

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

- квадрат
- чокр-ти

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ 25 \overline{) 135} \\ 87 \overline{) 10} \\ 75 \overline{) 35} \\ 125 \end{array}$$

$$27 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{25} \\ + 875 \\ \hline 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^3$$

6.

многократное
е-число

3³

$$\frac{3}{6} \frac{3}{6} \frac{3}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6}$$

$$3^4 3^3 3^8 5^2 5^6 5^c \textcircled{11}$$

$$a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = 3$$

Сначала разобьем

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 9 \cdot 4 \\ \times 4 \\ \hline 36 \\ \times 84 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \overline{) 19} \\ 54 \overline{) 164} \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 5 \\ \hline 140 \\ \times 28 \\ 7 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg x}$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y + \lg y}{2}$$

$$\frac{8!}{6! \cdot 2} = \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 6} = 28$$

$$\begin{array}{r} \times 576 \\ 28 \\ \hline 4608 \\ 1152 \\ \hline 16128 \overline{) 28} \\ 140 \overline{) 57} \\ \hline 212 \\ 196 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\cos 4x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - (2 \sin 7x \cos 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

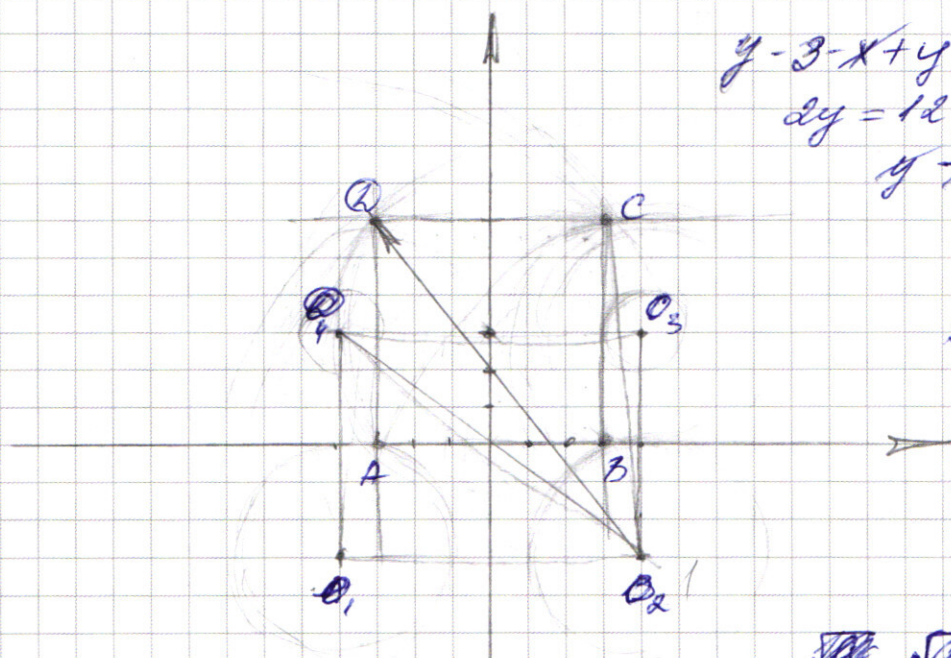
$$-2 \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x) = \sqrt{2} - 2 \sin^2 7x$$

$$2 \sin 7x \sqrt{2} \left(\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} - 2 \sin^2 7x$$

$$2 \sin 7x \sqrt{2} \left(\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2 \sin^2 7x - 1$$

$$2 \sin 7x \left(\sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right) = -1$$



$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$2y = 12 \quad y = 6$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$3 - y + x + y - 3 + x = 6$$

$$x = 3$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$-2y = 0$$

$$\sqrt{a^2} = a \quad B$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

1) Cycles O_1A , cycles O_2B

$$\int \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$y =$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y =$$

$$= 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$$

$$x = \frac{(y+2) \pm |2y-2|}{2}$$

$$x = y + 2 \pm |2y - 2|$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17} + 4}{2}$$

$$\lg x \lg \left(\frac{y^5}{x}\right) = 2 \lg xy \lg y$$

$$\lg x (\lg y^5 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y + \lg^2 x - 3 \lg x \lg y = 0$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \sqrt{\lg^2 y \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}}}{2}$$

