МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Имеется число $\overline{a_1a_2\ldots a_8}$, произведение его ~~цифр~~ цифр $\prod_{i=1}^{8} a_i = 3375 =$
$= 3^3 \cdot 5^3$

Значит, однозначно определён набор цифр для этого числа: 3 тройки, 3 пятёрки и $8-3-3=2$ единицы (т.к. $3\cdot5=15$ — цифрой не является; также цифры 0 быть не может, иначе $\prod a_i = 0$)

К-во способов ~~выб~~ выделить для троек и пятёрок 6 позиций из 8: $\frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8_4 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{2}} = 28$

К-во способов выделить для троек 3 позиции из выбранных 6: $\frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{6\cdot\cancel{3!}} = 20$

Правило умножения (два независимых выбора): $28 \cdot 20 =$
$= \underline{560}$

Ответ: 560

№5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 & (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a & (2) \end{cases}$$

$|(y-3)-x|$

1) ~~Преобразуем его ($|-3|=|3|$)~~: $\cancel{|x-(y-3)|}+|x+(y-3)|=6$

Это уравнение вида $|(x-x_ц)+(y-y_ц)|+|(y-y_ц)-(x-x_ц)|=a$ задаёт квадрат с центром $(x_ц; y_ц)$ и стороной a, ~~сторона~~ каждая сторона параллельна одной из осей координат xOy. Это также можно проверить, раскрывая модули:

~~подстановка в уравнение (1)~~ ~~решение неравенств~~

- ~~$x-y+3\geq 0,\ x+y-3\geq 0 \Rightarrow x=3;\ y\in[0;6]$~~
- ~~$x-y+3<0;\ x+y-3\geq 0 \Rightarrow y=0;\ x\in[-3;3]$~~
- ~~$x-y+3\geq 0;\ x+y-3<0 \Rightarrow y=6;\ x\in[-3;3)$~~

подстановка модулей в уравнение (1)

- $y-3-x\geq 0;\ x+y-3\geq 0 \Rightarrow y=6;\ x\in[-3;3]$ ← решение неравенств с учётом решения уравнения (1)
- $y-3-x\geq 0;\ x+y-3<0 \Rightarrow x=-3;\ y\in[0;6)$
- $y-3-x<0;\ x+y-3\geq 0 \Rightarrow x=3;\ y\in[0;6)$
- $y-3-x<0;\ x+y-3<0 \Rightarrow y=0;\ x\in(-3;3)$

Таким образом, получился квадрат с центром $(0;3)$ и стороной 6.

2) $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a=(\sqrt{a})^2$ — окружности с центрами $(4;3)$, $(-4;3)$, $(4;-3)$ и $(-4;-3)$ (зависит от знаков x и y) и радиусом $\sqrt{a}$ ($a\geq 0$, т.к. в ур-нии (2): $\underbrace{f^2}_{\geq 0}+\underbrace{g^2}_{\geq 0}=a$)

Однако график может быть не просто окружностями, МФТИ

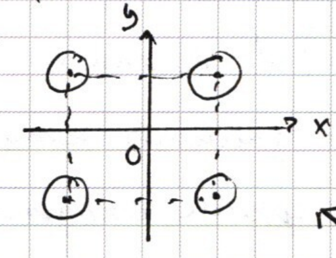
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

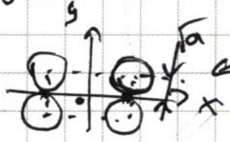
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~3) Представим вид~~ что зависит от значений a:

рис. (схематично!)

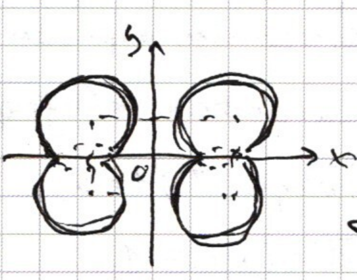


до касания в вертикальных парах:

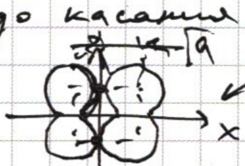


$\sqrt{a}=3;\ a=9$

не пересекаются между собой, если $a\in[0;9)$

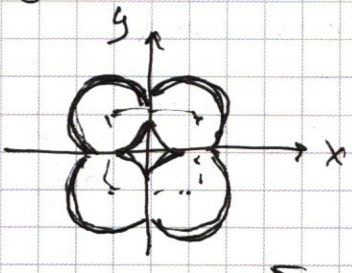


до касания в горизонтальных парах:

