

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N=1 $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Чтобы получить восьмизначное число, произведение цифр которого равно 64827, необходимо использовать цифры 3, 7, 1, т.к. среди простых делителей числа 64827 присутствуют только 3 и 7. А произведение данных цифр уже будет восьмизначным числом.

П.к. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$ - сами цифры определены, и восьмой может быть только 1, т.к. других ~~же~~ ~~то~~ цифр делителей нет.

Тогда вопрос ~~то~~ задачи можно переформулировать так: сколько восьмизначных чисел можно составить из цифр: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 1

Найдём сколько семизначных чисел можно составить из 3 и 7.

$$C_{4+3}^3 = C_7^3$$

И из каждого семизначного числа можно получить восьмизначное подстановкой 1 в 8 мест $\Rightarrow$ 8 чисел

$$\begin{aligned} \text{Тогда всего восьмизначных чисел } 8C_7^3 &= 8 \frac{7!}{3!4!} = \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280 \end{aligned}$$

Ответ: 280

N=5
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

$x+y+8 \geq 0 \quad x-y+8 \geq 0$

$y \geq -x-8 \quad y \leq x+8$

1.1) $y \geq -x-8; y \leq x+8$

$x+y+8 + x-y+8 = 16$
 $2x+16=16 \quad x=0$

1.2) $y \geq -x-8, y > x+8$

$x+y+8 - x+y-8 = 16$
 $y=8$

1.3) $y < -x-8, y \leq x+8$

$-x-y-8 + x-y+8 = 16$
 $y=-8$

$$1.4) \quad y < -x - 8, \quad y > x + 8$$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$-2x = 32 \quad x = -16$$

