

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3}.) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}.$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0$$

В левой части уравнения можно сделать вывод о том, что $y > 0$, а в правой: $-xy > 0$, значит, $x < 0$.

Итак $x < 0, y > 0$. Пусть $a = -x > 0$.

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = \left(\frac{a^4}{y^2} \right)^{\lg y}, \quad (-x)^{\lg(-xy)} = a^{\lg ay}.$$

Тогда из уравнения получим:

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = a^{\lg ay}, \quad a^4 \lg y - \lg ay = y^2 \lg y; \quad \text{так как } a^4 \lg y - \lg ay = \lg a y^2 \lg y =$$

$$= 4 \lg y - \lg ay = 2 \lg y \lg ay.$$

$$\text{то } \lg ay^2 = \frac{\lg y}{\lg a} \Rightarrow 4 \lg y - \lg a - \lg y = \frac{2 \lg^2 y}{\lg a}.$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg a - \lg y + \lg^2 a = 0$$

$$D = 9 \lg^2 a - 8 \lg^2 a = \lg^2 a.$$

$$\lg y = \frac{3 \lg a \pm \lg a}{2} = \begin{cases} \lg a \\ \frac{1}{2} \lg a \end{cases}$$

1) Пусть $\lg y = \lg a \Rightarrow y = a, y = -x; x = -y.$

из уравнения: $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0 \Rightarrow 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 6y = 0;$

$2y^2 - 2y = 0, 2y(y-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$ не подходит. Только $y=1, x=-1.$

2) Пусть $\lg y = \frac{1}{2} \lg a; \lg y^2 = \lg a, a = y^2; -x = y^2 \Rightarrow x = -y^2.$

$2y^2 + y^3 - y^4 + y^2 - 6y = 0; -y^4 + y^3 + 3y^2 - 6y = 0, \text{ т.к. } y > 0, \text{ то}$

$y^3 - y^2 - 6y + 6 = 0. y=2 - \text{корень, т.к. } 8 - 4 - 12 + 6 = 4 - 12 + 6 = 12 - 12 = 0.$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 8y + 8 = 0 & y-2 \\ \underline{y^3 - y^2} & y^2 + y - 4 \\ -y^2 + 8y & \\ \underline{-y^2 + 2y} & \\ -4y + 8 & \\ \underline{-4y + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(y-2)(y^2+y-4) = 0.$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 - \text{не подходит} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; x = y^2 - \frac{1}{y} (18 - 2\sqrt{17}) = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 2; x = -4.$$

ответы: 2; 2

$$(-2; 2)$$

$$(-4; 2); \left(-\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right).$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1.} & 16875 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3.$$

Значит наименьшее восьмизначное число может быть в виде:

1) $4 \cdot 5^4$, $3 \cdot 3^3$ и $1 \cdot 1^1$. Всего таких чисел:

а) пусть все тройки рядом: $(5 \cdot 6) \cdot 30$.

$$\begin{array}{r} 5555 \\ +1111 \end{array}$$

став. между 5

б) пусть две тройки рядом: $(5) \cdot (4) \cdot (7) = 140$.

став. 1 ↔ 2, 5 ↔ 3, 3.

$$\begin{array}{r} 5555 \\ +1111 \end{array}$$

$$5 \times \begin{array}{r} 555 \\ +111 \end{array}$$

$$5 \times \begin{array}{r} 5554 \\ +1111 \end{array}$$

$$30 \quad 150$$

в) пусть ни одна тройка не рядом: $(5) \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 600$.