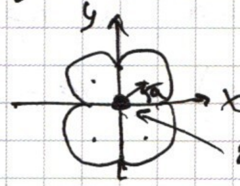


$\sqrt{a}=4;\ a=16$

две пары пересеклись, дуги внутри уничтожились в модулях, если $a\in[9;16)$



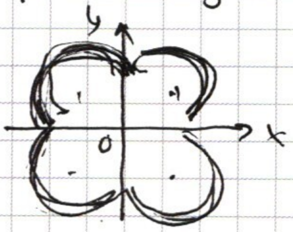
до пересечения всех окружностей в $(0;0)$:



$\sqrt{a}=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ a=25$

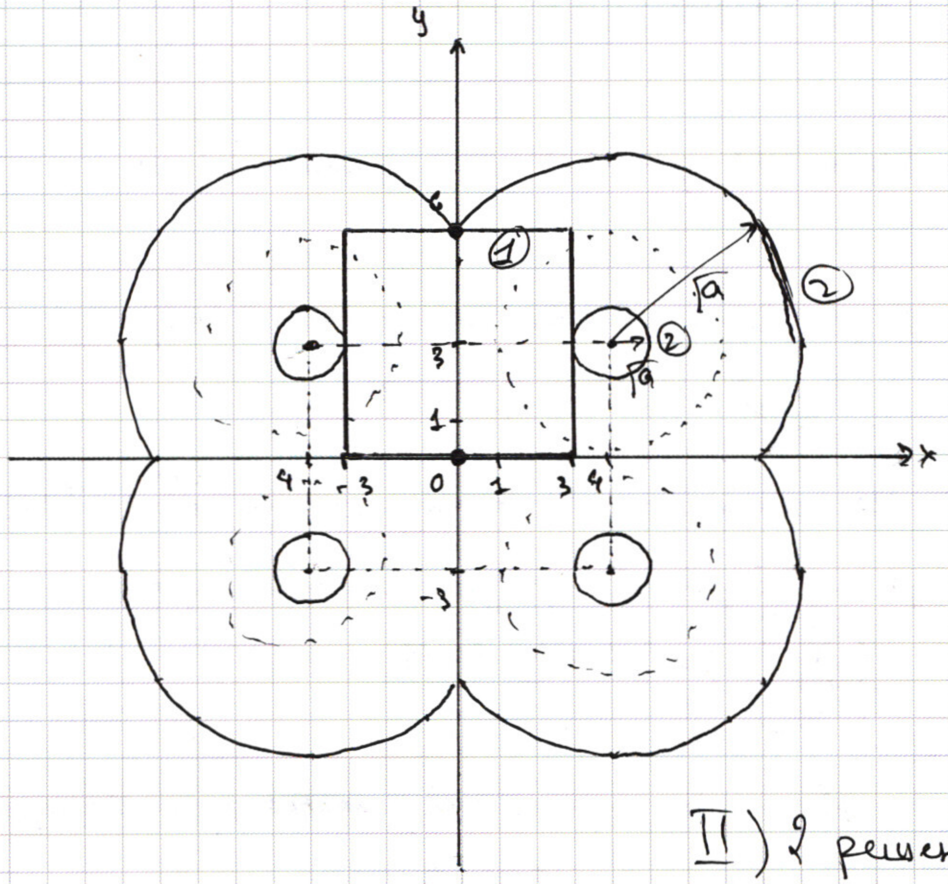
$(0;0)$ тоже решение!

остались большие внешние дуги, и „кривой ромб" из малых дуг, если $a\in[16;25]$



остались только большие внешние дуги, если $a\in(25;+\infty)$

3) Представим взаимное расположение графиков ур-ний (1) и (2). Также можно заметить, что оба ~~ур~~ графика симметричны относительно O_y, а ~~гр~~ (2) ещё и относительно O_x.



I) 2 решения возникают, когда верхние окружности внешним образом касаются квадрата. Тогда $4=\sqrt{a}+3$. $\sqrt{a}=1$; $a=1$

II) 2 решения возникают, когда ~~окру~~ верхние окружности пересекутся на ~~верх~~ верхней стороне квадрата, а „кривой ромб" из дуг превратится в точку $(0;0)$ $\Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{4^2+3^2}=5$; $a=25$.

~~Для~~ При $a<1$ или $a>25$ графики (1) и (2) не пересекутся, а при $a\in(1;25)$ графики пересекаются несколько раз.