$$2) \quad (x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a$$

$$2.1) \quad x \geq 0; y \geq 0$$

$$(x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a$$

$$2.2) \quad x \geq 0; y < 0$$

$$(x - 8)^2 + (-y - 15)^2 = a$$

$$2.3) \quad x < 0; y \geq 0$$

$$(-x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a$$

$$(x - 8)^2 + (y + 15)^2 = a$$

$$(x + 8)^2 + (y - 15)^2 = a$$

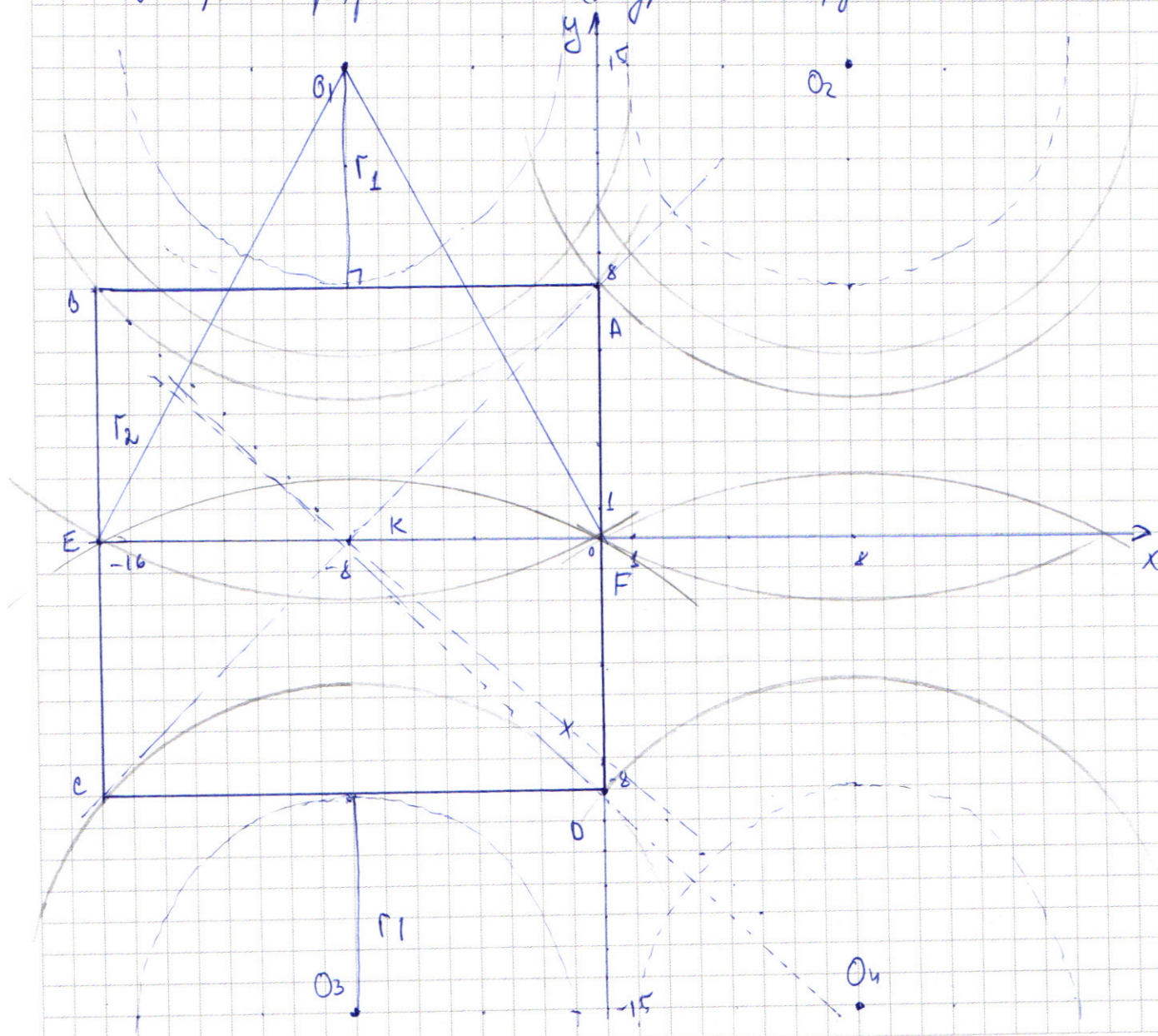
$$2.4) \quad x < 0; y < 0$$

$$(x + 8)^2 + (y + 15)^2 = a$$

Построим графики 1 и 2.

2.1, 2.3, 2.3, 2.4 - уравнения окружностей с радиусом $\sqrt{a}$

(2 - уравнение окружности)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Система будет иметь два решения, если окружности с центрами O_1 и O_2 будут касаться, т.е. прямых AB и CD соответственно; а также если эти окружности с центрами O_1 , O_2 будут проходить через точки $(0; 6)$ $(-16; 0)$

$$r_1 = 15 - 8 = \sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$$

По теореме Пифагора для $\triangle EOK$ $r_2^2 = EK^2 + OK^2 =$
 $= 8^2 + 15^2 = 17^2$ $r_2 = \sqrt{a} \Rightarrow r_2^2 = a = 289$

Ответ: при $a = 49$ и $a = 289$ система будет иметь ровно два решения

№ 3
$$\begin{cases} (-\frac{x^2}{y}) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^3) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \quad y^2 + y(2x+4) - (3x^2 - 12x) = 0$$

$$D = (2x+4)^2 + 4(3x^2 - 12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = (4x - 4)^2$$

$$y = \frac{2x+4 \pm |4x-4|}{2} = x+2 \pm |2x-2|$$

1) ОДЗ: $\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$(2) \quad y = x+2 \pm |2x-2|$$

2.1) $2x-2 \geq 0 \quad x \geq 1$

$$y = x+2 + 2x-2 = 3x \quad (A)$$

$$y = x+2 - 2x+2 = -x+4 \quad (B)$$

2.2) $2x-2 < 0 \quad x < 1$

$$y = x+2 - 2x+2 = 4-x$$

$$y = x+2 + 2x-2 = 3x$$

(A) $y = 3x$ подставим в 1-ое

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$2\ln(xy^2) = 2 \cdot (\ln x + \ln y^2) = 2\ln x + 4\ln|y|$$