став. 1

$$\begin{array}{r} 5555 \\ +1111 \end{array}$$

$$51555 \\ +1111111$$

$$5 \times 1555 \\ +1111$$

$$5 \times 1 \times 5555 \\ +1111$$

$$5 \times 15 \times 555 \\ +1111$$

$$\text{Всего } 600 + 140 + 70 = 770.$$

2) $4 \cdot 5^4$, $1 \cdot 3^3$, $4 \cdot 9^4$ и $2 \cdot 1^1$ Всего таких чисел:

а) пусть все оци. рядом: $(5 \cdot 6) \cdot 7 = 210$

$$\begin{array}{r} 555539 \\ +1111111 \end{array}$$

разст. 349

$$30 \quad 210$$

б) пусть все оци. не рядом: $(5 \cdot 6) \cdot 7 \cdot 6 = 1260$.

$$\begin{array}{r} 555539 \\ +1111111 \end{array}$$

$$5515539 \text{ разст. } 349$$

$$5: 1260 + 110 = 1470.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всего комбинаций: $1440 + 720 = 2240$

Ответ: 2240.

$$\sqrt{2} \cdot \cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \left(\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\sin 7x \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - \cos 7x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \left(\cos 3x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 3x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$-\sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$-\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x = \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right).$$

используем формулы $\cos x = \cos y$, $x = a+b$; $y = a-b$.

$$\cos(x) - \cos(y) = \cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b =$$

$$- \sin a \sin b = -2 \sin a \sin b. \text{ Можно заметить, что } a = \frac{x+y}{2}; b = \frac{x-y}{2}.$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

$$\text{Тогда: } -\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = -2 \sin \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right).$$

$$-2 \sin \left(\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = -2 \sin \left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \sin \left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right) =$$

$$\sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{8} \right).$$

$$1) \sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n; \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n; x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi n.$$

$$2) \cos \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{7x}{2} \right).$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

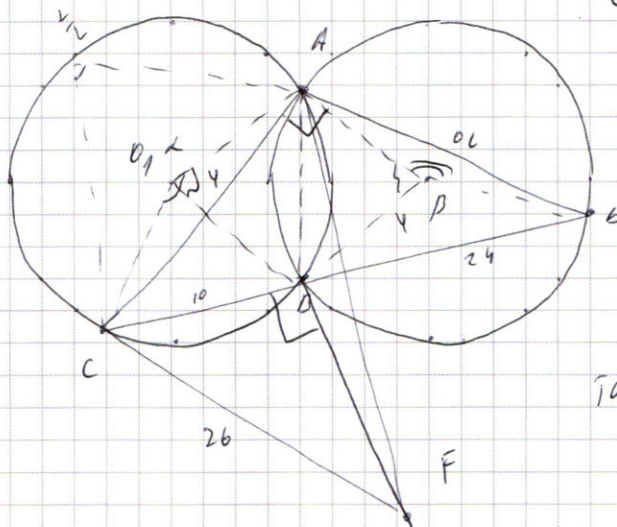
$$\sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{7x}{2} \right) - \sin \left(\frac{13x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0; 2 \sin \left(\frac{\frac{5\pi}{8} - 10x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x + \frac{3\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - 10x \approx 2\pi n \Rightarrow 10x \approx \frac{\pi}{2} - 2\pi n; \quad x \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\pi n.$$

$$3x + \frac{1}{4}\pi \approx 2(\frac{\pi}{2} + \pi n); \quad 3x + \frac{1}{4}\pi \approx \pi + 2\pi n; \quad x \approx \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n.$$

Ответ: $x \approx \frac{\pi}{20} + \frac{2}{7}\pi n; \quad x \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\pi n; \quad x \approx \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$

№6.



4) Заметим, что $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CO_1B$,

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BO_2D$$

$$\angle CAB + \angle BAD = \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{2} \angle CO_1B + \frac{1}{2} \angle BO_2D; \quad \angle CO_1B \in \angle CO_1O_2 \cap \Pi.$$

Пусть, $\angle AO_1B = \angle AO_2B = \varphi$;

$$\angle AO_1C = \alpha; \quad \angle AO_2D = \beta.$$

$$\text{Тогда: } \alpha - \varphi + 2\pi - \beta - \varphi = \pi$$

$$\alpha - \beta - 2\varphi = \pi; \quad \beta + \varphi - \alpha = \pi.$$

По Пт. применяем закон о $\triangle CO_1B$: $CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\alpha - \varphi)$