Ответ: $a=1$ или $a=25$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

1) $y^{5\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2\lg x + 2\lg y}$; $y = 10^{\lg y}$; $x = 10^{\lg x}$

$(10^{\lg y})^{5\lg x} \cdot (10^{\lg x})^{-\lg x} = (10^{\lg y})^{2\lg x + 2\lg y}$

$10^{5\lg x \lg y} \cdot 10^{-\lg^2 x} = 10^{2\lg x \lg y + 2\lg^2 y}$; $10^{5\lg x \lg y - \lg^2 x} = 10^{2\lg x \lg y + 2\lg^2 y}$

Это равносильно $5\lg x \lg y - \lg^2 x = 2\lg x \lg y + 2\lg^2 y$

$2\lg^2 y - 3\lg x \lg y + \lg^2 x = 0$

$(2\lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} 2\lg y = \lg x \\ \lg y = \lg x \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} y^2 = x & (I) \\ y = x & (II) \end{array}\right. \\ x, y > 0 \end{cases}$

2) Подставим полученные значения x (через y) в ур-ние (2):

I) $x = y^2 \to (y^2)^2 - 2\cdot y^2 \cdot y - 4\cdot y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0 \quad | : y \ (y > 0)$

$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$; $y = 3$ — подходит $(3^3 - 2\cdot 3^2 - 7\cdot 3 + 12 = 0)$

$(y-3)(y^2 + y - 4) = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y^2 + y - 4 = 0;\ D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 17 \end{array}\right.$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ $\xrightarrow{+}$ $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ — да

$\xrightarrow{-}$ $\dfrac{-\sqrt{17}-1}{2}$ — нет, т.к. $y>0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \quad x = 3^2 = 9; \quad x = \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{2^2} = \frac{17 - 2\sqrt{17}+1}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$(9;3)$; $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

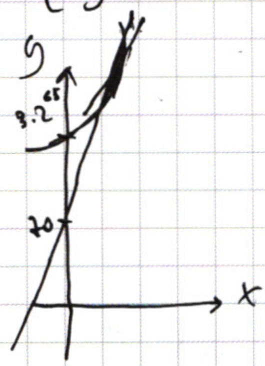
II) $x = y \rightarrow y^2 - 2y\cdot y - 4\cdot y - 3y^2 + 12y = 0$; $-4y^2 + 8y = 0$

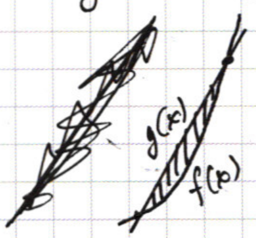
$-4y(y-2) = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ — нет, т.к. } y>0 \\ y = 2 \text{ — да} \rightarrow x = 2 \end{array}\right.$ $\quad (2;2)$

Ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

№ 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$





Если построить графики этих функций (обозначим $f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{65}$ и $g(x) = (2^{64}-1)x + 70$), (схематично, для иллюстрации взаимного расположения), то найдётся такая область, где $f(x) < y \le g(x)$ и $y \ne \varnothing$. Это можно проверить подстановкой каких-либо ключевых значений x в функцию $\Delta(x) = g(x) - f(x) = (2^{64}-1)x - 2^x + 70 - 3\cdot 2^{65}$

$x = 0 \Rightarrow \Delta(x) = (2^{64}-1)\cdot 0 - 2^0 + 70 - 3\cdot 2^{65} = -3\cdot 2^{65} + 69 < 0$

$x = 1 \Rightarrow \Delta(x) = (2^{64}-1)\cdot 1 - 2^1 + 70 - 3\cdot 2^{65} = \underbrace{2^{64} - 6\cdot 2^{64}}_{5\cdot 2^{64}} + 67 < 0$

$x = 6 \Rightarrow \Delta(x) = (2^{64}-1)\cdot 6 - 2^6 + 70 - 6\cdot 2^{64} = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=69 \Rightarrow \Delta(x)=(2^{64}-1)\cdot 69-2^{69}+70-3\cdot 2^{65}=(\underset{37}{69}-\underset{32}{2^5}-\underset{31}{6})\cdot 2^{64}+1>0$

$x=70 \Rightarrow \Delta(x)=(2^{64}-1)\cdot 70-2^{70}+70-3\cdot 2^{65}=$

$=(\underset{6}{70}-\underset{64}{2^6}-\underset{0}{6})\cdot 2^{64}+0=0$

Обе функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и строго возрастают $(f'(x)=2^x\ln 2>0;\ g'(x)=2^{64}-1>0) \Rightarrow$ искомая область координатной плоскости только одна и соответствует промежутку целых x, при которых $\Delta(x)\geq 0$