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = \left(-\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(-3x)}$$

$y = 3x$ - не подходит, т.к. по ОДЗ 1 уравнения
 $y < 0$, а $x > 0$

Рассмотрим второй случай (Б) $y = 4 - x$

$$\left(\frac{-x^7}{4-x}\right)^{\ln(x-4)} = x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln|4-x|}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$$

$$-x^{7\ln(x-4)} = (4-x)^{\ln(x-4)} \cdot x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln|4-x|}$$

$$4-x < 0 \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow \ln|4-x| \Rightarrow \ln(x-4)$$

$$-x^{7\ln(x-4)} = (4-x)^{\ln(x-4)} \cdot x^{2\ln x} \cdot x^{4\ln(x-4)}$$

$$x^{7\ln(x-4)} = (4-x)^{\ln(x-4)} \cdot (4-x)^{\ln(x-4)} \cdot x^{2\ln x}$$

$x = 1$ - пробир

$$\left(\frac{x^{\ln x}}{x^{\ln x}}\right)^2 = \left(\frac{x^{\ln x}}{x^{\ln x}}\right)^2 = \left(\frac{x^{\ln x}}{x^{\ln x}}\right)^2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^4 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^4 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^4 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^4$$

$$x \neq 0$$

$$\left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3$$

$$\frac{x^{3\ln(x-4)}}{x^{2\ln x}} = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3 = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)^3$$

$$\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}} = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right) = \left(\frac{x^{\ln(x-4)}}{x^{\ln(x-4)}}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$N \equiv 2 \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) \cdot \cos 2x + 2 \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos(5x) (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = -\cos 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) = 0$$

$$2 \cos 5x - \sqrt{2} (\cos 2x \sin \frac{\pi}{4} - \sin 2x \cos \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 5x - 2 \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 5x - 2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x - \cos(\frac{3\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$-2 \sin(\frac{5x + \frac{3\pi}{4} - 2x}{2}) \sin(\frac{5x - \frac{3\pi}{4} + 2x}{2}) = 0$$

$$\sin(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}) \sin(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \pi n \quad \text{или} \quad \frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{8} = \pi n$$

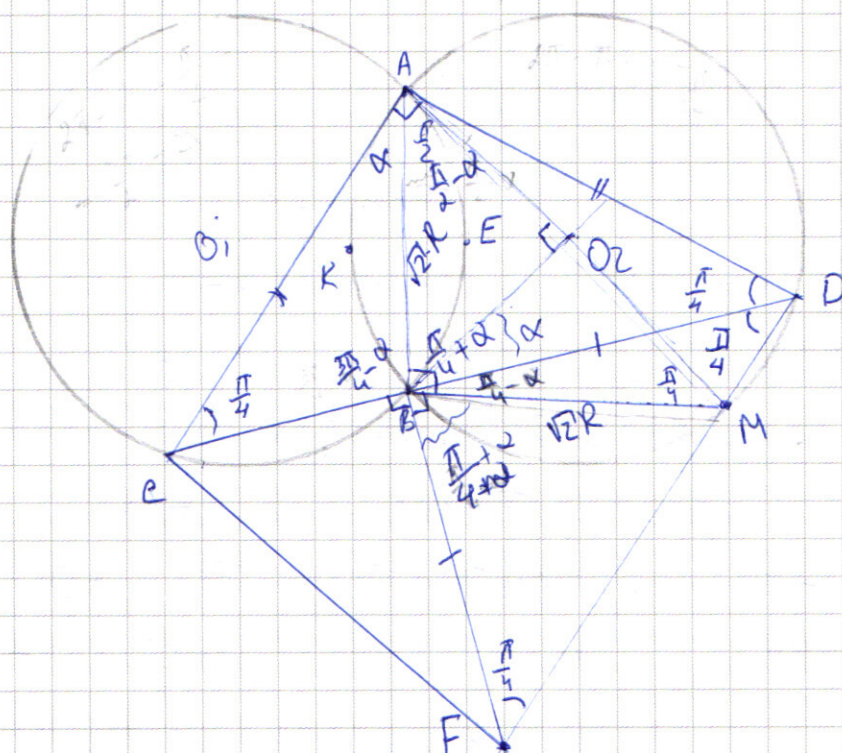
$$\frac{3}{2}x = -\frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$x = -\frac{2 \cdot 3\pi}{3 \cdot 84} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$x = \frac{2 \cdot 3\pi}{4 \cdot 84} + \frac{2\pi n}{7}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$; $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$



