

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть число — это $\overline{a_1 a_2 \dots a_7 a_8}$

$$\text{тогда } A = a_1 a_2 \dots a_7 a_8 = 16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

5 и $3 \in \mathbb{P}$, тогда в произведении A присутствуют только
множители делящиеся на 5 или 3 или являющиеся 1 .

Также по условию $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \dots, 8$, однако если

хоть одно из $a_i = 0$, то $A = 0 \Rightarrow 1 \leq a_i \leq 9$

$5^2 = 25 \Rightarrow a_i$ может быть кратно 5 и a_i обязательно не кратно

$3^2 = 9, 3^3 = 27 \Rightarrow a_i$ может быть кратно $3, 3^2$, но не 3^3

тогда в множестве B включающем $a_i (i = 1, \dots, 8)$

содержатся $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1\}$ или $\{5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1\}$

Одновременно и на 5 , и на 3 число не может делиться, т.к.

тогда $a_{\min} = 3 \cdot 5 = 15$.

кол-во чисел = x , ~~содержащих~~ являющихся представлениями вариантов

$$\text{мн.-ва } B. \quad x = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 56 \cdot 20 = 1120$$

Ответ: 1120.

$$2 \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x \cdot \sqrt{2} - \cos 5x - \sin 5x) = 0 \quad | : 2$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sqrt{2}(\text{прод.}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ \cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} + \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$
~~$$\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) -$$~~

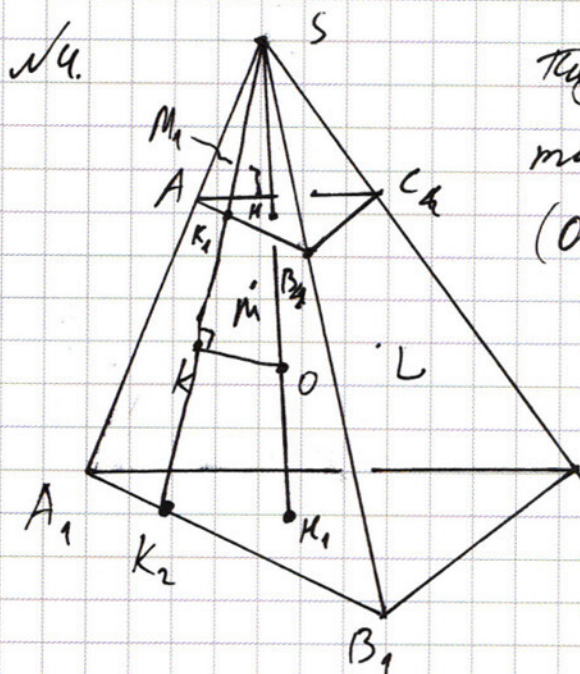
$$- \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}, n, m, k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть ABC - пл-ть $\perp SO$, $A_1B_1C_1$ -
также $S(ABC) = 4$ $S(A_1B_1C_1) = 9$
(Очевидно, $A_1B_1C_1$ ближе удалена от S ,
чем ABC)

$K \in A_1B_1S$, $OK \perp A_1B_1S$ (радиус)

C_1 Пусть сфера - это " ω ", тогда
 $K \in ABC$, $SO \perp SK$ (радиус), $OK \perp ABC \Rightarrow K \in \omega$,
 OK - радиус ω , аналогично $OK_1 \in \omega$,

$K_1 \in A_1B_1C_1$ ($SK_1 \perp A_1B_1C_1$) $\Rightarrow ABC \parallel A_1B_1C_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC \parallel B_1C_1$ (как прямые пересеченные паралл. пл-тей с
третьей), аналогично $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $KK_1 \parallel K_1K_2$ ($K_1 \in ABC$, $K_2 \in A_1B_1C_1$)
(при пл-ти SK_2K_1) $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{K_1K}{K_2K_1} = \frac{2}{3}$ (как соотв. 2-та)

