

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$1) \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$\cos 2x = \sin 2x$!: $\cos 2x$ при условии что $\cos 2x \neq 0$ так, как тогда бы было бы равенство $0 = \text{числу}$.

$$1 = \operatorname{tg} 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

$$2 \sin 4x - 2 \left(\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin 4x - 2 \left(\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0 \quad \text{! : 2 разделим на 2}$$

$$\sin 4x - \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{так, как } \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) \right) = \sin 4x$$

Теперь возможны 2 случая, либо

$$1. \frac{\pi}{2} - 4x = 2x - \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad 2. \frac{\pi}{2} - 4x = \pi - \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$1. \quad 9x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \text{! : 9}$$

$$2. \quad \frac{\pi}{2} - 4x = \frac{5\pi}{4} - 2x + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{18} + \frac{\pi k}{9}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \quad - 5x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \quad \text{! : } (-5) \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{20} - \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

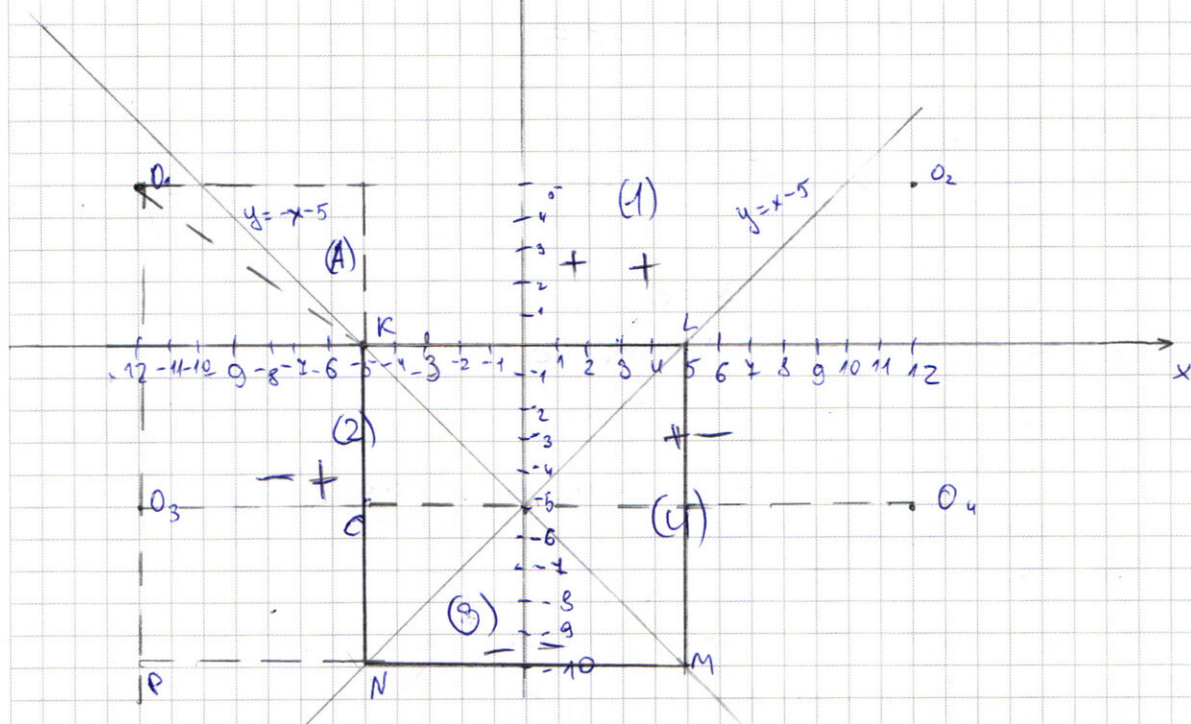
$$\text{Омфем: } x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{9}, x = -\frac{3\pi}{20} - \frac{\pi k}{5}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \text{ где } n, k, t \in \mathbb{Z}$$

$$5. \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Найти все значения a , при которых система имеет ровно 2 решения

Рассмотрим 1 равенство и посмотрим как раскрывается модуль в зависимости от значений x и y .
Нарисуем прямые $y = -x - 5$, $y = x - 5$.

