МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

- Разложим 9261 на простые множители:

$9261 : 9 = 1029$, $1029 : 3 = 343$, $343 : 7 = 49$

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3.$$

- Заметим, что эти простые множители должны входить в любое произведение, составляющее 9261.
- В нашем случае – это произведение 8 цифр. Ед. цифра, кратная 7 – это 7. Тогда в произведение должны входить 3 семёрки.
- Чтобы число было кратно 27 должны либо входить 3 тройки, либо 3 и 9
- Остальные цифры д.б. единицами, иначе число будет делиться ещё на что-то.
- I случай: 3 тройки, 3 семёрки, и 2 единицы.

Кол-во способов: $\frac{8!}{3!\,3!\,2!}$;

(поскольку выбрать 8 мест – 8!, а одинаковые тройки/семёрки/ед-цы увеличивают число совп. вариантов в 3! / 3! / 2! раза)

- II случай: 3 и 9, 3 семёрки, 3 единицы;

Кол-во способов: $\frac{8!}{3!\cdot 3!}$;

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$16\cdot 15 = 225+15 = 240$

$240 \times 7 = 1680$

• Тогда всего способов (т.к. все эти случаи различны):

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!} + \frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{8!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(1+\frac{1}{2!}\right) =$$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1}\cdot\frac{3}{\cancel{2}} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 16\cdot 15\cdot 7 =$$

$= 1680$

• Тогда таких чисел 1680.

Ответ: 1680.

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 2x\cdot \sin 7x + 2\sin 7x\cdot \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(+2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \sin 2x \quad \Big| : \cos 2x \\ \sqrt{2}\sin 7x = \sqrt{2}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos 2x + \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin 2x\Big) \end{array}\right.$

(поскольку $\cos 2x = 0$ не содержит корней ур-я) (тогда $\sin 2x = \pm 1$)

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ 2\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{array}\right.$

~~$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$~~

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ \sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m, \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{array}\right.$ $(n, m, k \in \mathbb{Z})$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}m, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k. \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}m,\ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k,$ где $n, m, k \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что (2) можно разложить на множители:

$$(-2x+y)(x+y-4) = -2x^2 - 2xy + xy + y^2 - 4y + 8x =$$
$$= y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y.$$

т.е.

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ (-2x+y)(x+y-4) = 0 \end{cases}$$

• Из ОДЗ (1) следует, что $x>0,\ y>0$.

Тогда преобразуем его:

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$$
$$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \quad \Big|\cdot \frac{y^{7\ln x}}{y^{\ln y}}\ (>0)$$
$$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x}\cdot y^{7\ln x}\cdot y^{-\ln y} = 1$$
$$x^{-2\ln x}\cdot y^{3\ln x - \ln y} = 1.$$

• Тогда:

$$\begin{cases} x^{-2\ln x}\cdot y^{3\ln x - \ln y} = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4 - x. \end{array}\right. \end{cases}$$

• Т.о.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x \\ x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x - \ln y} = 1 \end{cases} \quad \text{I.} \\ \begin{cases} y = 4 - x \\ x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x - \ln y} = 1 \end{cases} \quad \text{II.} \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} \ln y = \ln 2x = \ln 2 + \ln x \\ y^{\alpha} = (2x)^{\alpha} = 2^{\alpha} x^{\alpha} \end{array} \right)$$

I:
$$\begin{cases} y = 2x \\ x^{-2\ln x} \cdot 2^{3\ln x - \ln x - \ln 2} \cdot x^{3\ln x - \ln x - \ln 2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^{-\ln 2} \cdot 2^{2\ln x} \cdot 2^{-\ln 2} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^{-\ln 2} \cdot (x^{\ln 2})^2 = 2^{\ln 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^{\ln 2} = 2^{\ln 2}. \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4 \\ x = 2. \end{cases}$$

II:
$$\begin{cases} y = 4 - x \\ \underbrace{x^{-2\ln x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{(4-x)^{3\ln x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{(4-x)^{-\ln(4-x)}}_{h(x)} = 1. \quad (3) \end{cases}$$

Покажем, что $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — монотонные.

$$f'(x) = (x^{-2\ln x})' = (e^{\ln x \cdot (-2)\ln x})' = (e^{-2\ln^2 x})' = -2x^{-\ln(x)}\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{-4x^{-\ln(x)}\ln x}{x} < 0 \text{ при } x > 0.$$

$$h'(x) = ((4-x)^{3\ln x})' = (4-x)^{3\ln x}(3 \cdot \ln(4-x) \cdot \ln x)' =$$

$$= 3(4-x)^{3\ln x}\left(\frac{\ln x}{4-x} + \frac{\ln(4-x)}{x}\right) > 0 \text{ при } x > 0 \text{ и } y > 0 \; (4 > x > 0)$$

$g'(x) > 0$ — ан-но $f'(x)$.

