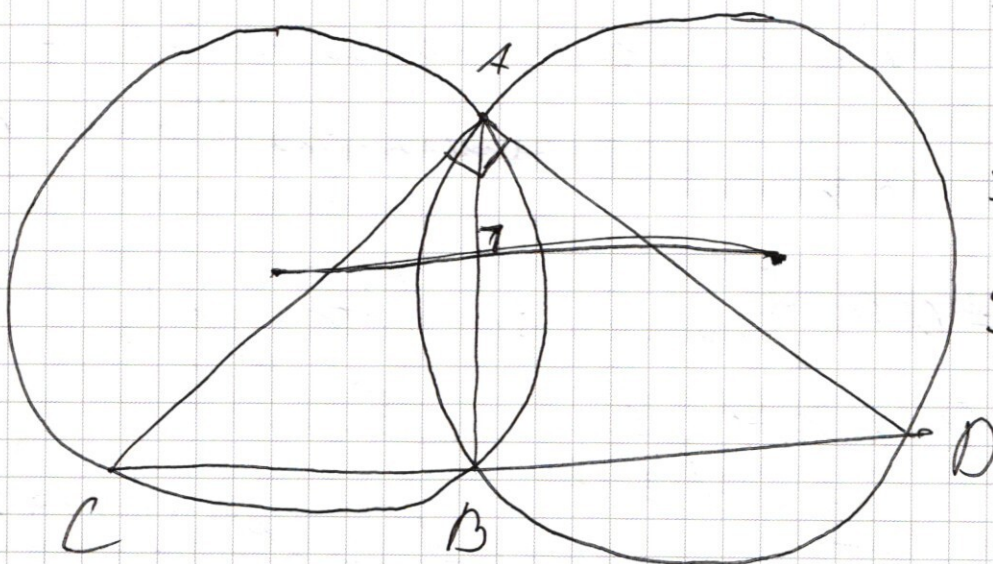
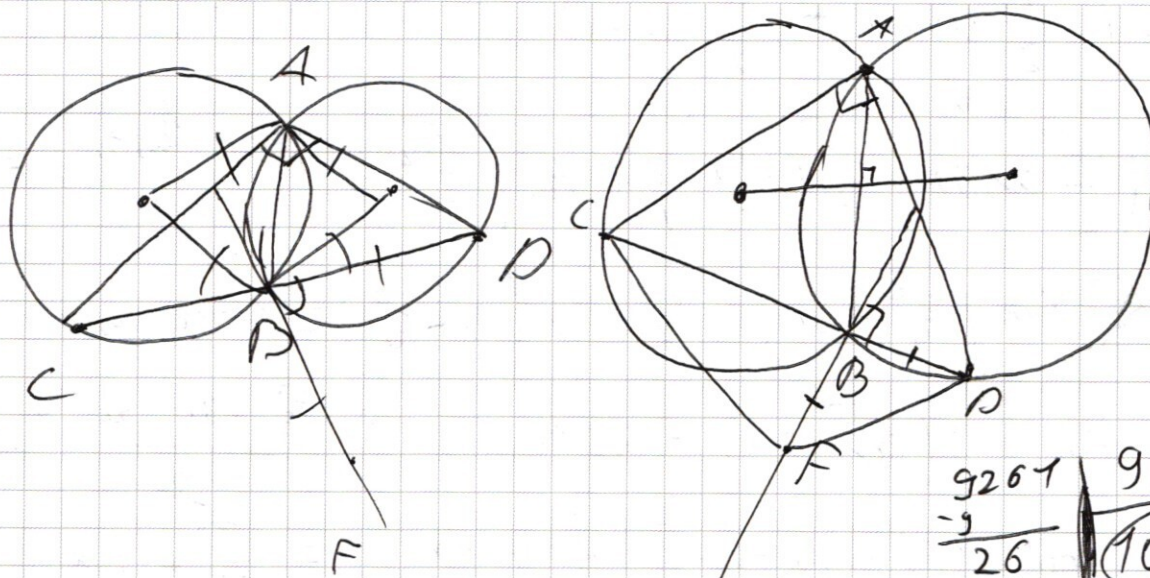
Заметим, что выражение (2) на графике симметрично, относительно $x=0$; $y=0$. Построим его в I четверти и отразим относительно этих прямых:

$$x > 0; y > 0:$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{149})^2 - \text{окружность в } (12; 5),$$