В $\triangle K_2K_1S$: Пусть $K_2K_1 = 3x \Rightarrow K_1K = 2x$

$$\frac{SK}{SK_1} = \frac{2}{3} \quad \frac{SK}{SK+2R} = \frac{2}{3} \quad 3SK = 2SK + 4R \quad SK = 4R$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{K_1S} \Rightarrow K_1S = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{1}{5}, \quad KS = \sqrt{25R^2 - R^2} = 2\sqrt{6}R$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}R}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2x}{4R} \quad x = \frac{R}{\sqrt{6}} \quad K_1S = \sqrt{16R^2 + \frac{4}{6}R^2} = R \frac{10}{\sqrt{6}}$$

Пусть $KM \perp SO$, $K \in SO \Rightarrow \frac{KS}{K_1K} = \frac{KS}{K_1S} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}R \cdot \sqrt{6}}{10R} = \frac{6}{5}, \quad K \parallel K_1K; \text{ Пусть сечение угла пл-ть } KLM = \alpha,$$

α - треугольник, высоты из L и M на SK_1 падают в K

№4 (прод.) MG, LG, KG - прямые в π -ти сечения, тогда
 $a \parallel ABC$ ($KG \parallel K_1H, M_1H \parallel MG$ (M_1 построена, как и K_1 , проводя
 SM , пересекая ABC)))

$$a \sim ABC \quad \left(\frac{K_1H}{KG} = \frac{6}{5} \right) \Rightarrow \frac{S(a)}{S(ABC)} = \frac{36}{25} \quad S(a) = \frac{36}{25} \cdot 4$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right); \quad S(a) = \frac{144}{25}$$

(сечение KLM)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{5} \cdot (|x-6+y| + |x-6-y|) = 12$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

Система ~~симметрична~~ при $y = t$ аналогична системе при $y = -t$,
 $t \in \mathbb{R}$. Пусть $y \geq 0$.

$$\begin{cases} |x-6| = 6 \\ (x-6)^2 + 64 = a \end{cases} \begin{cases} x = 12 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} 36 + 64 = a \\ 36 + 64 = a \end{cases} \quad a = 100 \text{ - подходит}$$

Пусть $y > 0 \Rightarrow x-6+y > x-6-y$

при $x-6 \geq y: x-6-y + x-6+y = 12 \quad 2x = 24 \quad x = 12 \Rightarrow y \leq 6$

$$\Rightarrow 36 + (y-8)^2 = a \quad (y-8)^2 = a - 36$$

$(y-8)^2$ бывает при y от 0 до 6 $y = \pm \sqrt{a-36} + 8$

$$a - 4 \leq (y-8)^2 \leq 64 \quad 4 \leq a - 36 \leq 64 \Rightarrow 4 \leq a < 100$$

при $y > x-6 \geq -y \quad -x+6+y + x-6+y = 12 \quad y = 6$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + 4 = a \\ (x-6)^2 = a - 4 \end{cases} \Rightarrow 12 > x \geq 0$$

$$0 < (x-6)^2 < 36 \quad 0 < a - 4 < 36 \quad 4 < a < 40 \text{ - не подходит.}$$

при $-y > x-6 \quad -x+6+y - x+6-y = 12 \Rightarrow x = 0, \quad -y > -6$

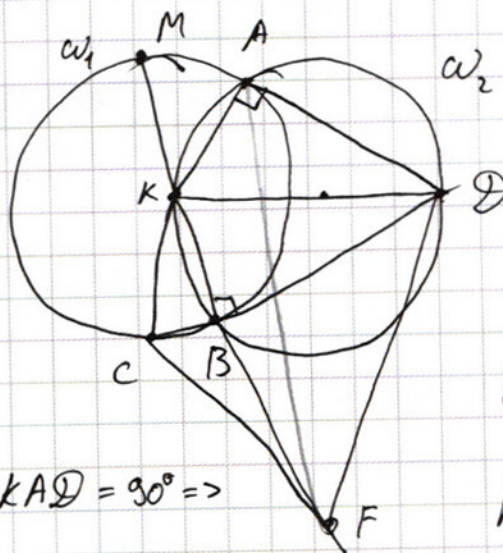
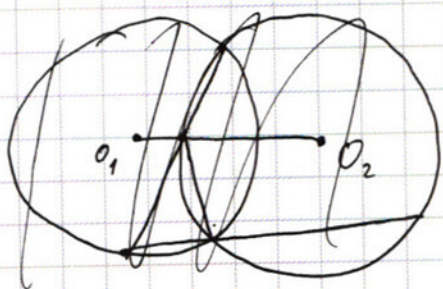
$$(y-8)^2 = a - 36 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a-36} + 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-36} < -2 \text{ [?!] - не подходит.}$$