Второе уравнение, это уравнение окружностей симметричных относительно Ox и Oy , радиус окружностей равен $\sqrt{a}$
 O_1, O_2, O_3, O_4 - центры заданных окружностей



Получили 4 области где знаки $(-; +)$ - соответственно знаки с которыми раскрывается модуль

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) область $(+; +)$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$2y=10; y=5$$

(2) область $(-; +)$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10; x=-5$$

(3) область $(-; -)$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y=20; y=-10$$

(4) область $(+; -)$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10; x=5$$

Нужно чтобы окружностей и квадрата было
2 общие точки. Рассмотрим случаи

1. случай когда окружности с центрами O_3, O_4
касаются сторон квадрата, тогда окр. с центрами

O_1, O_2 не касаются ~~окр.~~ квадрата так, как

в треугольнике A гипотенуза больше катета
в том же случае $R=7=\sqrt{a}$, тогда $a=49$

когда окружности с центрами O_1 и O_2 касаются
квадрата в точках K и L , то очевидно, что

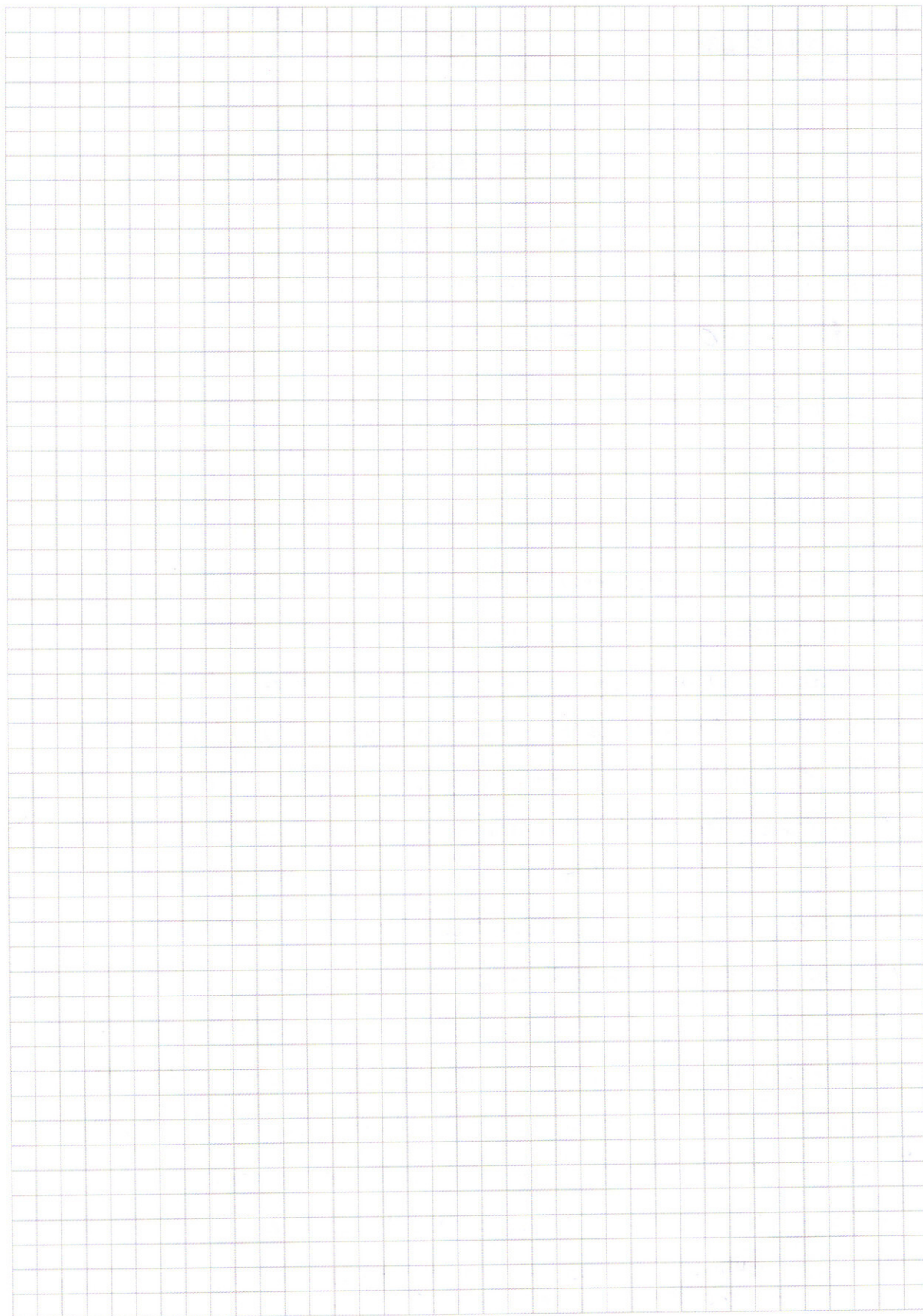
окружности с центрами O_3 и O_4 пересекают
квадрат и касаются его в точках N и M

тогда точки будут 4, что нам не подходит.