По Пт. применяем закон о $\triangle BO_2D$: $BD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(2\pi - \varphi - \beta) = 2R^2 - 2R^2 \cos(\varphi + \beta)$, но $\varphi + \beta = \pi + \alpha - \varphi \Rightarrow BD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(\pi - \alpha - \varphi) = 2R^2 + 2R^2 \cos(\alpha + \varphi)$.

$$\text{Тогда } CF^2 = CB^2 + BD^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos(\alpha - \varphi) + 2R^2 + 2R^2 \cos(\alpha + \varphi)$$

$$CF = 2R \Rightarrow \boxed{CF = 26}$$

2) По Пт. применяем. $BF = BD = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{516} \approx 22.7$

$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha; \quad AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta.$$

$$AC^2 + AD^2 = BC^2 \Rightarrow 4R^2 - 2R^2(\cos \alpha + \cos \beta) = 34^2.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{4R^2 - 34^2}{2R^2} = \frac{(26)^2 - 34^2}{2 \cdot 13^2} = \frac{60 \cdot 8}{2 \cdot 13^2} = \frac{240}{13^2}$$

Из $\triangle CO_1B$: $10^2 = 2R^2(1 - \cos(\alpha - \varphi))$; $\cos(\alpha - \varphi) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$.

Из $\triangle BO_2D$: $\cos(2\pi - \beta - \varphi) = \cos(\beta + \varphi) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle CBA = \frac{2\pi - \alpha}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{т.к. оцентр. на } AC)$$

Аналог, $\angle AOB = \frac{\beta}{2}$; $\angle COB = \angle AOB + \angle CBA = \pi \Rightarrow \alpha = \beta$.

Тогда $\cos \alpha = \frac{120}{169}$.

$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha = 2 \cdot 169 + 2 \cdot 169 \cdot \frac{120}{169} = 578.$$

Тогда $\cos \angle ACB = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{578}}{34} = \frac{\sqrt{578}}{\sqrt{1156}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle ACO = \frac{\pi}{4}$.

$$\cos \angle BCF = \frac{5}{13}; \quad \sin \angle BCF = \frac{12}{13}.$$

Тогда $\sin \angle ACF = \sin(\angle BCF + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \frac{17}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \sqrt{578} \cdot \frac{17}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{578} \cdot 2}{2} \cdot 17 = 17^2 = 289.$$

Ответ: $(S \geq 26)$; $(S \geq 289)$.

5. реш. вып-е: $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$.

1) $y > 0$: $x > 6+y$: $x-6-y + x-6+y = 12$; $2x = 24$; $x = 12$; $y \leq 6$.

$6-y < x < 6+y$: $-x+6+y + x-6+y = 12$; $y = 6$; $x = 12$.

то есть, т.к. $6-y < 6+y$, т.к. $2y > 0$.

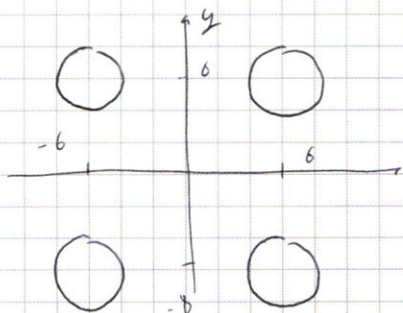
$x < 6-y$: $-x+6+y - x+6-y = 12$; $-2x = 0$; $x = 0$; $y \leq 6$.

2) $y < 0$: $x > 6-y$.

Аналогично рассуждали.

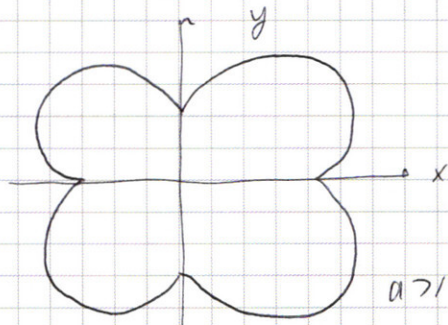
Графике указаны на след. странице.