при $y < 0$ ситуация аналогична:

Ответ: $\begin{cases} 4 < a < 40 \\ a = 100 \end{cases}$

№6.



a) Пусть $K = BF \cap \omega_2$

Потому KD - диаметр и $\angle KAD = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow C \in KA$

$M = \omega_1 \cap KF$, MC - диаметр.

$DK \perp MC$; $\angle MDK = \angle CDK$, $H = DK \cap MC$

$$BD = 26 \cdot \cos 2 \quad DK = 26$$

$$MC = 26$$

$$\frac{13}{BD} = \frac{26}{26}$$

$$\frac{13}{26+x} = \frac{x}{13} \quad 169 = 26x + x^2$$

$$KH = x$$

$$\frac{13}{26+x} = \frac{x}{13}$$

$$169 = 26x + x^2$$

$$x^2 + 26x - 169 = 0 \quad D = 26^2 + 4 \cdot 169 = 169(8)$$

$$x_{1/2} = \frac{-26 \pm 13 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = -13 \pm 13\sqrt{2}$$

$$\cos 2 = \frac{13}{26 + 13(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{1+\cos 2} = \frac{1}{\cos^2 2} = 1 + \frac{1}{1+2\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2} \cdot 2}{3+2\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$$

$$BC = 26 \sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{2}}}$$

$$\sin^2 2 = 1 - \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$$

$$DC = \sqrt{(13+13\sqrt{2})^2 + 13^2}$$

$$DB = DC - BC$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{26^2 \frac{1}{4+2\sqrt{2}} + \left(\sqrt{(13+13\sqrt{2})^2 + 13^2} - 26 \sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{2}}} \right)^2}$$

$\triangle BCF$ -

ответ.

б) $S(\triangle BCF) = 5 \cdot BF$ $S(\triangle ACF) = \frac{1}{2} CF \cdot AC \cdot \sin \angle ACF$ - ответ.

$$AC = 26 \cdot \cos 2, \sin \angle ACF = \sin \angle KCF \text{ из } \triangle KCF \text{ (KB = 26} \cdot \sin 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№ 7. $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$~~ $85 + (3^{81} - 1)x \rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