Из подстановки мы нашли этот промежуток: $x\in[6;70]\cap\mathbb{Z}$

В каждой вертикальной прямой $x=a$ (где $a\in[6;70]\cap\mathbb{Z}$) содержатся ~~целые~~ решения $(x;y)$, а их к-во в одной прямой $=\Delta(x)+1$ (т.к. $\Delta(x)$ — расстояние между $f(x)$ и $g(x)$, если $x\in[6;70]\cap\mathbb{Z}$, то $f(x), g(x)\in\mathbb{Z}$)

Тогда к-во решений: $\sum_{x=6}^{70}(\Delta(x)+1)=\sum_{x=6}^{70}\Delta(x)+(70-6+1)=$

$=\sum_{x=6}^{70}\left((2^{64}-1)x-2^x+70-3\cdot 2^{65}\right)+65=(2^{64}-1)\sum_{x=6}^{70}x-\sum_{x=6}^{70}2^x+$

$+70(70-3\cdot 2^{65})=(2^{64}-1)\frac{70+6}{2}(70-6+1)-\left(\sum_{x=0}^{70}2^x-\sum_{x=0}^{5}2^x\right)+$

$+4900-210\cdot 2^{65}=2470\cdot 2^{64}-2470-\left((2^{71}-1)-(2^6-1)\right)+$

$+4900-420\cdot 2^{65}=(2470-420)\cdot 2^{64}+4900-2470-2^{71}+2^6=$

$=(2050-\underset{128}{2^7})\cdot 2^{64}+2430+64=1922\cdot 2^{64}+2494=961\cdot 2^{64}+2494$

Ответ: $961\cdot 2^{64}+2494$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos(2\cdot 7x)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos^2 7x - \sin^2 7x\right) \quad /:\sqrt{2}$$

$$-2\sin\left(\frac{11x+\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{11x+\cancel{\frac{\pi}{4}}-3x-\cancel{\frac{\pi}{4}}}{2}\right) = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \sqrt{2}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) \quad /:2$$

$$\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(7x+\frac{\pi}{4}\right.\right.} -\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\operatorname{tg}\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-tg\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}-7x\right)$

Греш!

$-x-y+3+x-y+3=6$

$y=0$

№ 5

$$\begin{cases} |y-x-3|+|y+x-3|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a=\sqrt{a}^2 \end{cases}$$

$|x+y-3|+|x-y+3|=6$;

$|x+(y-3)|+|x-(y-3)|=6$

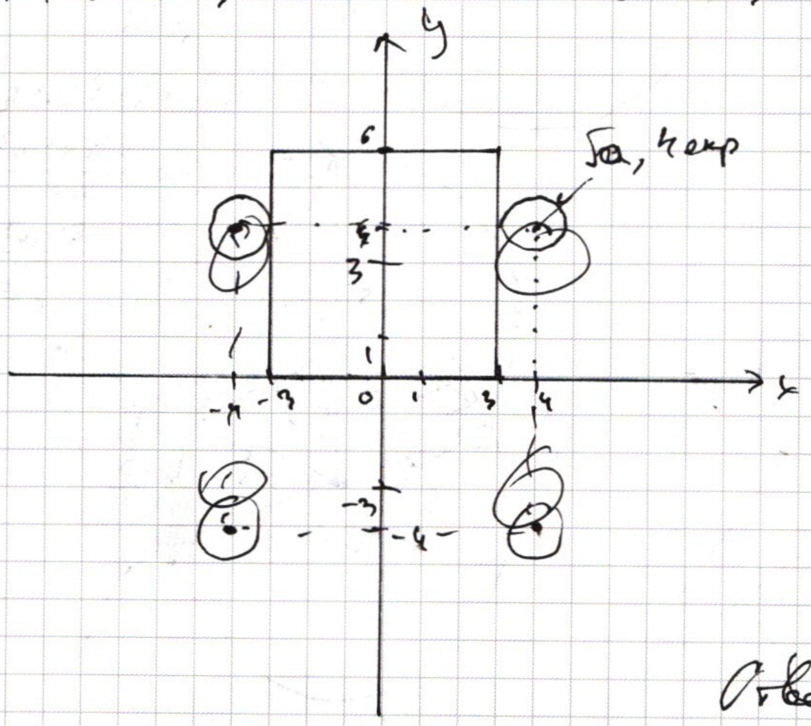
1) $x+y-3\geq 0$; $y\geq -x+3$ $\quad$ $x-y+3\geq 0$; $y\leq x+3$