т.к. ~~по~~ по условию окружности равных радиусов, то дуги, заключенные между точками A и B, принадлежащие разным окружностям равны. т.е. $\angle AKB = \angle AEB$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AEB \text{ (по вписанной)}$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AKB \text{ (по вписанной)}$$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

$\triangle CAD$ - равнобедренный $\Rightarrow AC = AD$
(т.к. углы при основании равны)

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi - \angle CAD}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ т.к. сумма углов } \Delta = 180^\circ$$

$\triangle FBD$ - равнобедренный, т.к. по условию $BF = BD$

$\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF$ (т.к. в равнобедренном треугольнике углы при основании равны)

$$\angle FBD = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. } FB \perp CD$$

$$\angle BFD = \angle BDF = \frac{\pi - \angle FBD}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ т.к. сумма углов } \Delta = 180^\circ$$

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle BFD = \angle BDF = \frac{\pi}{4}$$

$$AC \parallel FD$$

т.к. соответствующие углы равны.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\triangle CAD \sim \triangle FBD \text{ (по двум углам)} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{FD}$$

$$FD = 2BD \cos \frac{\pi}{4} \text{ (из } \triangle FBD) \quad FD = 2BD \frac{\sqrt{2}}{2} = BD\sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{BD\sqrt{2}} \quad AD\sqrt{2} = CD$$

$$\triangle BAD - \text{вписанный} \Rightarrow \frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R$$

$$AB = \sin \frac{\pi}{4} \cdot 2R = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2R = \sqrt{2}R$$

$$\text{Пусть } \angle CAB = \alpha, \text{ тогда } \angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\angle CBA = \pi - \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{3\pi}{4} - \alpha \text{ (т.к. сумма углов } \triangle = 180^\circ \text{ из } \triangle CAB)$$

$$\text{Тогда } \angle ABD = \pi - \frac{3\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha \text{ (т.к. внешний } \angle \text{ к } \angle CBA)$$

$$\text{Из } \triangle CBA: AC = BC \cos \frac{\pi}{4} + AB \cos \alpha = BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}R \cos \alpha$$

$$\text{Из } \triangle ABD: AD = AB \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + BD \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}R \sin \alpha + BD \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = AD \Rightarrow BC \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}R \cos \alpha = BD \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}R \sin \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (BD - BC) = \sqrt{2}R (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\text{Пусть } AC = AD = x$$

$$\text{По т. синусов для } \triangle ACB: \frac{\sqrt{2}R}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{BC}{\sin \alpha} \quad \left(\frac{\sqrt{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\sin \alpha} \right)$$