$$y^2 = 3y$$

$$y = 3$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

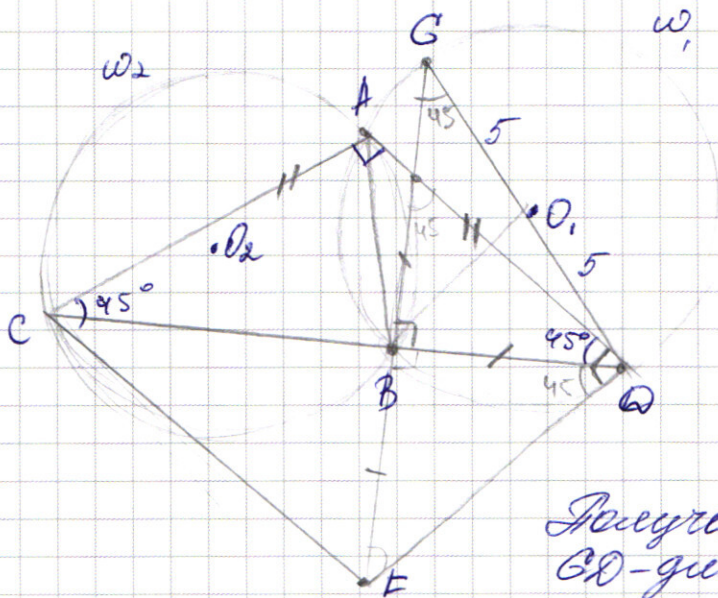
$$y^2 + y - 4 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - (2 \sin 4x \cos 7x) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 4x \sqrt{2} \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 4x \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 14x &= 0. \\ +2 \sin 4x \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 - 2 \sin^2 7x &= 0. \end{aligned}$$

Продолжение решения №2!



1) Рассмотрим $\angle ACB$ и $\angle ADB$.

Т.к. окр., в кот. описана вписанная, равно, а также они они равны на окружности $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADB = 45^\circ$

2) Проведем через BF прямую, до ее пересечения с окр. ω_1 в т. G. $CB \perp CD$ (по

теореме, что $\angle CBD = 90^\circ$ ^{указано}
GD-диаметр $GD = 2R = 10 = 2BD$,

3) $\angle FBD = 90^\circ$, $BF = BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$, $\angle ADF = 90^\circ$

O_1D - радиус, $O_1D \perp FD = FD$ - касательная.
То Th будет между касательной и хордой.
 $\angle FAB = \angle DCB = 45^\circ \Rightarrow BB$ совпадает с AB.

4) AB-медиана и высота $\triangle CAD$. $\Rightarrow AB = BD$ и $AB = BF$

$\triangle ABD = \triangle CBA = \triangle FBD = \triangle FBC$

Получается, что $\triangle ACFD$ - ^{прямоугольник}
 $CF = FD = DA = 2R$

$CF = 10$

По доказанному $AB = BF = BC = 6$
 $S_{ACF} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ (А вообще $CD = 10$, $AC = AD = 0$, ^{противоречие Th. Пифагора}
такой треугольник существует.)

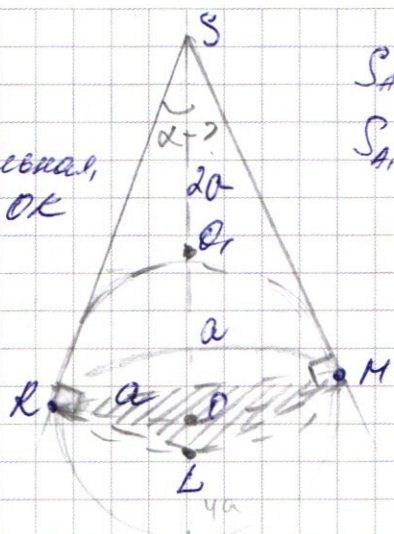
Предложение решения номера 7.

$$\begin{aligned} 1) & 70 + 7 \cdot 2^{64} - 7 \cdot 2^7 - 6 \cdot 2^{64} = 63 + 2^{64} - 2^7 \\ 70 + 2) & 62 + 4^{64} - 2^8 \\ 69) & 2 + (2^{62})^{64} - 2^{69} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \frac{2770}{2}$$