№ 3. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$

$x < 0$

$y > 0$

$y \neq 0$

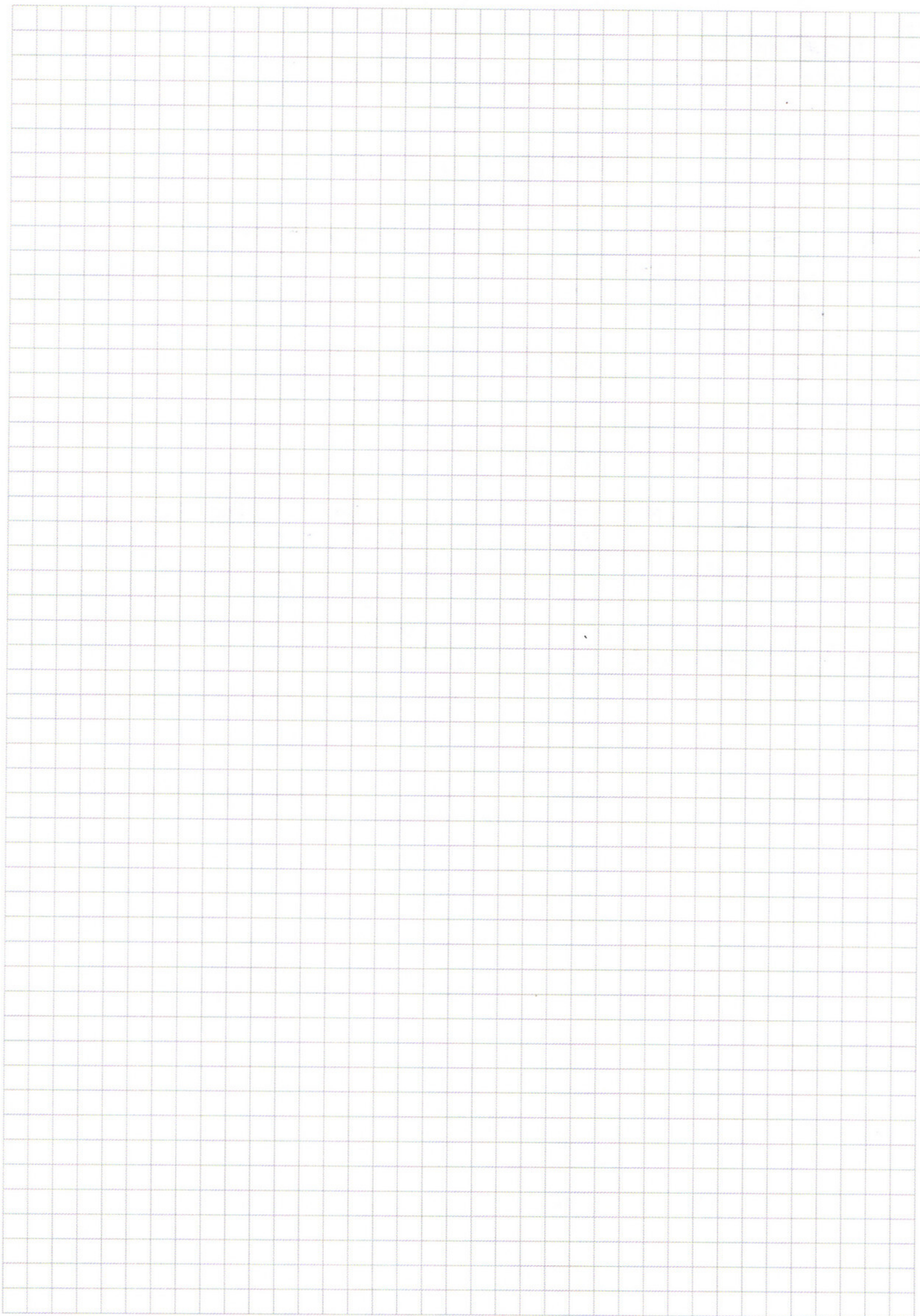
$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$\begin{cases} \frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = \frac{(-x)^{\lg(-xy)} \cdot y^2 \lg y}{y^2 \lg y} = 0 \end{cases}$

$x^4 \lg y - (-x)^{\lg(-xy) + \lg y} \cdot y^2 \lg y = 0$

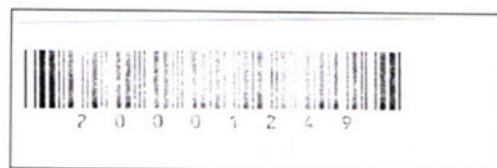
$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