~~Тогда~~ Более того, эти ф-ции всюду положительны. А значит их произведение — тоже мон-я ф-ция.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница № 4 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда у ур-я (3) не более 1-го корня.

Тогда подбором $x=2$ — корень:

$$2^{-2\cdot\ln 2}\cdot 2^{3\ln 2}\cdot 2^{-\ln 2} = 2^0 = 1.$$

• Тогда 2 — ед. корень (3).

т.о. $\begin{cases} y = 4\cancel{x} - x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Тогда сов-ть прин. вид:

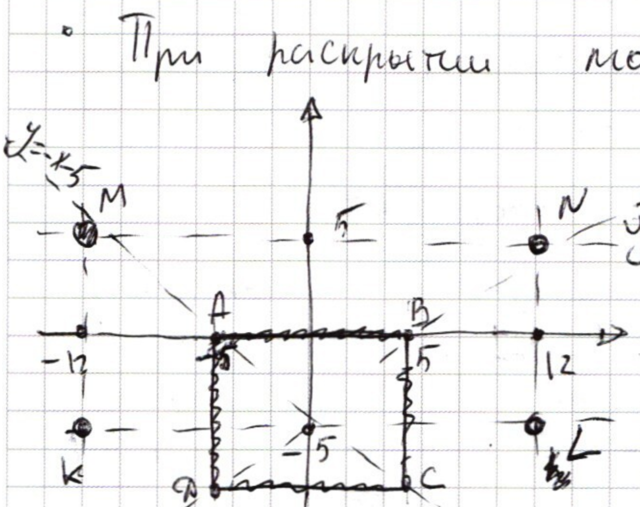
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$.

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

• При раскрытии модулей в (1) мы будем пол-ть линейные ур-я. А значит результатом будет ломаная, с точками излома, ~~где~~ где обращается в 0 один из модулей, то есть на прямых $y=x-5$, $y=-x-5$. В других точках этих прямых л-б быть ~~не~~ может, значит рез-том станет ~~квадрат~~ пр-к ABCD, как на рисунке.