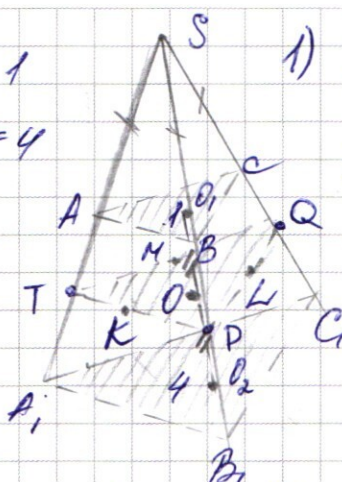
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

24

Т.к. SK -касательная,
то $SK \perp OK$



$$S_{ABC} = 1$$
$$S_{A.B.C} = 4$$



1) $\triangle SBC \sim \triangle CB_1C_1$

$$\frac{BC}{BC} = \frac{1}{1}$$

Гуль и сфера = а

$$\frac{SO_2}{SO_2 + da} = \frac{1}{1+2}$$

$$SQ_1 = SQ_1 + 2a$$

$$1580, = da u$$

~~$SO_1 = \frac{2}{15}a$~~

$$SO = \frac{2}{15}a + a = \frac{17}{15}a$$

~~$\angle RO = a \quad \angle RSO =$~~

$$2SO_2 = SO_2 + 2a$$

$$da = 50$$

$$50 \neq 3a \Rightarrow$$

2) $(KLM) \parallel (A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$$\boxed{\angle KSL = \arctg \frac{1}{3} \mid \angle KSL = \arcsin \frac{1}{3}}$$

SKLM

$\triangle ASB \sim \triangle TPQ$ (T, P, Q - т. пересеч. (KLM) с гранями SA, SB, SC) соответственно!

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ACB}} = \left(\frac{SO}{SO_1} \right)^2 = \frac{9a^2}{4a^2}$$

$$S_{KLM} = \frac{9a^2}{4a^2} \cdot 4 = \frac{9}{4}$$

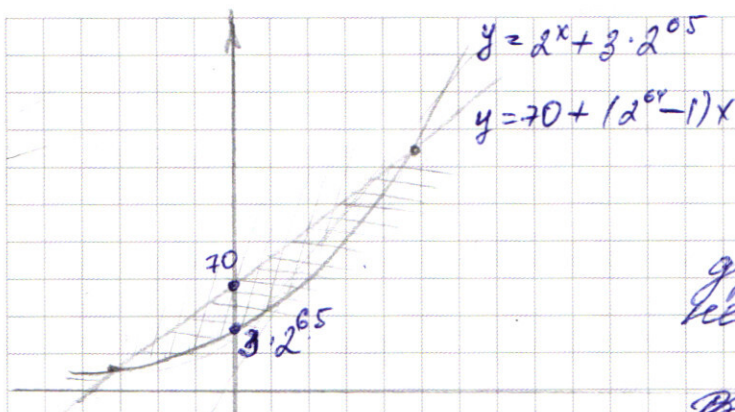
Omber: $\angle KSL = \arctan \frac{1}{3}$, $S_{KLM} = \frac{9}{4}$

$$\angle KSL = \arcsin \frac{1}{3}$$

N7 $\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} - \text{график ф-ции } y = 2^x \text{ сдв. по } OY \\ y \leq 70 + (2^{65} - 1)x - \text{касательная кривая,} \\ \text{поднятая по } OY \end{cases}$

Два данных графика не могут пересекаться в более, чем ~~одной~~ ^{двух} ~~точке~~ (производная первой др-ции увеличивается бесконечно), вторая — постоянная величина)