$x+\cancel{y}-\cancel{3}+x-\cancel{y}+\cancel{3}=6$; $x=3$ $\rightarrow y\geq -3+3=0$; $y\leq 3+3=6$; $y\in[0;6]$

2) $x+y-3\geq 0$; $x\geq -y+3$ $\quad$ $x-y+3\leq 0$; $y\geq x+3$; $x\leq y-3$

$\cancel{x}+y-3-\cancel{x}+y-3=6$; $y=6$ $\quad$ $x\geq -6+3=-3$; $x\leq 6-3=3$

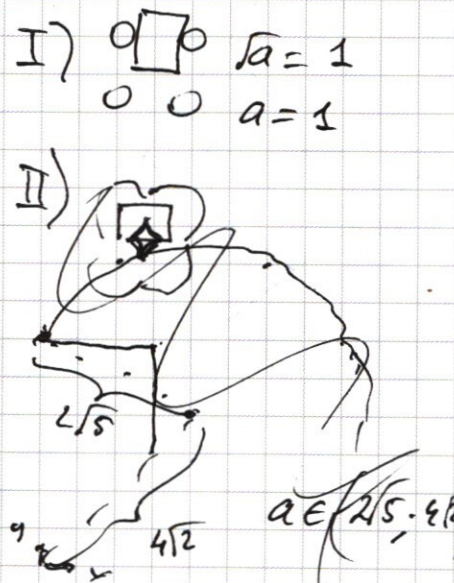
3) $x+y-3\leq 0$; $x\leq -y+3=3$ $\quad$ $x-y+3\geq 0$; $x\geq y-3=-3$



I) $\sqrt{a}=1$

$a=1$

II)



$a\in(2\sqrt{5};4\sqrt{2})$

Ответ: $a\in(2\sqrt{5};4\sqrt{2})\cup\{1\}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\widetilde{|1|} \geq 0$ $\widetilde{|2|} \geq 0$ $\quad y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6;\ y=6$

$y-3-x\geq 0;\ x\leq y-3=3;\quad y-3+x\geq 0;\ x\geq -3\quad x\in[-3;3]$

2) $|1|\geq 0;\ |2|<0\quad \cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6;\ x=-3;$ $\quad y\in[0;6)$

$y-3-x\geq 0;\ y\geq x+3=0;\quad y-3+x<0;\ y<-x+3=6$

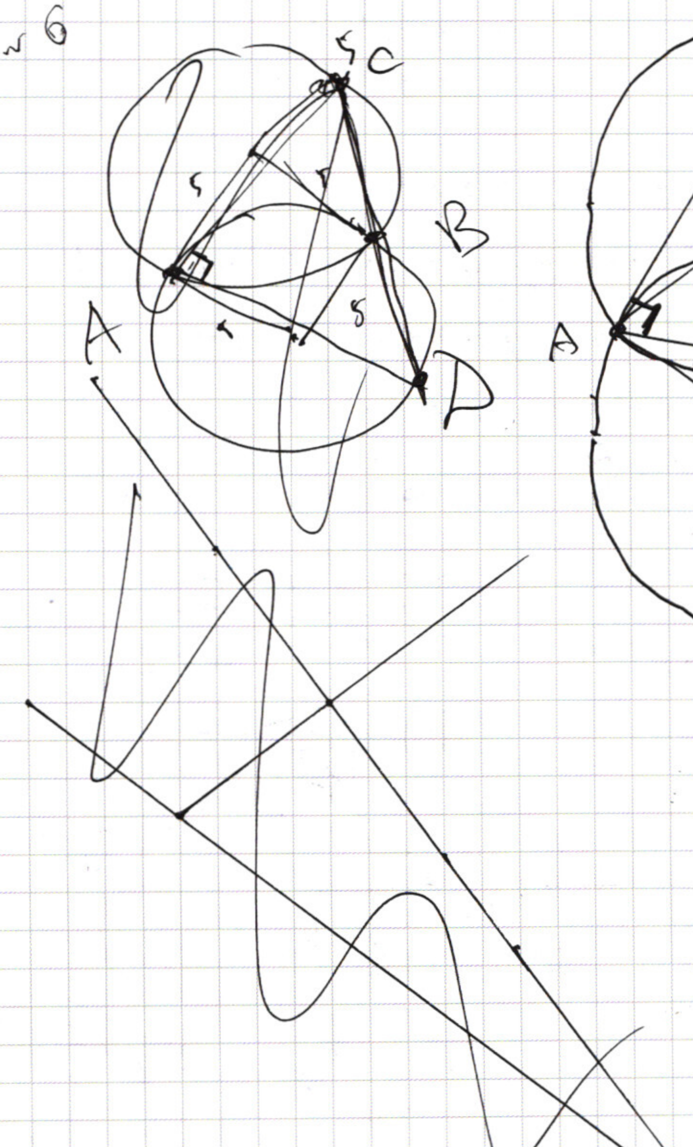
3) $|1|<0;\ |2|\geq 0\quad -\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6;\ x=3$