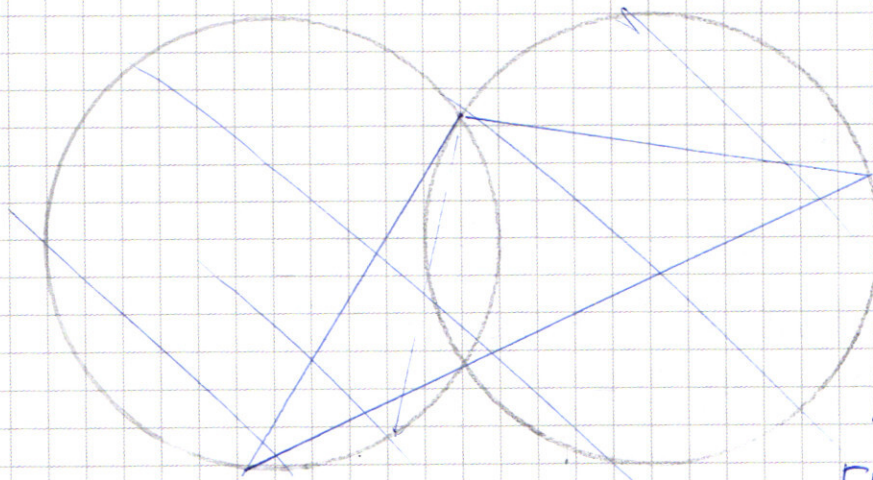
$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$\text{Аналогично по т. синусов для } \triangle ABD: BD = 2R \cos \alpha$$

Пусть DF повторно пересекает окружность в
с центром O_2 в точке M , тогда AM -
диаметр, т.к. $\angle ADM$ - вписанный и равен $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \angle ABM = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. опирается } \Rightarrow \angle DBM = \frac{\pi}{2} - \angle ABD =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{4} - \alpha \Rightarrow \angle FBM = \frac{\pi}{2} - \angle MBD = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha$$



до т. пересечения ΔABC
 $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{R\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{R\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2R$

$BC = 2R \sin \alpha$
 Аналогично из ΔBAD
 $BD = 2R \cos \alpha$

$CD = 2R(\sin \alpha + \cos \alpha)$

$AB \perp CD \Rightarrow CD = 2AD \cdot \cos \frac{\pi}{4} = AD\sqrt{2}$

$AD = \frac{2}{\sqrt{2}} R(\sin \alpha + \cos \alpha)$

$FD = 2BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{2} R \cos \alpha$

$FH = FD - AC =$
 $= 2\sqrt{2} R \cos \alpha - \frac{2R \sin^2 \alpha}{\sqrt{2}} -$
 $- \frac{2R \cos^2 \alpha}{\sqrt{2}} =$
 $= R \cos \alpha (2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}) - \frac{2R \sin^2 \alpha}{\sqrt{2}} =$
 $= 2R \cos \alpha (\frac{2-1}{\sqrt{2}}) - \frac{2R \sin^2 \alpha}{\sqrt{2}} =$
 $= \frac{2R}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin^2 \alpha)$

$\Delta CAB = \Delta CBF$, т.к.
 $CA = CB$, $CB = CF$
 $\angle ACB = \angle BCF$

$\angle CAB = \angle CBF = \alpha$
 (как углы между сторонами в равных Δ против равных сторон)

$CADF$ - прямоугольная трапеция, т.к. $AC \parallel FD$ и $\angle CAD = \frac{\pi}{2}$
 Проведем высоту CH .

$CH = AD$

$CA = AD = DH = CH$, т.к. $CADH$ - квадрат, т.к. $\angle CAD = \angle ADH = \angle DHC = \angle HCA = \frac{\pi}{2}$
 $\angle CAD = \angle ADH = \angle DHC = \angle HCA = \frac{\pi}{2}$

$FH = FD - HD$

$FD = 2BD \cos \frac{\pi}{4} = BD\sqrt{2}$

$HD = AC = AD$

$FC = \sqrt{(BD\sqrt{2} - AD)^2 + AD^2}$
 (по т. Пифагора для ΔHCF)

т.к. $\angle CBF = \angle CBF = 90^\circ$
 т.к. $\angle CBF = \angle CBF = 90^\circ$
 т.к. $\angle CBF = \angle CBF = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CFB = \alpha = \angle CHB$, т.к. опущены на одну сторону