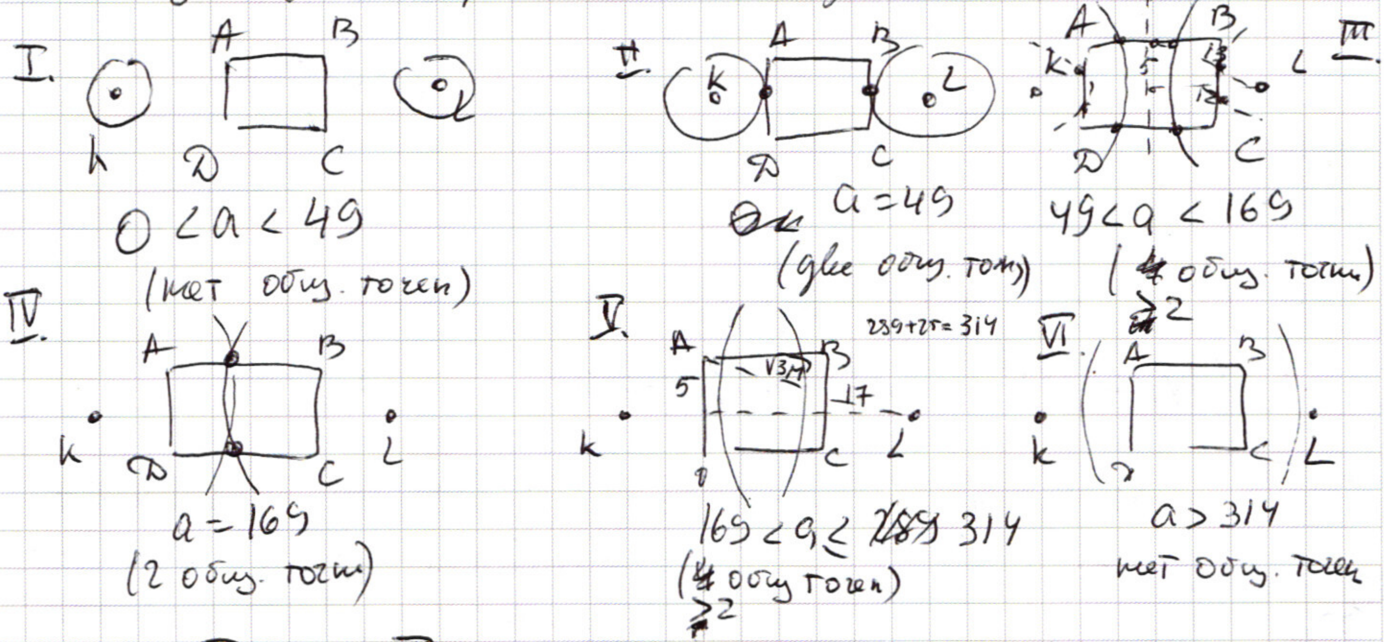


• В свою очередь ур-е (2) задаёт 4 окружности с центрами в точках M, N, K, L (см. рисунок) и радиусом $\sqrt{a}$.

(при $a \le 0$ решений не будет).

• Каждая окружность может либо касаться ориент-ной прямоугольника, либо проходить через его сторону, либо проходить через его вершину, либо не иметь общих точек с пр-ком.

• Поскольку обе нижние окружности симм-ны отн-но Oy и лежат на ~~оси~~ $y=-5$ (а это линия симметрии пр-ка), воз-ны след. случаи их расположения:



I. $0 < a < 49$ (нет общ. точек)

II. $a = 49$ (две общ. точки)

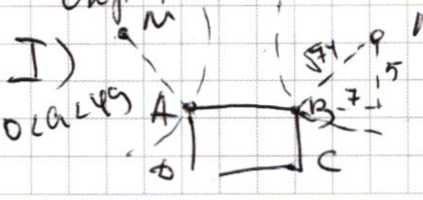
III. $49 < a < 169$ (~~4~~ ≥ 2 общ. точки)

IV. $a = 169$ (2 общ. точки)

V. $169 < a \le$ ~~289~~ 314 (~~4~~ ≥ 2 общ. точек)

VI. $a > 314$ нет общ. точек

• I, II, IV и VI случаи нас интересуют; для них надо проверить расположение верхних окр-тей.



I) $\sqrt{74} > 7$, поэтому ни одна из окр-тей не достаёт до квадрата. (реш-й нет ~~общ. точек нет~~)

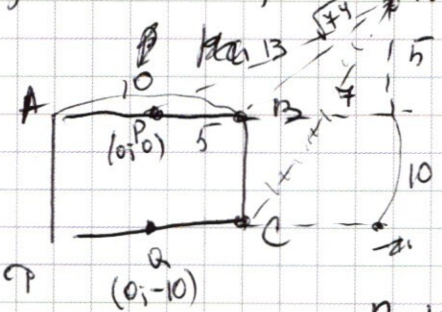
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

V) $a=49$

Как и в I, $\sqrt{74} > \sqrt{a}$, верхние окр-ти не п-ют ABCD

Тогда решения 2.

VI) $a = 169$;



Окр-ти п-ют квадрат, проходят через т. (0;0) (одно из п-й нижних окр-тей), но не проходят через (0;-10) — вторую т. п-я а значит п-ют где-то нижние еще, т.е. решений более чем 2

VII) $a > 314$; ед. случай ~~в~~ когда верх. окр-ти им. не более чем две точки, это когда они прох. через один из углов. $NB = MA = \sqrt{74} < \sqrt{314}$.

$ND = MC = \sqrt{15^2+17^2} = \sqrt{225+289} > \sqrt{314}$.

~~Этот случай~~ Тогда им $a = 225+289 = 514$, есть такие 2 реш-я. При других a решений и либо нет, либо более 2.

• То 2 реш-я при $a = 49$, $a = 514$

Ответ: 49, 514.

№7.

$$\begin{cases} y \ge 2^{x} + 3\cdot 2^{34} & (1) \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x. & (2) \end{cases}$$

• Назовём ~~$s(x) = 76 + 2^x + 3\cdot 2^{34} - 76 - 2$~~

$s(x) = 76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x - 3\cdot 2^{34}$.

Заметим, что ~~если~~ ~~в~~ ~~то~~ для каждого x существует ровно $s(x)$ значений y. (только столько „влезут" между правыми частями (1) и (2)), ~~для в~~ если $s(x) > 0$. Если $s(x) \le 0$ решений нет вообще.