Заметно что если сдвинуть окружности

будут пересекать квадрат более чем в 2 точках,

до момента, когда окружности с центрами O_1 и O_2 будут
пересекать квадрат в точках N и M .



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) ^{Задача} такие случаи окружности с центрами O_3 и O_4 не будут касаться квадрата, можно это проверить

$$\text{в треугольнике } O_3CK \quad O_3K = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314}$$

$$\text{А в треугольнике } O_4PM \quad O_4M = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{514}$$

заметьте что $\sqrt{514} > \sqrt{314}$, тогда, так же подставим радиус, это радиус $\sqrt{514}$ $\sqrt{a} = \sqrt{514}$ $a = 514$
Можно записать ответ.

Ответ. $a = 514$, $a = 49$

1) Разложим 9261 на множители

$$9261 : 3 = 3087 \quad 3087 : 3 = 1029$$

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Найти количество 8-ми значных чисел с произведением 9261

в наименьшем могут содержаться

7, 7, 7, 9, 3, а остальные 1 либо 7, 7, 7, 3, 3, 3 и 1, 1

Можно также рассмотреть цифры по 8 позициям
На 1 место 8 цифр на 2, 7 цифр, и так далее
получаемся 8! способов, но так же можно
разделить на количество перестановок 7, 7, 7 и
количество перестановок 1, 1, 1, так как от
их перестановки число не меняется.

Получаем $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$ способов для (1) случая

Для 2 случая также $3!$ способ но есть еще
перестановки 3, 3, 3 поэтому получаем

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 20 \cdot 56$$

$$= 1000 + 120 = 1120 \text{ (способов) - для 1 случая}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 10 \cdot 56 = 560 \text{ (способов) для 2 случая}$$

$$\text{Всего } 560 + 1120 = 1680 \text{ способов}$$

Ответ: 1680 способов

3) Решить систему

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^4)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

решим три уравнения,
как квадратное относительно y

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = (x+4)^2 \quad \sqrt{D} = x+4$$

$$1) y_1 = \frac{x+4-3x+4}{2} = (-x+4)/2 \quad y_2 = \frac{x+4+x+4}{2} = x+4$$

1) $y=0$ тогда $\ln \frac{y}{x^4} = \ln 0$ по определению логарифма
 $\log_a b$, $b > 0$ тогда $\frac{y}{x^4} > 0$, откуда следует что
 $y=0$ - не корень

2) $y = x+4$ - значением области допустимых значений:
 $x > 0$ тогда так, как $\frac{y}{x^4} > 0$, то и $y > 0$

1) $y = -x+4$ 1 значение

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Преобразуем 1 график

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{-\ln \frac{x^4}{y}}$$

$$(x y^2)^{-2 \ln x} = y^{-4 \ln \frac{x}{y}}$$

прологифицируем последнее

$$\ln(x y^2) \cdot (-2 \ln x) = \ln y \cdot (-4 \ln \frac{x}{y})$$

$$(\ln x + 2 \ln y) (-2 \ln x) = (\ln y) \cdot (-4 \ln x - \ln y)$$

Сделаем замену Пусть $\ln x = a$ $\ln y = t$, тогда

$$(a + 2t)(-2a) = t \cdot (-4a - t)$$

$$-2a^2 - 4at = t \cdot (-4a - t);$$

$$-2a^2 - 4at = t^2 - 4at;$$

$$t^2 - 3at + 2a^2 = 0 \quad \text{на пути, наши преобразования}$$

равносильны тем, так как $x > 0$ и $y > 0$

$$t^2 - 3at + 2a^2 = 0 \quad / : a^2 \quad a \neq 0$$

$$\frac{t^2}{a^2} - 3 \frac{t}{a} + 2 = 0 \quad \text{Пусть } \frac{t}{a} = b, \text{ тогда}$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$b = 2 \quad b = 1 \Rightarrow 1) \frac{t}{a} = 2 \quad 2) \frac{t}{a} = 1$$

$$1) \frac{t}{a} = 2 \quad t = 2a \quad \ln y = 2 \ln x \quad \text{отсюда } y = x^2$$