сначала, (по мере увеличения радиуса) окружность пересекает в двух точках квадрат при $r = 7$. Затем, будет 4 точки пересечения; ~~по мере дальнейшего~~ $r = \sqrt{74}$ будет 6 точек. При дальнейшем $r = 13 = \sqrt{5^2 + 12^2}$ будет снова две точки пересечения, т.к. две верхние и две нижние ~~окружности~~ будут

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{-9} \\ 26 \\ \underline{-18} \\ 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ \underline{-9} \\ 1029 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 1029} \\ \underline{-9} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 3 \\ \text{"} \\ 9 \cdot 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \overline{) 11} \\ \underline{-23} \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{cases} y > 7 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{39} \\ y < 76 + 2(2^{39} - 1)x \end{cases} \quad 2^x + 3 \cdot 2^{39} < 76 + 2^{39} x - 2x$$

$$\begin{array}{r} 33377211 \\ \cdot 93777111 \\ \hline 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \underline{-27} \\ 42 \\ \underline{-42} \\ 447 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{-28} \\ 63 \\ \underline{-63} \\ 49 \\ \underline{-49} \\ 447 \\ \underline{-447} \\ 27 \\ \underline{-27} \\ 447 \\ \underline{-447} \\ 9261 \end{array}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 2x \right) =$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 9x \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x \quad 4x = 2$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 2x \right) = \cos 4x \quad = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + 9x - 5x + \frac{\sqrt{2}}{4}}{2} =$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2x - \sin \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2x \right) = \cos 4x \quad = \frac{\pi}{4} + 2x$$

$$\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$$

$$= (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 2x \right)$$

$$50 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} =$$

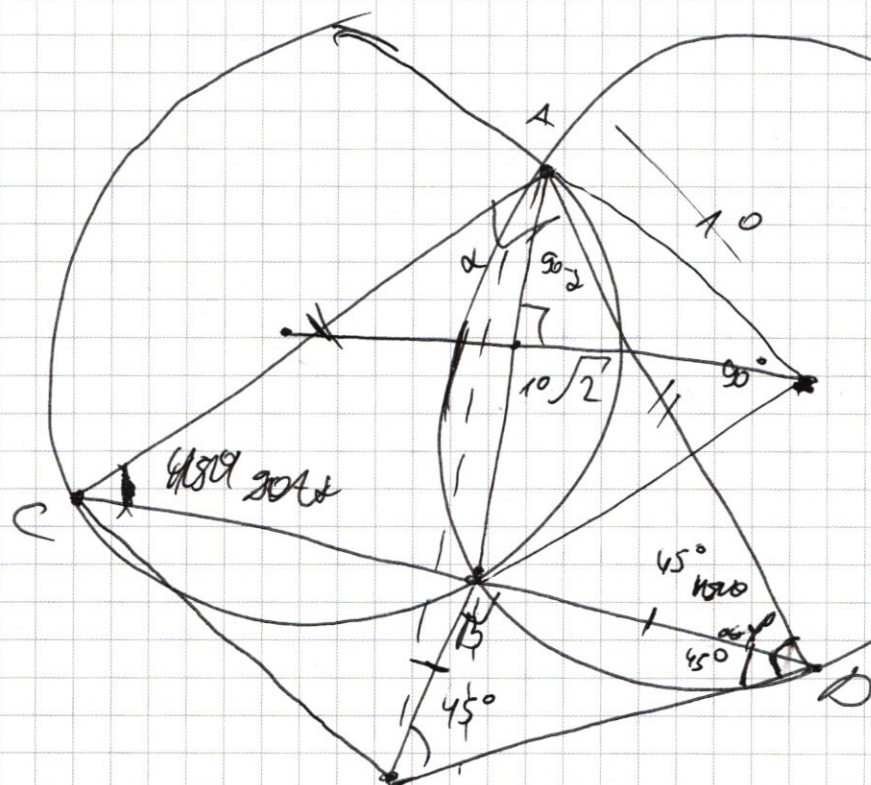
$$x = \frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{2\pi k}{5} \quad = \frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$9x = \frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\pi k \quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 1680$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{2\pi k}{9} \quad 7 \cdot 6 \cdot 4 = 24$$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} = 3\pi \quad \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$D = 9x^2 - 8x^2 = x^2$$