• Очевидно, что правые части совп. не более чем в ~~дв~~ тих двух зн-ях x. (поскольку являются прямой и экспонентой). Подбором эти точки – это $x = 6$ и $x = 38$.

$S(6) = \cancel{76} + \cancel{12\cdot 2^{32}} - \cancel{12} - \cancel{64} - \cancel{3\cdot 2^{34}} = 0$

$S(38) = 76 + 2(2^{32}-1)\cdot 38 - 2^{38} - 3\cdot 2^{34} =$

~~$= 76 \cdot 2(2^{32} \ldots) \ldots (16$~~

$76\cdot 2^{32} - 2^{32}(16 + 3) \cdot 4 = 0$

Тогда $x \in [7; 37]$: $S(x) > 0$; при $x \notin [7;37]$: $S(x) \le 0$

• ~~Она Между двоями корнями $S(x)$ монотонна, и монотонны правые части (1) и (2). А значит, для каждого y существует~~

• Количество всех пар это сумма зн-й $s(x)$ на $x \in [7; 37]$ (т.к. это просто кол-во „влезающих" y)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$e^{\ln(4-x)\ln x}$

9261 | 3 → 3087 | 9 → 361 | 19 → 19 (× 19)

$9261 = 21^3$

$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{3\ln x} \cdot (4-x)^{\ln(4-x)} = 1$

$x = 2$

9261 | 9 → 1029 | 3 → 343 | 7 → 49

$9261 = 21^3$

7^3

$\frac{64}{x^2} - \frac{3 \cdot 16}{x} + 3 \cdot 4 - x$

3, 3, 4

$21 \cdot 21 = 441$, $441 \cdot 21 = 9261$

$-2 \cdot \frac{64}{x^3} + \frac{3 \cdot 16}{4x^2} - 1$

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2!} = 12$

1, 3, 9, 7

7 - 3

I вар. 9 и 3

II вар. 3, 3 и 3

$16 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 16 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 16 \cdot 7 \cdot 5$

1334	3314
~~3~~	3341
1343	3413
1433	3431
3134	4133
3143	4313
	4331

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 2x \cdot \sin 7x$;

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cdot \cos 2x$

$\cancel{\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x}$

$-2\sin 2x \cdot \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\cancel{2\sin 7x}$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

$\sqrt{2}\sin 7x = \sqrt{2}\left(\cos 2x \cdot \sin\frac{\pi}{4} + \sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{\sqrt{2}}\ \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin\dfrac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\dfrac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cancel{2}\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \dfrac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m \\ 2x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2\pi}{5}n \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi}{9}m \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}k \end{array}\right.$$

$\cancel{\sin u \cdot \sin v + \sin u \cdot \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) =}$

$\cancel{= \cos(}$

$\cancel{\sin x \cdot \sin y} + \sin x \cdot \sin y =$

$\cos(7x + 2x) - \cos(7x - 2x) = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x - \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$

$\sin(7x + 2x) + \sin(7x - 2x) = \sin 7x \cos 2x + \cancel{\cos 7x \sin 2x} + \sin 7x \cos 2x - \cancel{\sin 2x \cos 7x}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) + (y^2 - \underset{2\cdot 4}{8y} + 16) - 16 - (5x^2 - \underset{2\sqrt{5}\cdot\frac{8}{\sqrt{5}}}{16x} + \frac{64}{5}) + \frac{64}{5} = 0$$

$$\cancel{(y-x)^2 + (y-4)^2 - (\sqrt{5}x - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 = \frac{5\cdot 16}{5} - \frac{64}{5}} = \frac{16}{5}$$

$$(y-x)^2 + (y-4)^2 - 16 - x^2 + 16x - 4x^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4; \quad 4x^2 - 12x$$

$$4(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - 9$$

$$\cancel{(y-x)^2 + (y-4)^2 - (x-2)^2 - 4(x-\frac{3}{2})^2 = 3}$$

$x, y \longrightarrow x+\alpha,\ y+\beta$

$$-2(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 + (x+\alpha)(y+\beta) =$$

$$= -2x^2 - 4x\alpha - 2\alpha^2 + y^2 + 2y\beta + \beta^2 + xy + y\alpha + x\beta + \alpha\beta$$