$$(x-6)^2 + (y-0)^2 = a.$$

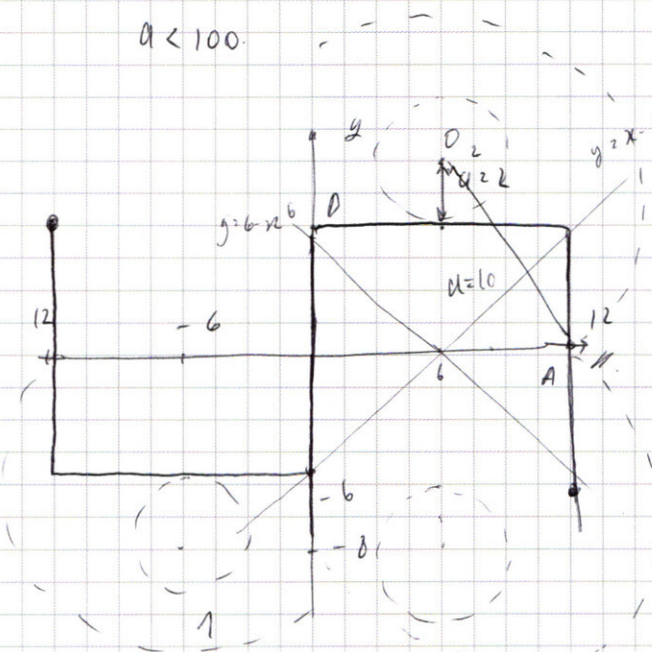


$$a < 100.$$

$$(x-6)^2 + (y-0)^2 = 4$$



$$a > 100.$$



$$x > 6+y; y < x-6. \quad x \geq 12$$

$$x < 6-y; y < 6-x. \quad x \leq 0$$

$$\begin{cases} x < 6+y \\ x > 6-y \end{cases} \quad \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$y \geq 6.$$

2) $y < 0$ аналогично

Видно, что касается окружность тогда $a = \sqrt{2}$. Тогда окружность касается координат. Частично

$a \geq 10$, Тогда окружность проходит через т. А и не касается через Б.

$$i. e. a < 10^2$$

Ответ: $a = \sqrt{2}, 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 5625 \\ 1425 \\ 225 \\ 45 \\ 9 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 5625 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 5625 \\ -5 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 1 \\ -1 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 1125 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ -12 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 225 \end{array} \right.$$

1) $6 \cdot 5''$ $1 \cdot 9''$ и $1 \cdot 1''$.

2) $6 \cdot 5'$ и $2 \cdot 3''$.

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Ставим нульпять, 1' + способ

56

а затем 9 - способ $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

2) Если 2 тройки вместе: 7 см.

$-(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

Если они отдельно: $7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2$

3 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

$(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$56 + 42 + 7 = 56 + 49 = 105$.

$2 \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$

✓ 1. $\cos 4x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 2x$

$\sin 7x + \sin 2x = \sin(5x + 2x) + \sin(5x - 2x) = 2 \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x +$

$+ \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$.

$\cos 7x + \cos 3x = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x =$

$2 \cos 5x \cos 2x$.

$2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$

$\sqrt{2} \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x \cdot 2$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x); \cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}); \cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$

$2 \sqrt{2} \cos 2x \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$.

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_2(-x)} \log_2(-xy) = (-2)^{\log_2(-x)} \cdot (-x)^{\log_2 y}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

$$y > 0$$

$$x < y$$

$$x \geq 1$$

$$y \geq 1$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 4x + 4) - xy - 8 + 4 = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x-2)^2 - xy + 4 < 4$$

$$2+1-1+4-6=0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \right) - \cos(10x) = 0$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$2 \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) = \cos 10x$$

$$\log_2 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x}$$

$$2y^2 - (x+6)y - (x^2+4x) = 0$$

$$\log_2 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 88x + 64 = 8(x^2 + 6x + 8)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0$$