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{65} - 1)x$$



Заметим, что $70 < 3 \cdot 2^{65}$

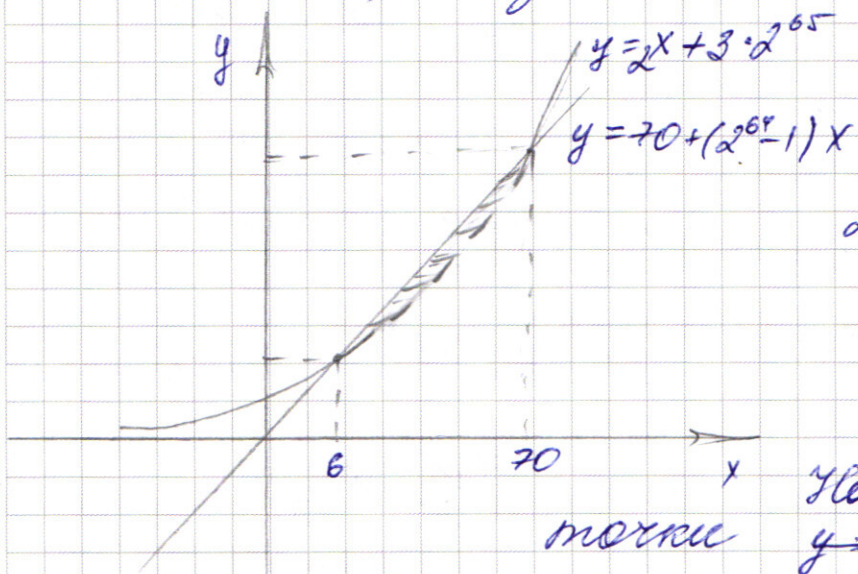
Значит графически либо касаются друг друга, либо не имеют общих точек вообще.

Во втором случае не получается ни одной пары, удовлетворяющей заданному неравенству. Значит

такая пара всего одна и записана в решении уравнения

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

Вспомогательное, что $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ - строгое неравенство, а значит



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x \Rightarrow x = 6; x = 70$$

касаются
пересекаются

Значит не подходит точка $y = 70 + (2^{64} - 1)x$ где $x \in [6; 70]$, т.к.

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ - строгое неравенство.

$$2^6 + 3 \cdot 2^{65}; 2^7 + 3 \cdot 2^{65} \dots; 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \text{ не подходит}$$

Подставим $x \in [6; 70]$ в $y = 70 + (2^{64} - 1)x$

$$y = 70 + (2^{64} - 1)7 = 2^7 + 3 \cdot 2^{65} \text{ - к-во пар } (7; y_1)$$

$$70 + (2^{64} - 1)8 = 2^8 + 3 \cdot 2^{65} \text{ - к-во пар } (8; y_2)$$

$$70 + (2^{64} - 1)69 = 2^{69} + 3 \cdot 2^{65} \text{ - к-во пар } (69; y_{69})$$

Продолжим это, получим к-во целых пар

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$ Искомое число А имеет вид:

$$a \cdot 3^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 3^{\gamma} \cdot 5^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 11$$

где $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 3$ (каждый из $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 3]$)

Для начала расставим в числе тройки и пятёрки. Это можно сделать:

(5+6)

4.4.3.3.2.2 способами

Теперь у нас осталось 2 места для e-ца.

Итого: $C_8^2 \cdot 576$ возможных вариантов.

Ответ: 16128. чисел

N5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases} \quad (\text{ровно 2 решения})$$

(1) - квадрат

(2) - 4 симметричные относительно

ABCD

(0;0) окружности: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

$A=(3;0)$ $B=(3;6)$
 $C=(-3;0)$ $D=(-3;6)$

$\omega_1: O_1(4;3), R=\sqrt{a}$

$\omega_3: O_3(-4;-3), R=\sqrt{a}$

$\omega_2: O_2(-4;3), R=\sqrt{a}$

$\omega_4: O_4(4;-3), R=\sqrt{a}$

Также (2) может
быть точками
(a=0), но в таком
случае решений
нет.

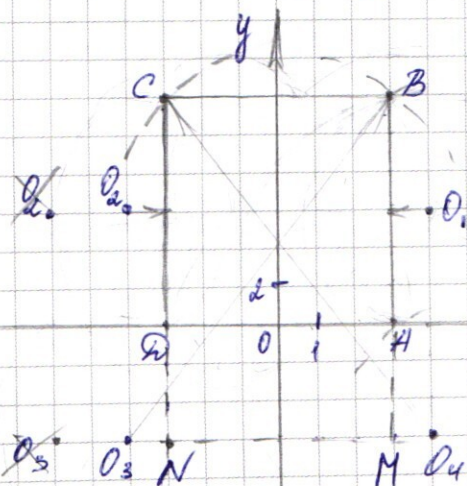
Чтобы существовало
только 2 решения,
нам удовлетворят
именно две ситуации
1) окр ω_4 и ω_3

касаются квадрата
в точках C и B,

2) ω_1 и ω_2 касаются AB
и CD.