из ΔCFH

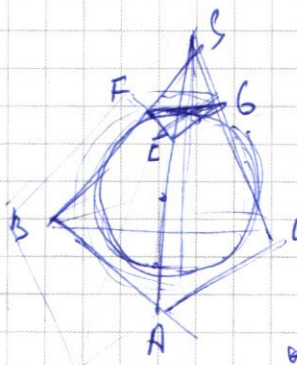
$\tan \angle CFH = \frac{CH}{HF}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2R(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sqrt{2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}}{\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$N = 4$



П.к. обе плоскости сечений $\perp SO$ и касаются сферы, то эти сечения $\parallel$ т.к. перпендикулярны одной прямой

Пусть большая плоскость касается ~~сферы~~ в точке N , меньшая в точке M

Пусть ~~большая~~ ~~сфера~~ O

Сечениями являются Δ т.к. у нас трехгранный Пусть большая сечение — ΔABC , меньшее — ΔFEG

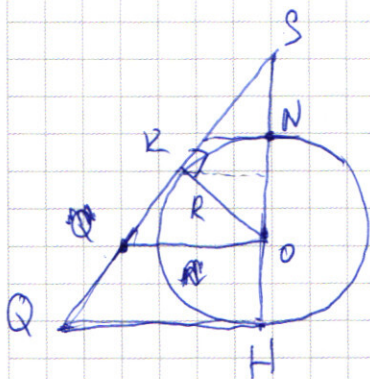
$\Delta ABC \sim \Delta FEG$, т.к. $(ABC) \parallel (FEG)$, при этом $AB \in (SAB)$ и $FE \in (SAB) \Rightarrow AB \parallel FE$

Аналогично: $AC \parallel EG$ и $FG \parallel BC \Rightarrow$ углы в ΔABC и ΔFEG равны.

П.к. $\Delta ABC \sim \Delta FEG$, то их площади относятся как квадраты коэффициентов подобия $\Rightarrow$ коэффициенты подобия $\frac{3}{4}$ (т.к. $S_{ABC} = 16$, $S_{FEG} = 9$)

$\Delta SFE \sim \Delta SAB$, т.к. $FE \parallel AB \Rightarrow$ соответственные углы равны.
 $\Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{FE}{AB} = \frac{3}{4}$

$\Delta SEN \sim \Delta SAN$ (по двум углам — один общий, а один $= 90^\circ$)
 $\Rightarrow \frac{SN}{SH} = \frac{SE}{SA} = \frac{3}{4}$ $SN = \frac{3}{4} SH$, при этом $SH = SN + 2R =$
 $\Rightarrow 3H = \frac{3}{4} SH + 2R \quad \frac{1}{4} SH = 2R \quad SH = 8R$



$\triangle KSO$ - прямоугольный, т.к. KS - касательная,
а SO - радиус в точку касания.

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{R}{ON+NS} = \frac{R}{R+6R}$$

$$SH = 8R \quad SN = \frac{3}{4} SH = \frac{3}{4} \cdot 8R = 6R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{R+6R} = \frac{1}{7}$$

$SK = SM = SL$, т.к. $\triangle SOK = \triangle SOM = \triangle SOL$ по катету и гипотенузе.
 $\Rightarrow \angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$

$\downarrow$
проекция KS , SM и SL на SO равна

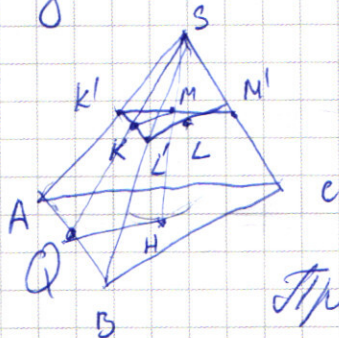
(т.к. проекция $= KS \cdot \cos \angle KSO$ и т.п.)