$$(x-2)^2 > 4$$

$$2(y-2)^2 < 8$$

$$x^2 + x(4+y) + 18y - 2y^2 = 0$$

$$(y-2)^2 < 4$$

$$2 = 10 + 4y + y^2 + 32y - 8y^2$$

$$-2 < y < 6, y > 0: 0 < y < 6$$

$$\frac{x^4 \log y}{y^2 \log y} = 0$$

$$\text{при } a = x > 0$$

$$\frac{a^4 \log y}{y^2 \log y} = a^4 \log a \cdot y \log y$$

$$a^4 \log a = y \log y^2$$

$$a^4 \log y - \log a y = y^2 \log y$$

$$a^4 \log y - \log a = y^2 \log y$$

$$\frac{52}{58} - \frac{45}{55} = \frac{529}{5555}$$

$$\frac{52891}{51555} \times$$

$$\frac{54}{5455} \times$$

$$\frac{52}{51} - \frac{41}{53} = \frac{521}{549}$$

$$\frac{52}{58} - \frac{45}{55} = \frac{529}{5555}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2xy^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0.$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - xy - 4 = 0.$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 = xy + 4.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$$

$$x < 0$$

$$y > 0$$

$$x^2 - x > 0.$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} (-x)^{\lg(1-xy)}.$$

$$\left(\frac{a^4}{y^2}\right)^{\lg y} = a^{\lg ay}$$

$$a^{4\lg y - \lg ay} = y^{2\lg y}.$$

$$4\lg y - \lg ay = 2\lg y \lg a y.$$

$$2\lg y \frac{\lg y}{\lg a}.$$

$$4\lg y - \lg a - \lg y = \frac{2\lg y}{\lg a}.$$

$$2\lg^2 y - 3\lg a - \lg y + \lg^2 a = 0.$$

$$0 = \lg a.$$

$$\lg y = \frac{3\lg a + \lg a}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \lg a \\ \lg y \end{array} \right]$$

$$1) \lg y = \lg a$$

$$y = a.$$

$$4\lg^2 = 2\lg^2.$$

$$2\lg^2 = 2\lg^2.$$

$$2\pi \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0.$$

$$2\pi \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\pi.$$

$$2\pi \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\pi.$$

$$8 + 8 - 4 + 16 - 4 = 0$$

$$8 + 4 - 4 + 8 - 16 = 0$$

$$y^3 - y^2 + y + 8 = 0.$$

$$3 + 6 - 2 - 24 + 8$$

$$8 - 4 - 12 + 8.$$

$$y^3 - y^2 - 3y + 8 = 0.$$

$$-8 - 4 + 6 + 8$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8$$

$$8 - 4 - 12.$$

$$\left(\frac{256}{4}\right)^{\lg 2}; \quad 64\lg^2 = 2\lg^2.$$

$$4\lg 8 = 2 \cdot 3\lg^2 = 2\lg^2.$$

$$8 + 8 - 16 + 16 - 16 = 0$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2} \cdot \frac{12}{13}\right) = 1.$$

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{5}{13}.$$

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{12}{13}.$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{12}{13}.$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x \cdot 2 \sin 7x + \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\cos x - \cos y =$$

$$\cos(a+x) - \cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x -$$

$$- \cos a \cos x + \sin a \sin x = -2 \sin a \sin x$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) = -2 \sin$$

$$a+x = x$$

$$a-x = y$$

$$-\sin(7x - \frac{\pi}{4}) = -2 \sin(\frac{13x + \pi}{2}) \sin(\frac{7x - \pi}{2})$$

$$a = \frac{x+y}{2}$$

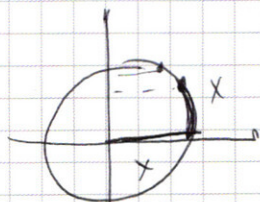
$$\sqrt{2} (\cos 7x \sin \frac{\pi}{4} - \sin 7x \cos \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)$$

$$x = \frac{x-y}{2}$$

$$2 \sin(\frac{7x - \pi}{2}) \cos(\frac{7x - \pi}{2}) = 2 \sin(\frac{13x + \pi}{2}) \sin(\frac{7x - \pi}{2})$$

$$\sin(\frac{7x - \pi}{2}) (\cos(\frac{7x - \pi}{2}) - \sin(\frac{13x + \pi}{2})) = 0$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) =$$