Потому так: O_1 и O_2 находятся
на оси симметрии квадрата.

Потому если ω_1 и ω_2 , то и ω_3 и ω_4



т. O_4 и O_5 — еще одной оси симметрии квадрата.
 Аналогично. Если ω_4 и ω_5 в одной/двух точках, то и ω_3 и ω_2 в одной/двух точках соответственно.

В 1): $a=1$ Вспомогат.: По Теореме Пифагора:

$$O_3B = O_3C = \sqrt{a} = \sqrt{8^2 + 9^2} \quad a = 145$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases} \quad (*)$$

$$OQ3^*: x > 0; y > 0.$$

(1): Прологарифмируем, учитывая $OQ3^*$

$$\lg(x) \lg\left(\frac{y^5}{x}\right) = 2 \lg(xy) \lg(y)$$

$$\lg(x) (\lg(y^5) - \lg(x)) = 2 (\lg(x) + \lg(y)) \lg(y)$$

$$5 \lg(x) \lg(y) - \lg^2(x) = 2 \lg(x) \lg(y) + 2 \lg^2(y)$$

$$\lg^2(x) - 3 \lg(x) \lg(y) + 2 \lg^2(y) = 0. \quad (\text{Квадр. трехчл. отл. от } x)$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg(x) = \frac{3 \lg(y) \pm \lg(y)}{2} \Leftrightarrow \lg x = \begin{cases} 2 \lg y \\ \lg y \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} y^2 \\ y \end{cases}$$

$$(2) 0 = x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y \Leftrightarrow x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0.$$

(Квадр. трехчл. отл. x)

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2y - 2)^2$$

$$x = y + 2 \pm (2y - 2) \quad x = \begin{cases} 3y \\ -y + 4 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \begin{cases} y^2 \\ y \end{cases} \\ x = \begin{cases} 3y \\ -y + 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x = y \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \emptyset$$

$$2) \begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow y = 3; x = 9$$

$$3) \begin{cases} x = y \\ x = -y + 4 \end{cases} \Rightarrow y = 2; x = 2$$

$$4) \begin{cases} x = y^2 \\ x = -y + 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2) \quad \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\sin(7x)(1 - \cos(\frac{\pi}{4} - 4x)) = 1$$

$$\frac{\pi}{2} - 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 4x$$

$$\sin(7x)(1 - \cos(\frac{\pi}{4} - 4x)) = \frac{1}{2}$$

~~2-2cos~~ ~~2sin~~

$$\sin(7x) \in [-1, 1], \quad 2 - 2\cos(\frac{\pi}{4} - 4x) \in [0, 4] \quad \Rightarrow 1$$

$$\frac{9}{4} \cdot 4$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2\sin 4x(\sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(1 - 2\sin 7x)$$

$$-2\sin 4x$$

$$-2\sin 4x(\sin(7x - \frac{\pi}{4})) = 1 - 2\sin 7x$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4}) = 1 - 2\sin 7x$$

$$-2\sin 4x$$

$$1 - 2\sin 7x$$

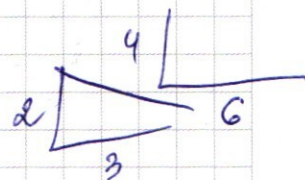
$$7x - \frac{\pi}{4} - 4x = 3x - \frac{\pi}{4}$$

$$-2\sin 4x(-2\sin 4x(\sin(7x - \frac{\pi}{4}))) = 1 - 2\sin 7x$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\frac{1}{2}\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 1$$



$$2\sin 4x(2(\sin 4x(\sin(\frac{\pi}{4} - 7x)) + \sin^2 7x)) = 1$$

$$\cos 14x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \frac{1-\sqrt{2}+4}{2} \quad \frac{9-\sqrt{2}}{2}$$