$\downarrow$
Плоскость сечения $KLM \parallel (ABC)$ $\nearrow$ сечение плоскостью $KLM \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = k^2 \quad \text{где } k - \text{коэффициент подобия треугольников } KLM \text{ и } ABC$$

Пусть сечение KLM пересекает стороны треугольника ABC в точках K', L', M'

Тогда $\triangle K'L'M' \sim \triangle ABC \Rightarrow K'L' \parallel AB, L'M' \parallel BC, K'M' \parallel AC$



$$\begin{aligned} \text{из } \triangle KSO: KS &= SO \cdot \cos \angle KSO = \\ &= 7R \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = 7R \cdot \frac{\sqrt{48}}{7} = \\ &= 4\sqrt{3}R \end{aligned}$$

Продолжим SK до пересечения с AB

$SK \cap AB = Q$, тогда из $\triangle QSH$:

$$\frac{SH}{QS} = \cos KSO \Rightarrow QS = \frac{SH}{\cos KSO} = \frac{8R}{\frac{\sqrt{48}}{7}} = \frac{8R \cdot 7}{4\sqrt{3}} = \frac{14R}{\sqrt{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle QAS \sim \triangle KKS$ (т.к. по двум углам: т.к. $K'L' \parallel AB \Rightarrow$ соответственные углы равны)

$$\frac{SK'}{SA} = \frac{K'K}{AQ} = \frac{SK}{SQ} = \frac{4\sqrt{3}K \cdot \sqrt{3}}{14K} = \frac{12}{14}$$

$\triangle SK'L' \sim \triangle SAB$ (т.к. $K'L' \parallel AB$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{K'L'}{AB} = \frac{SK'}{SA} = \frac{12}{14} = k_2$$

$$S_{K'L'M'} = k_2^2 S_{ABC} = \frac{12^2}{14^2} \cdot 16 = \frac{12^2 \cdot 4}{4 \cdot 4^2} = \frac{576}{49}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$

$$S_{K'L'M'} = \frac{576}{49}$$

Прямая, если плоскость $\perp SO$ и касается ~~сферы~~ окружности, то она касается ~~сферы~~ окружности в точке $\in SO$, т.к. радиус, проведенный в точку касания $\perp$ плоскости

$N \equiv 6$ (предположение)

$$FC = \frac{FH}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{2R(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{2} \cdot (\sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4} \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{2R(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\alpha - \sin\alpha)} = 2R$$

из $\triangle FCH$, где $\angle FCH = \frac{\pi}{4} - \alpha$, т.к. $\angle CFH = \frac{\pi}{4} + \alpha$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot CE \sin \angle ACE =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot CE \cdot \sin(135^\circ - \alpha)$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 170 \\ \hline 269 \end{array}$$

$$BC = 16$$

$$BC = 2R \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{16}{2 \cdot 17}$$

$$AC = BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} R \cos \alpha = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot 17 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{16}{2 \cdot 17}\right)^2}$$

$$CE = 2R = 2 \cdot 17$$

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{16}{2 \cdot 17} + \sqrt{1 - \left(\frac{16}{2 \cdot 17}\right)^2} \right)$$

$$\left(\frac{16}{2 \cdot 17} + \sqrt{1 - \left(\frac{16}{2 \cdot 17}\right)^2} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{(34-16)(34+16)}}{2 \cdot 17} = \frac{5\sqrt{2 \cdot 18}}{2 \cdot 17} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 17} = \frac{15}{17}$$

Считаем

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot \left(16 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot 17 \sqrt{1 - \left(\frac{16}{2 \cdot 17}\right)^2} \right) \cdot 2 \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{16}{2 \cdot 17} + \sqrt{1 - \left(\frac{16}{2 \cdot 17}\right)^2} \right) =$$

$$\frac{46}{2 \cdot 17}$$

Ответ: $CE = 2R = 34$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\frac{64824}{63} \div \frac{3}{21}$