$$\cancel{\alpha - 4\alpha = \alpha\beta - 4\alpha = 8}$$

$$\begin{cases} -4\alpha + \beta = 8 \quad |\cdot 2 \\ 2\beta + \alpha = -4 \\ -2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$$-8\alpha - \alpha = 20$$

$$\alpha = -\frac{20}{9};$$

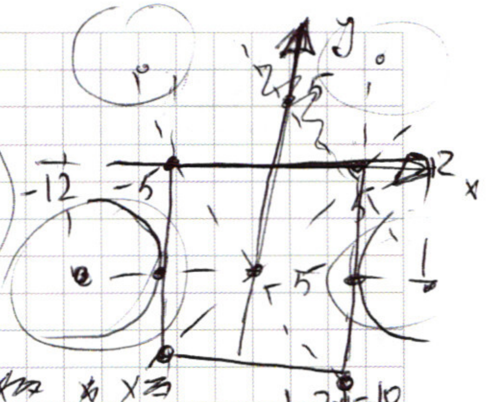
$$\beta = \frac{10}{9} - 2 = -\frac{8}{9}$$

$$-800 + 64 + 8\cdot 20 = 0$$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{|8-4-2+2\delta=4|}$



$$2y^2-2xy-4x^2+16x-8y=0$$

$$(y-x)^2-5x^2+16x+y^2-8y=0$$

$x=$

$y=-x-5 \to |-2x|=10$, $x=\pm5$

$y=x-5 \to |2x|=10$, $x=\pm5$

$$(2x+y+\alpha)(x+y+\beta)=0$$

$$=-2x^2-xy+y^2-2x\beta+\alpha y+\alpha\beta+\alpha x+\beta y=$$

$$=-2x^2-xy+y^2+8x-4y$$

$$\begin{cases}-2\beta+\alpha=8\\ \alpha+\beta=-4\\ \alpha\beta=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\beta=-4\\ \alpha=0\end{cases}$$

$1=2^{\ln 2}$

$$(-2x+y)(x+y-4)=$$

$$=-2x^2-2xy+8x+xy+y^2-4y$$

$x^{\ln 2}\to 2^{\ln x}\cdot x^{-\ln 2}=2^{\ln 2}$

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y^7}{x^7}\right)}\\ (y-2x)(x+y-4)=0\end{cases}$$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x}=y^{\frac{\ln y}{y^{7\ln x}}}$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{3\ln x}=y^{\ln y}$

$x^{-2\ln x}\cdot 2^{3\ln x}\cdot x^{3\ln x}=2^{\ln 2\cdot\ln x}\cdot 2\cdot$

$\cancel{x^{-3\ln x}}\cdot 2^{2\ln x}\cdot x^{3\ln x}\cdot 2^{\ln x}\cdot x^{\ln 2}\cdot x^{\ln x}$

$x^{\ln 2}=2^{\ln x}$

$\cancel{x^{\ln x}}=t$

$$\begin{cases}y=2x & (1)\\ y=4-x & (2)\end{cases}$$

(1): $(16x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln\frac{2}{x^6}}$

$(16x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln 2-6\ln x}$

$(16x^6)^{-\ln x}=(16x^6\cdot 4)^{\frac{\ln 2}{6}-\ln x}$

$(16x^6)^{-\ln x}=(16x^6)^{\frac{\ln 2}{6}-\ln x}\cdot 4^{\frac{\ln 2}{6}-\frac{\log_4 x}{\log_4 e}}$

$1=(16x^6)^{\frac{\ln 2}{6}}\cdot$

$|16x^6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 38$

$$\begin{cases} y \geq 2^{34}(3+2^4) = 2^{38}\cdot 4\cdot 19 = 76\cdot 2^{32} \\ y < 76\cdot 2^{32} \end{cases}$$

$x \in (6;\ 38)$

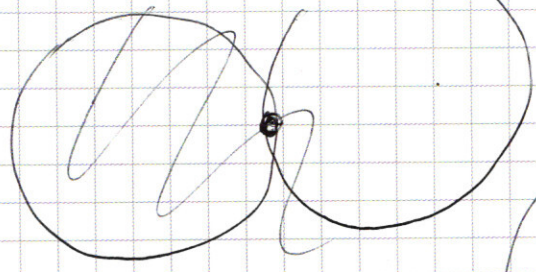
$$76 + 2(2^{32}-1)x > 2^x + 3\cdot 2^{34}$$