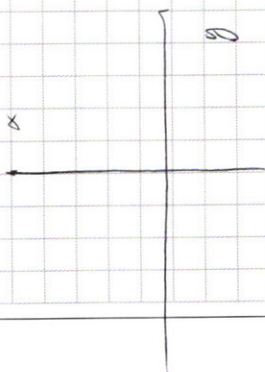
$$\sin a \cos b + \sin b \cos a =$$

$$- \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a = 2 \cos a \sin b$$

α: 60°
β: 30°

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 15^\circ \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$$



$$\sin \alpha \cos \beta = (\sin \alpha \cos \beta) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \sin 2\alpha \cos 2\beta$$

$$(\sin \alpha \cos \beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \cdot \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma) = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \gamma + \sin \gamma (\sin \alpha - \sin \beta).$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos \alpha - \beta = 2\gamma - \pi; \quad \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi - 2\gamma}{2} \right) = \sin \gamma.$$

$$2\pi - \angle COA \text{ вып. на } AC \text{ и } CB \text{ (тогда } \angle COA = \angle COB = 2\pi - \alpha = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Решим: } \angle AOB = \frac{\pi}{2}, \quad \angle AOB + \angle COB = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

$$\cos \alpha = -\frac{120}{13^2} = -\frac{120}{169}$$

$$\text{Итого } AC^2 = 21^2 - 21^2 \cos \alpha = 21^2 \left(1 - \cos \alpha \right) = 21^2 \left(1 + \frac{120}{169} \right) = 21^2 \frac{289}{169} = 578.$$

$$\text{Тогда } \cos \angle ACP = \frac{AC}{CP} = \frac{\sqrt{578}}{34} = \frac{\sqrt{578}}{34}.$$

$$\sin \angle ACP = \sqrt{1 - \frac{578}{34^2}} = \frac{\sqrt{478}}{34} = \frac{\sqrt{478}}{34}.$$

$$\cos \angle BCF = \frac{5}{13}; \quad \sin \angle BCF = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle ACF = \sin (\angle ACP + \angle BCF) = \frac{5\sqrt{122}}{13 \cdot 17} + \frac{12\sqrt{142}}{13 \cdot 17}.$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \sqrt{578} \cdot 26 \cdot \frac{5\sqrt{122} + 12\sqrt{142}}{13 \cdot 17} =$$

$$= \frac{2\sqrt{142}}{17} \cdot (5\sqrt{122} + 12\sqrt{142}).$$

$$\text{Ответ: } CF = 226; \quad S = \frac{2\sqrt{142}}{17} (5\sqrt{122} + 12\sqrt{142}).$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\angle ACP + \angle BCF) = \frac{1}{13 \cdot 34} (5\sqrt{478} + 12\sqrt{578}).$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{578} \cdot 26 \cdot \frac{1}{13 \cdot 34} (5\sqrt{478} + 12\sqrt{578}) =$$

$$= \frac{\sqrt{578}}{34} (5\sqrt{478} + 12\sqrt{578}) = \frac{1}{12} (5\sqrt{478} + 12\sqrt{578}) = 5\sqrt{236} + 12 \cdot 17 =$$

$$= 204 + 5\sqrt{236}$$

Задание: (SF=26);

$$S = 204 + 5\sqrt{236}$$

$$x > 6 + y$$

$$1) y > 0:$$

$$x > 6 + y: x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$x = 24.$$

$$6 - y < x < 6 + y$$

$$6 - y < x < 6 + y$$

$$z = 6$$

$$12$$

$$12$$

$$|x - 10| + |x - 4| = 12$$

$$|x - 10| + |x - 2| = 12$$

$$y = x - 6$$

$$|-2 - y| + |-2 + y|$$

$$|54 - y| + |54 + y| = 12$$

$$y = 6:$$

$$y = 5:$$

$$|x - 11| + |x - 11|$$

$$|x$$

$$|x - 106|$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solutions on grid paper for a geometry problem involving two circles and a line.