тогда для этого (1) уравн составим систему

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4 = x^2 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 4 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad D = 1 + 16 = 17 \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} + 4 \end{cases} \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} + 4 \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + 4 \end{cases} \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + 4 \right) - \text{не подходит}$$

так, как $x > 0$

Подставим в систему (2) случай

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x(2-x) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{так, как } x > 0$$

$$x = 2, y = 4 \quad (2; 4)$$

Пусть теперь $\frac{1}{x} = 1$

$$\ln x = \ln y;$$

$$x = y;$$

Подставим 2) значение 2 уравнения $y = 2x$

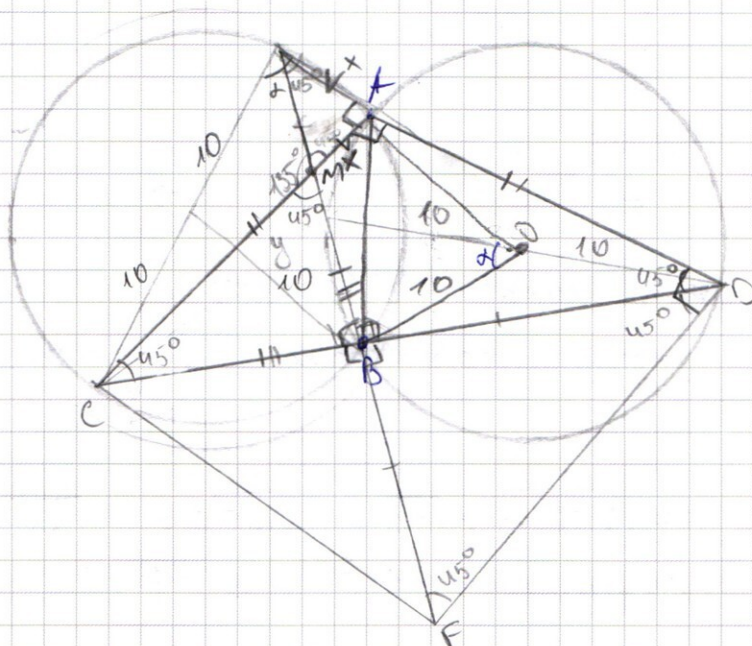
$$\begin{cases} x = y \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2x \\ y = 2x \end{cases}, \text{ тогда } x = 0, \text{ что нам не подходит}$$

Подставим 1 значение 2 уравнения

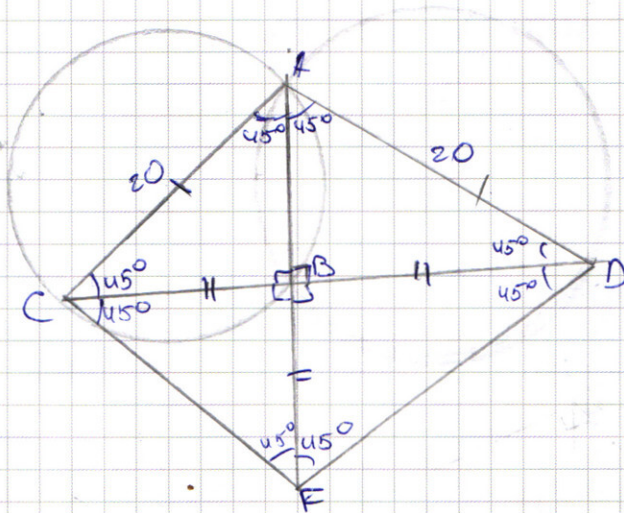
$$\begin{cases} x = y \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad (2; 2)$$

Ответ: пары значений $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} + 4 \right), (2; 4), (2; 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Проведем AB так, как окр. равны, то
 $\angle ACB = \angle ADB$ так, как они вписанные и
 опираются на одну равную дугу, тогда
 $\angle ACO = \angle ADC = 45^\circ$, тогда $AC = AD$, так, как
 Рассмотрим $\triangle ABD$ $\angle ABD$ вписанный опирается на
 AD $\angle ABC$ также вписанный и опирается
 на AC так, как окружности равны
 то и дуги ABC и ABD также, равны, тогда
 $\angle ABD + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$. Тогда получаем, что



Тогда из треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$)

Пусть $AB = x$ тогда по теореме Пифагора

$$x^2 + x^2 = 400$$

$$x^2 = 200$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 50} = 2\sqrt{50} = 2\sqrt{25 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$$