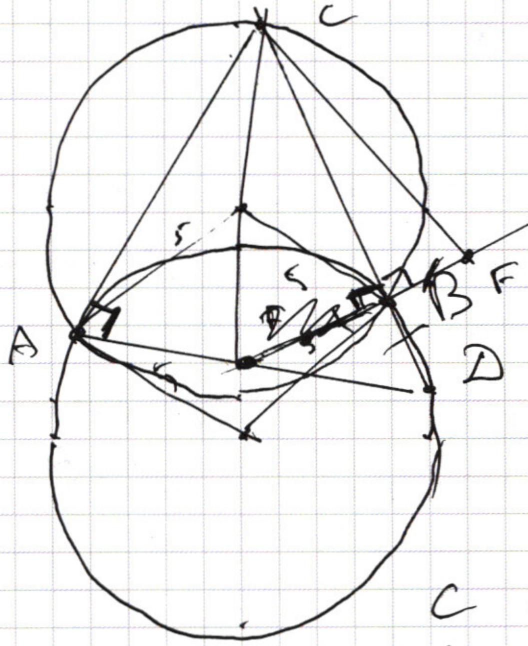
$y<x+3=6;\ y-3+x\geq 0;\ y\geq -x+3=0\quad y\in[0;6)$

4) $|1|<0;\ |2|<0\quad -y+\cancel{3}+\cancel{x}-y+\cancel{3}-\cancel{x}=6;\ y=0$

$x>y-3=-3;\ x<3-y=3\quad x\in(-3;3)$

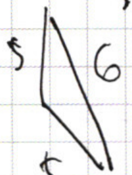
№6





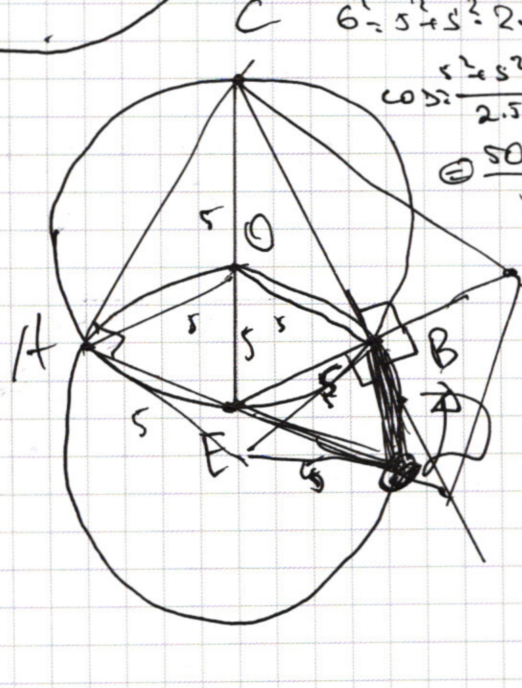
$\cos=\frac{7}{25}$

$\sin=\frac{24}{25}$



$6^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cos$

$\cos=\frac{5^2+5^2-6^2}{2\cdot5\cdot5}=\frac{50-36}{50}=$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

1) $y^{5\lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)}$; $y^{5\lg x} \cdot \frac{1}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$

$y^{5\lg x} \cdot \frac{1}{10^{\lg^2 x}} = y^{2\lg x} \cdot (y^{\lg y})^2 = y^{2\lg x} \cdot (10^{\lg^2 y})^2 \cancel{= y^{2\lg x} \cdot 100^{\lg^2 y}}$

$y^{5\lg x} \cdot 10^{-\lg^2 x} = y^{2\lg x} \cdot 10^{2\lg^2 y}$ $\mid : y^{2\lg x}$; $y^{3\lg x} \cdot 10^{-\lg^2 x} = 10^{2\lg^2 y}$