~~$x < 0$~~



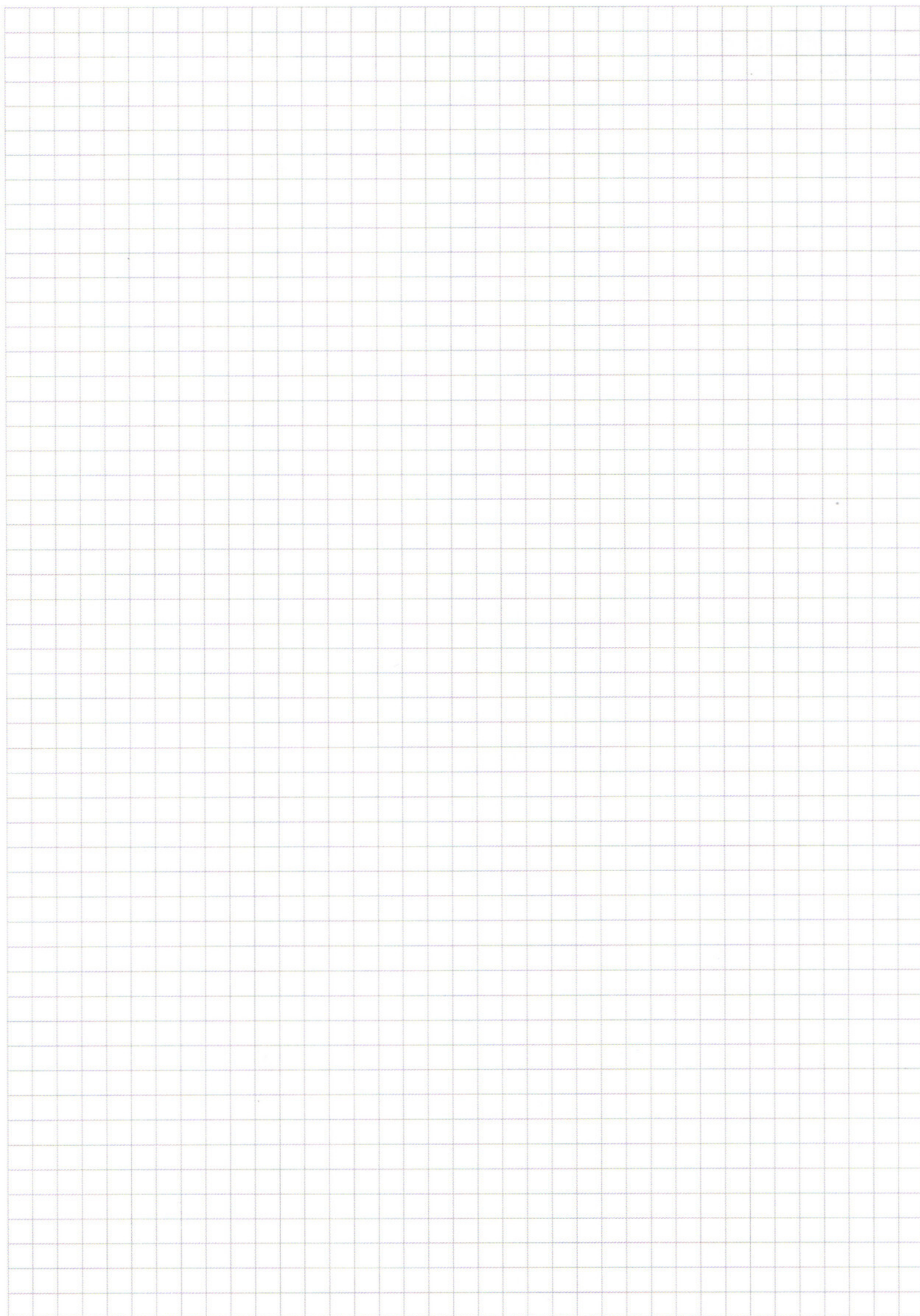
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