Из подобных треугольников ABC и FBC

$$CF = 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

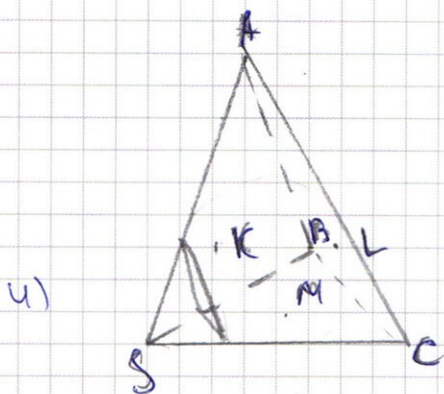
7) $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \quad (1)$

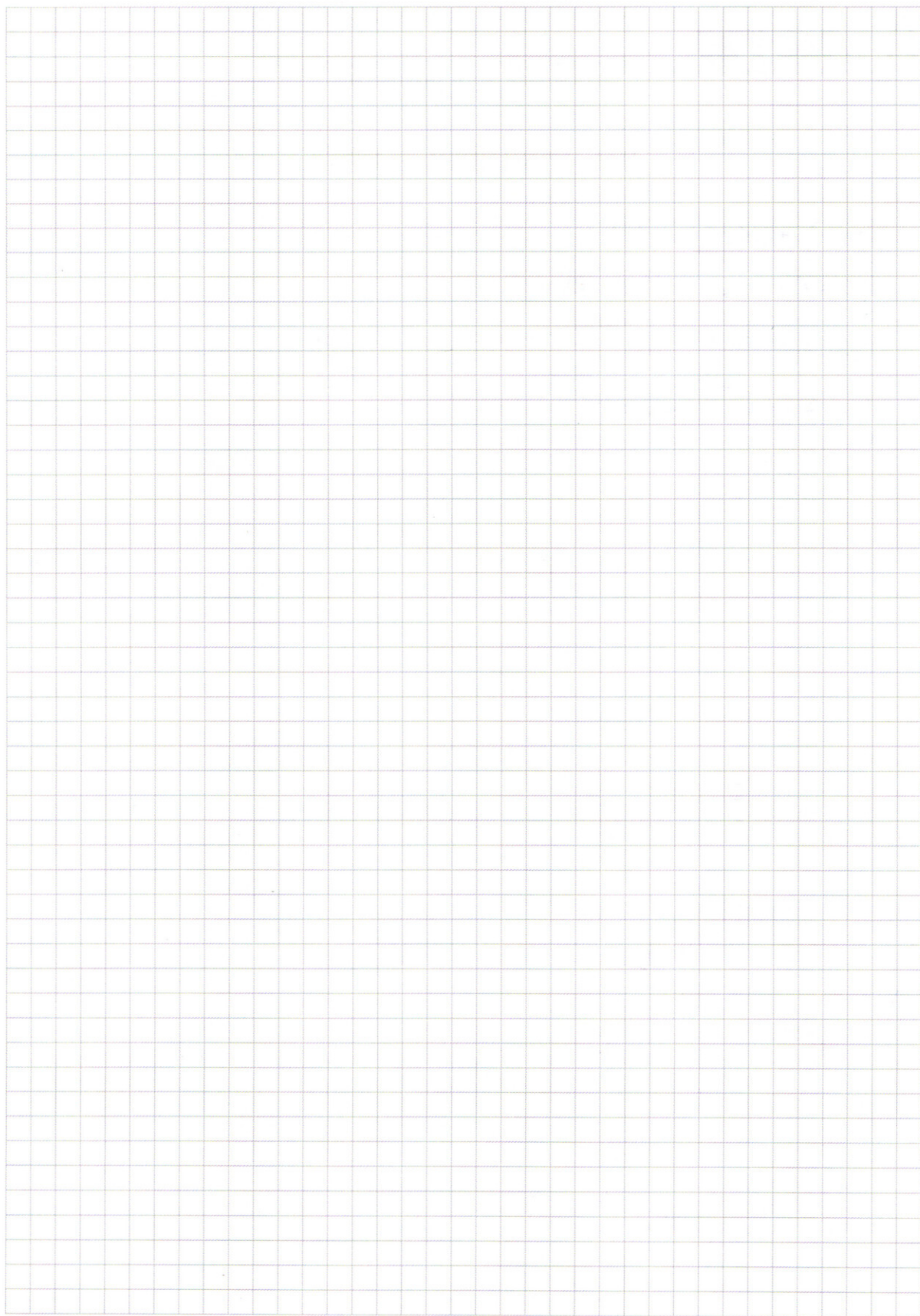
$y < 46 + 2(2^{32} - 1)x \quad (2)$

$y \geq 2^{34}(2^{x-34} + 3)$

$(1) \geq 3 \cdot 2^{34}$

$y < 46 + 2^{33}x - 2x$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 8x + \sin 5x = 0 \quad \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \checkmark$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \quad 0 + \sin 7x \cdot 1$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 4x) = \sin 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cos(2x + \sin x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x))$$