$y^{3\lg x} = 10^{2\lg^2 y + \lg^2 x}$; $10^{3\lg x \lg y} = 10^{2\lg^2 y + \lg^2 x} \Leftrightarrow 3\lg x \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2 x$

$2\lg^2 y - 3\lg y \lg x + \lg^2 x = 0$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$(2\lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2\lg y = \lg x \\ \lg y = \lg x \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x \end{array}\right. \\ x, y > 0 \end{cases}$

1) $(y^2)^2 - 2y^2 \cdot y - 4 \cdot y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$ $\quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$

$27 - 2 \cdot 9 - 7 \cdot 3 + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y - 3 \\ \hline y^3 - 3y^2 & y^2 + y - 4 \\ y^2 - 7y & \\ y^2 - 3y & \\ -4y + 12 & \\ -4y + 12 & \\ 0 & \end{array}$$

$(y - 3)(y^2 + y - 4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y^2 + y - 4 = 0; \; D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17 \end{array}\right.$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ → $\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ ✓, → $\frac{-\sqrt{17} - 1}{2}$ ✗

$\left[\begin{array}{l} y = 3 \quad x = \sqrt{y} = \sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \; x = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} = \cancel{\sqrt{\frac{(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}+1)}{2\sqrt{17}+1}}} = \cancel{\sqrt{\frac{17-1}{2\sqrt{17}+1}}} = \cancel{\sqrt{\frac{16}{\sqrt{17}+1}}} = \end{array}\right.$

№1

~~abcdefgh~~; $\overline{a_1 \dots a_8}$; $\prod_{i=1}^{8} a_i = 3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5^3$

$1125 : 9 = 125$

3 „3" 3 „5" 2 „1"

~~2 „3" и 3 „5" — ост 3 „1"~~

Из 8 выбираем 2+3 = 5 без учёта порядка: ~~A_8^5~~

$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5!} = 56$

Из 5 выбранных выбираем 2 без учёта порядка:

$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10 \leadsto 56 \cdot 10 = 560$

№2

$\begin{cases} \alpha = x+y \\ \beta = x-y \end{cases}$ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y = -2\sin x \sin y$

• $\cos 11x - \cos 3x = -2\sin\frac{11x+3x}{2}\sin\frac{11x-3x}{2} = -2\sin 7x \sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = \sin(x-y) - \sin(x+y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y =$

• $= -2\cos x \sin y = -2\cos\frac{11x+3x}{2}\sin\frac{11x-3x}{2} = -2\cos 7x \sin 4x$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\cos 7x \sin 4x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\sin 4x \cdot \sqrt{2}\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x+4x) = \cos 10x \cos 4x - \sin 10x \sin 4x$

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$-2\sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos(2 \cdot 7x)$

$-2\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x) \cdot$

$\cdot (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2}\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

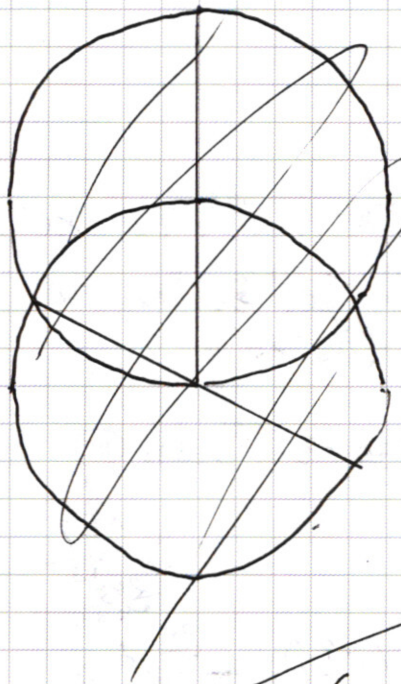
$-\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$



2) $x^2 - 2x\cdot x - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$\cancel{x(\ldots)}\ -4x^2 + 8x = 0$

$-4x(x-2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ — } \times \\ x=2 \text{ — } \checkmark \end{array}\right.$

$y = 2$

№2

$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \ \text{①} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \ \text{②} \end{cases}$

$x, y \in \mathbb{Z}$

1) $\cancel{y > 2^{65}(2^{x-65} + 3)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0 \Rightarrow y > 3\cdot 2^{65}$ — точно