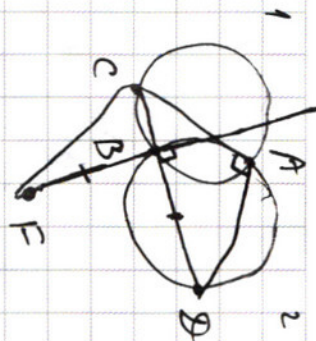
a.b.c.d.e.f.g.h

$\forall 1 \leq g$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$Pa_i = 5^4 \cdot 3^3$$

$$5555 \ 3331$$



$$\cos 7x + \cos 3x = \cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) =$$

$$= 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = \sin(5x+2x) + \sin(5x-2x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x$$

$$0^1 = 0$$

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 5x = 0$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} \quad \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}$$

$$(-2)^5 = -32$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y}$$

$$= (-x)^{\log_{10}(-xy)}$$

$$xy < 0 \quad x < 0 \quad (-2)$$

$$\log_{10}(-xy) =$$

$$x^4 \log_{10} y = (-x)^{\log_{10}(-x)} + \log_{10} y \cdot y^2 \log_{10} y$$

$$4y^2 - xy - x^2 - 8x - 6y = 0$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$y^2$$

$$y^2$$

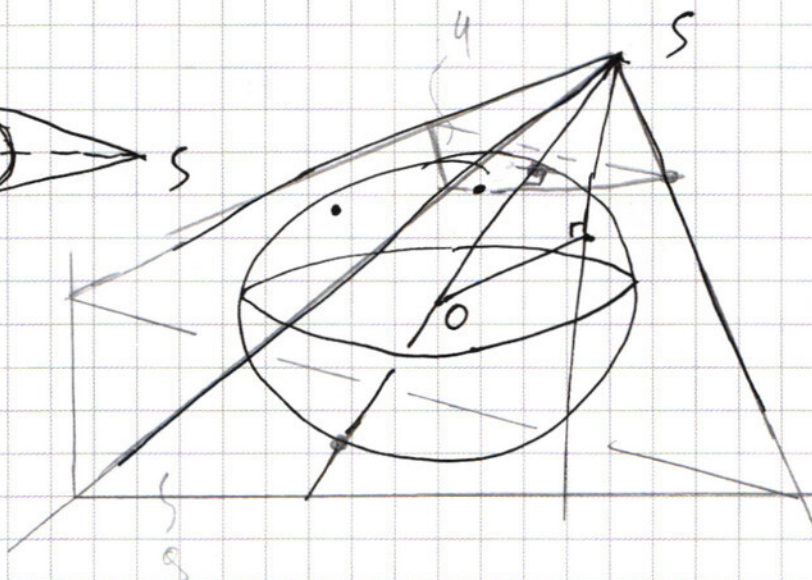
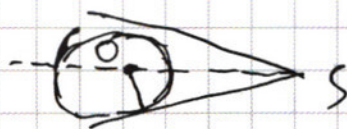
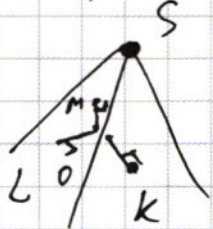
$$2y^2 - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

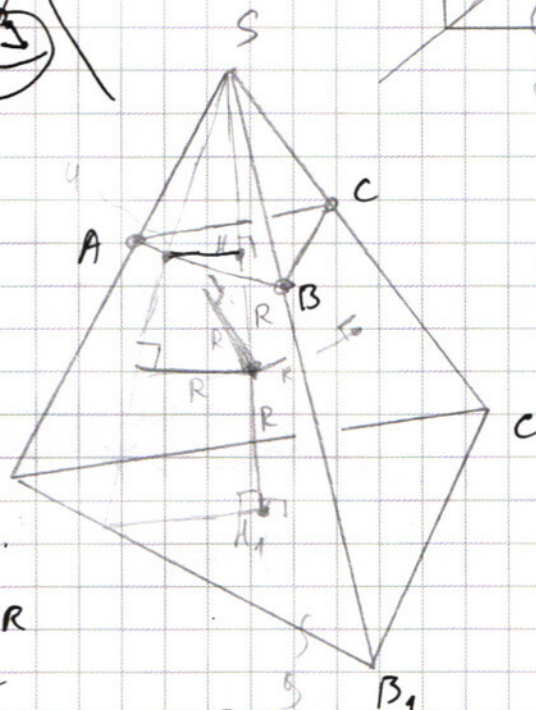
$$2y(y^2 - 4y + 4) - 2xy = x^2 + 4x + 4 + 4 \quad 2y^2 - 22y - 2x^2 - 8x - 16y = 0$$