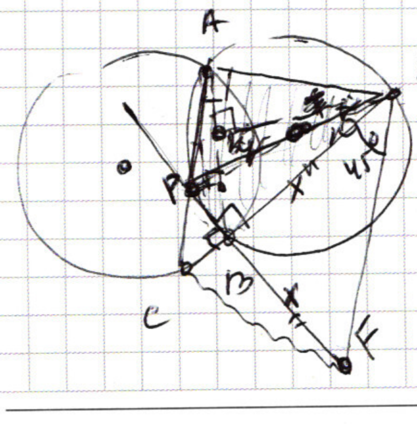
$$S(x) = 76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x - 3\cdot 2^{34}$$

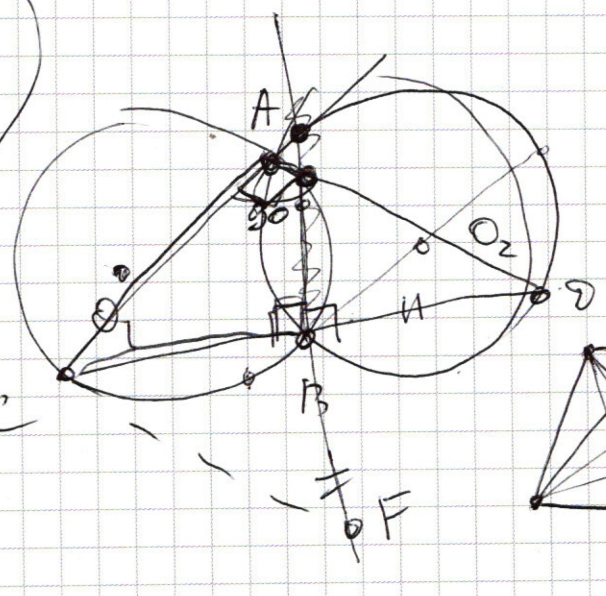
$x = 3\cdot 2 = 6$

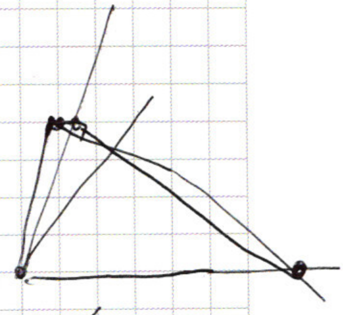
$$S(6) = 76 + 3\cdot 2^{34} - 12 - 64 - 3\cdot 2^{34} = 0.$$

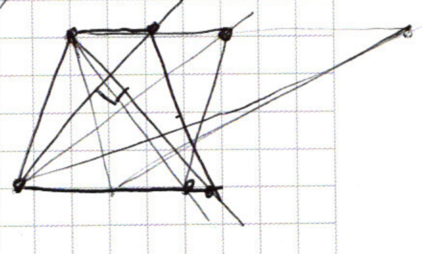
$$\sum_{x=7}^{x=37} S(x) = 76\cdot(37-7+1) + 2(2^{32}-1)\cdot\frac{37+7}{2}\cdot 31 - \frac{2^7\cdot(1-2^{31})}{1-2} - 3\cdot 2^{34}\cdot 31$$











МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• т.о: кол-во пар:

$$N = \sum_{x=7}^{x=37} S(x) = \sum_{x=7}^{x=37} 76 + \sum_{x=7}^{x=37} 2x(2^{32}-1) - \sum_{x=7}^{x=37} 2^x - \sum_{x=7}^{x=37} 3\cdot 2^{34} =$$

как арифм. прогр. как геом. прогр.

$$= 76\cdot 31 + 2(2^{32}-1)\cdot \frac{7+37}{2}\cdot 31 - \frac{2^7\cdot(1-2^{31})}{1-2} - 3\cdot 2^{34}\cdot 31 =$$

$$= 76\cdot 31 + (2^{32}-1)\cdot 44\cdot 31 + 2^7(2^{31}-1) - 3\cdot 2^{34}\cdot 31 = 31(76 + 2^{32}\cdot 44 - 44 - 3\cdot 2^{34}) + 2^{38} - 2^7 =$$

$$= 31\cdot 32 - 2^7 + 2^{34}(31\cdot 11 - 31\cdot 3 + 2^4) =$$

$$= 2^5(31-4) + 2^{34}(31\cdot 8 + 16) =$$

$$= 2^5\cdot 27 + 2^{37}\cdot 33$$

Ответ: $2^5\cdot 27 + 2^{37}\cdot 33$

№6.