Top Left: Calculations for the radius of a circle passing through points A(2, 15) and B(2, 13).
 $2 \cdot 15^2 - 2 \cdot 13^2 = 104$
 $\frac{104}{20} = 5.2$
 $\frac{104}{20} = 5.2$

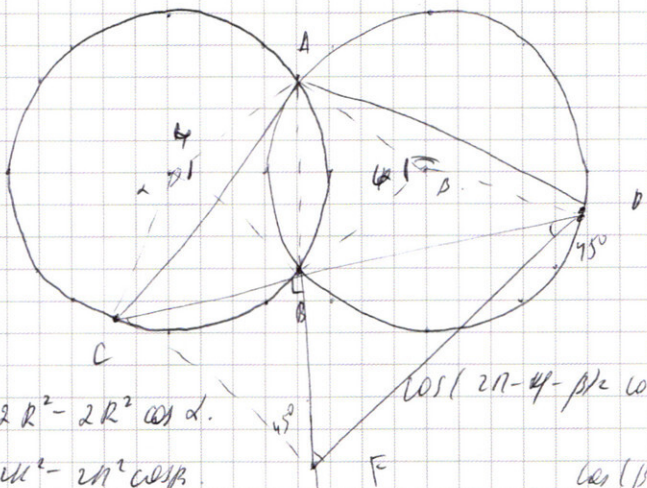
Top Right: A geometric diagram showing two circles intersecting at points A and B. A line segment AB is drawn, and a perpendicular bisector is shown. Points C and D are marked on the circles. Calculations for the radius R are shown:
 $R^2 = 10^2 + 6^2 = 136$
 $R = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$

Middle Left: Equations for the intersection of two circles:
 $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$
 $(x-6)^2 + (y-0)^2 = 100$

Middle Right: A coordinate system with x and y axes. A line segment is drawn, and its midpoint is marked. Calculations for the distance from the origin to the line are shown:
 $10^2 = 2 \cdot 26^2 (1 - \cos(2-\varphi))$
 $\cos(2-\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2$
 $\cos(2-\varphi) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $2 \sin^2 \varphi = 1$
 $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$
 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\varphi = 45^\circ$

Bottom Left: A coordinate system with x and y axes. A line segment is drawn, and its midpoint is marked. Calculations for the distance from the origin to the line are shown:
 $10^2 = 2 \cdot 26^2 (1 - \cos(2-\varphi))$
 $\cos(2-\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2$
 $\cos(2-\varphi) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $2 \sin^2 \varphi = 1$
 $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$
 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\varphi = 45^\circ$

Bottom Right: A coordinate system with x and y axes. A line segment is drawn, and its midpoint is marked. Calculations for the distance from the origin to the line are shown:
 $10^2 = 2 \cdot 26^2 (1 - \cos(2-\varphi))$
 $\cos(2-\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{12}{13}\right)^2$
 $\cos(2-\varphi) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $\cos(2+\varphi) = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$
 $2 \sin^2 \varphi = 1$
 $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$
 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\varphi = 45^\circ$



$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$$

$$AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta$$

$$CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\alpha - \gamma)$$

$$DB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (\beta + \gamma) = 2R^2 - 2R^2 \cos (\pi - \alpha - \gamma) = 2R^2 + 2R^2 \cos (\alpha + \gamma)$$

$$AC^2 + DB^2 = (2R)^2$$

$$CF^2 = CB^2 - BF^2 = CB^2 - BE^2 = 2R^2 (\cos (\beta + \gamma) - \cos (\alpha - \gamma)) = 2R^2$$

$$\alpha - \gamma + 2\pi - \gamma - \beta = \pi; \quad \alpha - \beta - 2\gamma = \pi; \quad \beta + 2\gamma - \alpha = \pi$$

$$CB^2 + DB^2 = 4R^2$$

$$R^2 \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2 \gamma$$

$$\sin^2 \gamma$$

$$\alpha - \gamma = \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{13} \right)^2 \right)$$

$$\alpha + \gamma = \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{16}{17} \right)^2 \right)$$

$$2\alpha = \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{13} \right)^2 \right) + \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{16}{17} \right)^2 \right)$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2}$$