Найдем делитель числа 64824

$$\begin{array}{r} 64824 \div 3 \\ \underline{6} \\ 04 \\ \underline{3} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 027 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21609 \div 21 \\ \underline{21} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 09 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \div 3 \\ \underline{7} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 03 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \div 7 \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \div 7 \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 7^4$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 2401 \\ \hline 16807 \\ 4802 \\ \hline 64827 \end{array}$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2401$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 5 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$(a^3 \ln b)^3 = b^{\ln b} a^{\ln a} a$$

$$\left(\frac{a^3}{b}\right)^{\ln b} = a^{\ln b} \ln b$$

$$a^{\frac{1}{\ln a}}$$

$$1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

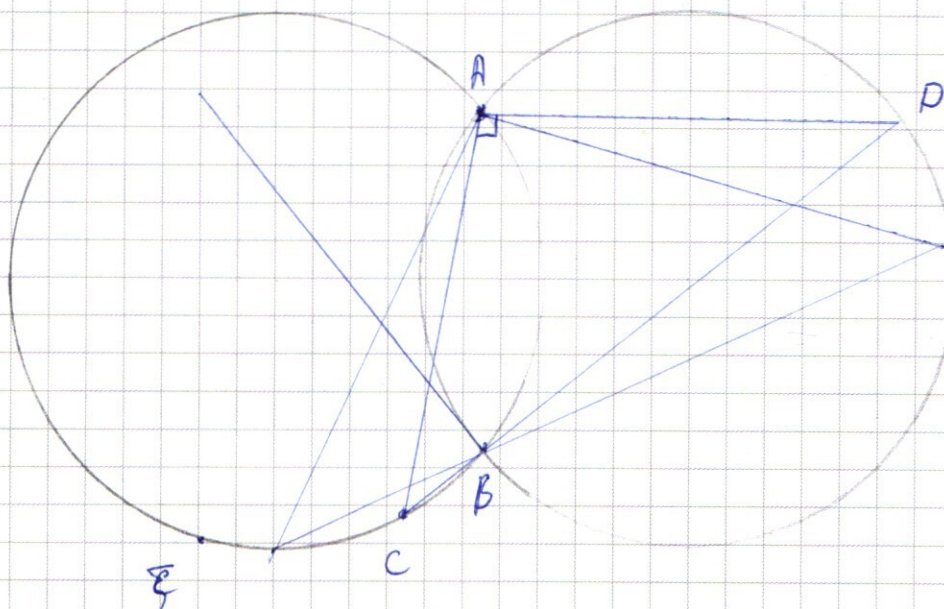
$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 15 \\ \hline 45 \\ 15 \\ \hline 225 \\ + 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\ln(x-4) = b$$

$$(x-4) = e^b$$

$$x = e^b + 4$$

$$\ln(e^b + 4)$$



$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y$$

$$y^2 + y(2x+4) - (3x^2+12x) = 0$$

$$h^2 \varepsilon^2 = 8.9$$

$$D = (2x+4)^2 + 4(3x^2+12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 = (4x-4)^2$$

$$y =$$

$$a^{\log_a a} = a^{\frac{1}{\log_a b}} = a^{\frac{1}{\log_a b}} = \frac{a}{a}$$

$$\frac{a+b}{n} \ln \frac{x}{1}$$

$$a^{\log_a a}$$

$$a^{\log_a a} =$$

$$x^{\ln(x-4)} = 0$$

$$x = 0$$

$$= a^{\frac{1}{\log_a b}} = a^{(\log_a b)^{-1}}$$

$$\alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha - \beta = y$$

$$\beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

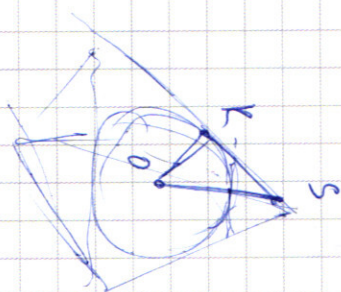
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y}{2}$$

$$= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 2x \cdot \cos 5x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cdot \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$