$$y = \frac{3x \pm x}{4} =$$

$$= x \text{ or } \frac{1}{2}x$$

$$x > 1$$

$$x < 3$$

$$x = 2$$

$$F(2, 2) = 2 \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$x > 1$$

$$4 - x > 1$$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$AB = 10\sqrt{2}$$

$$D = 416$$

$$\frac{2AB}{\sqrt{2}} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R = \frac{BD}{\cos \alpha}$$

$$-2 \ln x \cdot \frac{\ln x}{\ln(4-x)} = \ln(4-x) - 3 \ln x^3 = \ln \frac{4-x}{x^3}$$

$$\ln^2 x - 2 \ln^2 x = \ln^2(4-x) - 3 \ln x \cdot \ln 4-x$$

$$\ln^2(4-x) + 2 \ln^2 x - 3 \ln x \cdot \ln 4-x = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$(x^2 \cdot 16x^6)^{\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} = \ln 2 - 6 \ln x$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6 \ln x}} = (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2^{\ln x} \cdot x^{\ln x} \cdot 2^{-6 \ln x} \cdot x^{-6 \ln x}$$

$$16^{-\ln x} = 2^{\ln x} \cdot 2^{-6 \ln x}$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\ln x}$$

$$2^{\ln x} = x^{\ln x}$$

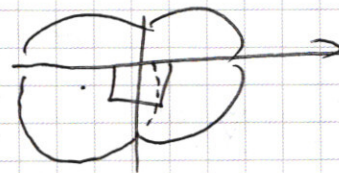
$$\left(\frac{1}{32}\right)^{\ln x} = 2^{-5 \ln x}$$

$$2^{\ln x} - 2^{\ln x} = 0$$

$$\ln x (x-x) = 0$$

$$\begin{cases} 2 = x \\ \ln x = 0 \end{cases} \quad (x = 1)$$

$$\begin{matrix} y = 4 \\ y = 2 \end{matrix} \quad \begin{cases} \ln 2 \\ x \end{cases} = x^{\log_x 2 \cdot \log_x 2}$$



$$\begin{cases} y = 4-x \\ x^2 (y-x)^6 \end{cases}$$

$$x \cdot 16^{-\ln x} \cdot x^{6 \ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x}$$

$$= 2^{\ln 2} \cdot 2^{\ln 2 - 6 \ln x} \cdot x^{\ln 2}$$

$$2^{-4 \ln x} = 2^{-5 \ln 2} \cdot x^{\ln 2} \quad | \log_2$$

$$-4 \ln x = -5 \ln 2 + \log_2 x \cdot \ln 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9267

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin \frac{9x-5x}{2} \sin \frac{9x+5x}{2} + 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 5x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 9x \right)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin \frac{\sqrt{2}}{4} \approx \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 9x \right) + \sin \left(5x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + 9x - 5x + \frac{\sqrt{2}}{4} = 4x + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 4x$$

$$\sin \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x = \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 9x \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - 9x + \frac{\pi}{2} + 5x =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 5x \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} - 9x - \frac{\pi}{2} - 5x =$$

$$= -14x$$

$$-2 \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 4x \right) \cdot \sin$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y - 2x$$

$$y = -5 - 2x$$

$$2x + y + 5 = 0$$

$$y - x + 5 = 0$$

$$y = x - 5$$

5, 4, 3, 2, 1

$$y^2 - 2xy + x^2 + 8x - 4y$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y - 2x)^2 + 3x(y - 2x) - 4(2xy) = 0$$

$$(y - 2x)(y - 2x + 3x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = \left(\frac{2x}{x^{16}}\right)^{\ln\left(\frac{2x}{x^{16}}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{2x}{x^{16}}\right) = \ln 2 - 15 \ln x$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^{15}}\right)}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} \cdot x^{-15 \ln x}$$

$$2^{-4 \ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = \frac{2^{\ln 2}}{x^{6 \ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2}}{x^{15 \ln x}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 15 \ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{15 \ln x}}$$

$$16x^6^{-\ln x} = \left(\frac{1}{16x^6}\right)^{\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$