$y \le 70 + (2^{64}-1)x$ 70

$3\cdot 2^{65} + 2^x < 70 + (2^{64}-1)x$

$x=0 \to y > 3\cdot 2^{65}+1$ $\quad y \in \varnothing$

$y \le 70 + (2^{64}-1) = 2^{64}+69$

$x = 10 \to y > \cancel{2^{10}(1+3\cdot 2^{55})} = 3\cdot 2^{65} + 2^{10}\ 1024 = 6\cdot 2^{64} + 1024$

$y \le 70 + (2^{64}-1)10 = 10\cdot 2^{64} + 60$

② − ①: $(10-3)\cdot 2^{64} + 60 - 1024 = 7\cdot 2^{64} - 964 > 0$

$x = 1 \to y > 3\cdot 2^{65} + 2 = 6\cdot 2^{64} + 2$ $\quad \Delta = 5\cdot 2^{64} + 67 > 0$ ✗

$y \le 70 + (2^{64}-1)\cdot 1 = 2^{64} - 69$

$y_1'(x) = \cancel{2^x \ln x}\ (2^x)' = 2^x \ln 2$

$y_2'(x) = \{2^{64}-1\}x$

$3\cdot 2^{65} + 2^x = 70 + (2^{64}-1)x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

65 384

$x = 16 : y > 2^{16} + 3\cdot 2^{65}$ $\Delta = 5\cdot 2^{65} - 65330$

$y \le 70 + (2^{64}-1)\cdot 16 = 2^{68} + 54 = 8\cdot 2^{65} + 54$

$2^{65} = 2^5 \cdot 2^{60} = 32\cdot 2^{60} > 32\cdot 10^{18}$

41
265
× 38
1520
195
2470

$x = 64 : y > 2^{64} + 3\cdot 2^{65} = 2^{64} + 6\cdot 2^{64} = 7\cdot 2^{64}$

$\Delta = 5 \ldots$

$y \le 70 + (2^{64}-1)\cdot 64 = \cancel{2^{70}+6} =$
$= 64\cdot 2^{64} + 6$

$1922 = 2 \cdot 961$
961

$\cancel{x = 128 : y > 2^{128} + 3\cdot 2^{65}}$

$x = 70 : y > 2^{70} + 3\cdot 2^{65} = 35\cdot 2^{65}$
$y \le 70 + (2^{64}-1)\cdot 70 = 70\cdot 2^{64} = 35\cdot 2^{65}$ $\Delta = 0$

$\Delta(x) = (2^{64}-1)x + 70 - 3\cdot 2^{65} - 2^x = x\cdot 2^{64} + 70 - x \ominus$

$\ominus\ 6\cdot 2^{64} - 2^x = (x-6)\cdot 2^{64} + 70 - x - 2^x$

$(2^{64}-1)x - 2^x + 70 - 3\cdot 2^{65}$ $x \in \{1 .. 70\}$

$\cancel{\int \Delta\, dx = \int (2^{64}-1)x\, dx - \int 2^x dx + \int (70 - 3\cdot 2^{65})\, dx =}$

$\cancel{= \frac{2^{64}-1}{2} x^2}$

3
35
× 71
35
245
2485

$\sum_{i=1}^{70} \Delta(i) = \sum_{i=1}^{70}\left((2^{64}-1)i - 2^i + 70 - 3\cdot 2^{65}\right) = \sum_1^{70}(2^{64}-1)i - \sum_1^{70} 2^i \oplus$

$\oplus \sum_1^{70}(70 - 3\cdot 2^{65}) = (2^{64}-1)\frac{70+1}{2}\cdot 70 - 2^{71} + 70^2 - 210\cdot 2^{65} =$

$= (2^{64}-1)\cdot 2485 - 128\cdot 2^{64} + 4900 - 420\cdot 2^{64}$

$x = 4$

$\Delta = (2^{64}-1)\cdot 4 - 2^4 + 70 - 3\cdot 2^{65} = -2\cdot 2^{65} + 50 < 0$

$\sum_{x=6}^{70}(\Delta(x) + 1)$

$x = 6$

$\Delta = \cancel{(2^{64}-1)\cdot 6 - 2^6 + 70 - 6\cdot 2^{64}} = 0$

$x = 69$

$\Delta = (2^{64}-1)\cdot 69 - 2^{69} + 70 - 3\cdot 2^{65} = 2^{64}(69 - 2^5 - 6) + 1 = 31\cdot 2^{64} + 1$

$x = 70$

$\Delta = (2^{64}-1)\cdot 70 - 2^{70} + 70 - 3\cdot 2^{65} = 2^{64}(70 - 2^6 - 6) = 0$