$$\cos 9x - \cos 5x$$

$$\cos 9x = \cos(5x + 4x) =$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2}) \quad \text{в нашем случае}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin$$

$$\sqrt{2} (\cos(2x - \frac{\pi}{4}))$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

max

$$\sin 7x = \sin(4x + 3x)$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x \quad 2 \cos x (\cos x + \sin x) - 1$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 8x + \sin 5x = 0$$

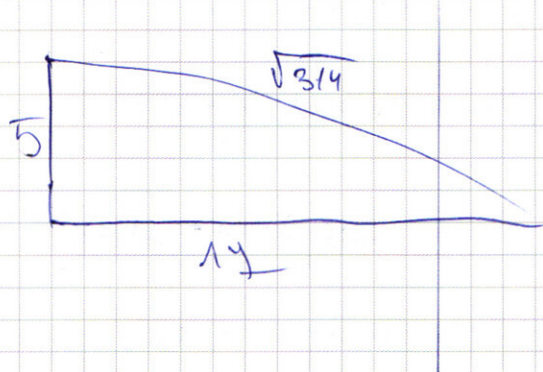
$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 0$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$289 + 225 = 514$$



$$289 + 25$$

$$(314)$$

$$1) \begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 21 \overline{) 387} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 58 \overline{) 0} \\ 3 \overline{) 9610} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3087 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 9261} \end{array}$$

$$9261 : 3 = 3000 +$$

$$80 + 4$$

$$3087$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 9} \\ 38 \overline{) 343} \\ 27 \end{array}$$

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 343$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 343 \overline{) 9} \end{array}$$

$$(3087)$$

$$343 \overline{) 14}$$

$$\begin{array}{r} 843 \overline{) 14} \\ 63 \overline{) 49} \end{array}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 7$$

$$14 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$20 \cdot 50 = 1000$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 56 \overline{) 120} \\ 10 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - ay = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

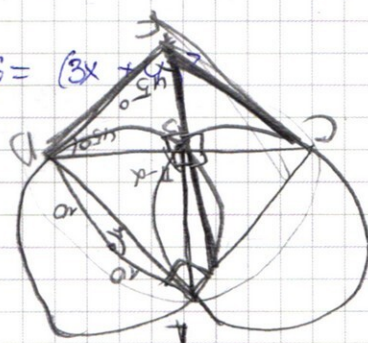
$$y = 0 \quad y = x + 4$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{x+4}{y}}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x}}$$

$$(xy^2)^{-2\ln x} = y^{-4\ln \frac{x}{y}}$$

$$y^{-\ln \frac{x+4}{y}} = -4 \ln \frac{x}{y}$$



$$\ln x y^2 \cdot (-2 \ln x) = \ln y \cdot (-4 \ln \frac{x}{y}) \quad \ln x = 0 \quad \ln y = t$$

$$(\ln x + 2 \ln y^2) - 2 \ln x = \ln y \cdot -4 (\ln x - \ln y)$$

$$(a+2t) \cdot (-2a) = t \cdot -4(a-t)$$

$$-2a^2 - 4at = -4t^2 - 4at \quad 2a^2 + 4at + 4t^2 = 0$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x > 0 \quad y \geq 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 46 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y < 46 + 2^{33} - 2x$$

$$3 \cdot 2^{34} \leq y \leq 2^{33} + 46 - 2x$$

6)

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 46 + 2^{33}x - 2x$$

$$\frac{AB}{\sin 45} = 2R$$

$$AB \sin 45^\circ = 2R$$

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 20$$

$$AB = \frac{100}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$$

$$AO = 10$$

$$\frac{\sqrt{2} AB}{2} = 2R \approx 20$$

$$AB \approx 20\sqrt{2}$$

$$AB = 10\sqrt{2}$$

$$200 = 100 + 100 + 2 \cdot 100 \cdot \cos \Rightarrow \cos$$

$$200 = 100 + 100 + 2 \cdot 100 \cdot \cos x$$