$$y^2 + 4y + 4 \quad y^2 + 22y + x^2 = (x+y)^2 \quad -y^2 + 5y^2 - 22y - 2x^2 - 8x - 16y = 0$$

$$2y(y-4) - 2(x+y+4) = 0$$



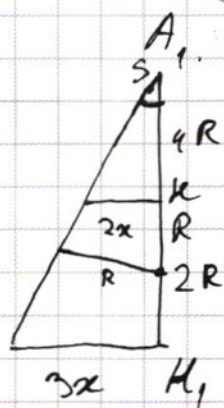
$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{SH \cdot 4}{(SH+2R)3} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}$$

$$r = \frac{30}{2}$$

$$\frac{16 \cdot 6 + 4}{6} = \frac{100}{6}$$



$$(SH+R)^2 - R^2$$

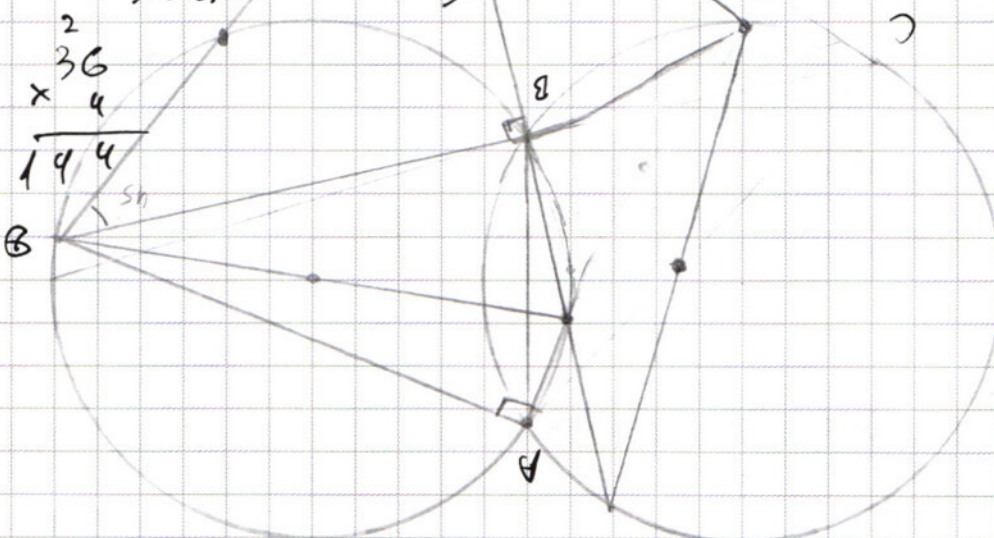
$$\frac{SH}{SH_1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{SH}{SH+2R} = \frac{2}{3}$$

$$3SH = 2SH + 4R$$

$$SH = 4R$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

3
26
-26
156
52
676

$KB = \sqrt{\frac{13}{4} - a^2}$
 $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{13}$
 $\cos 2 = 2\cos^2 - 1 = \frac{2a^2}{169} - 1$
 $\tan^2 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 2} \Rightarrow \tan 2 = \frac{169}{(2a^2 - 169)} - 1$
 $CB = \sqrt{\frac{13}{4} - a^2} \cdot \sqrt{\frac{169}{(2a^2 - 169)} - 1}$
 $CF =$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 \end{cases} \quad x-6=t$$

$$|t-y| + |t+y| = 12$$

$$t \geq y \quad t-y+t+y=12$$

$$y \geq 0$$

$$-y \leq t < y$$

$$t=y$$

$$t-y-t-y=12$$

$$-y=12$$

$$-t+y+t+y=12$$

$$y=6$$

$$t < -y$$

$$-t+y-t-y=12$$

$$-2t=12$$

$$|x-y| + |x+y| = 12$$

$$x \geq y$$

$$x-y+x+y=12$$

$$2x=12$$