МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

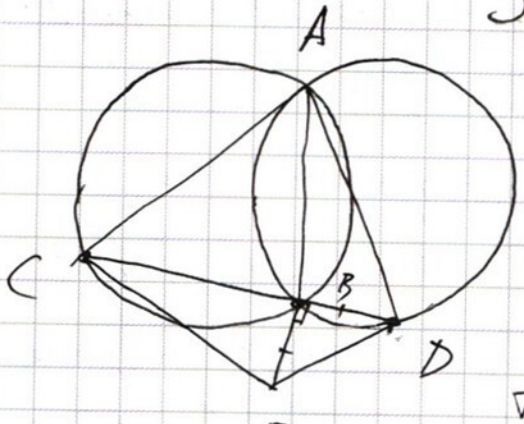
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6



$CF^2 = CB^2 + BF^2$, но $BF = BD$

$\Rightarrow CF^2 = CB^2 + BD^2$.

Пусть $\angle CAB = \alpha$; $\Rightarrow \angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$;

т.к. $CA \perp AD$

По обобщённой теореме синусов:

$CB = 2R \cdot \sin\alpha$, $BD = 2R \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, здорово, что у ок-тей совпадают радиусы; $\Rightarrow CB = 2R \cdot \sin\alpha$

$DB = 2R \cdot \cos\alpha$

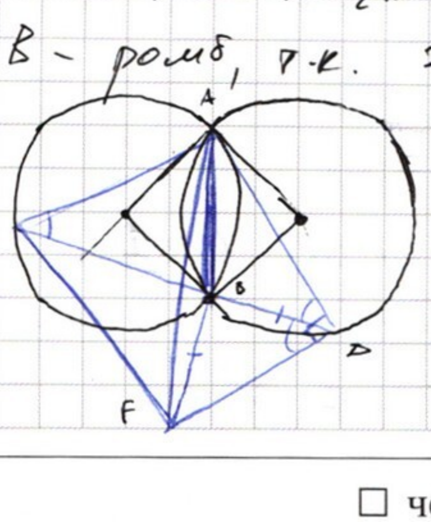
$\Rightarrow CB^2 + DB^2 = 4R^2 \cdot \sin^2\alpha + 4R^2 \cdot \cos^2\alpha = 4R^2$

$\Rightarrow CF^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = \underline{26}$.

б) Заметим, что из обобщённой т. синусов следует: $AB = 2R \cdot \sin\angle ACD$; $AB = 2R \cdot \sin\angle ADC$, но $\angle ACD + \angle ADC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ эти углы острые

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$. Но тогда, если O_1 и O_2 – центры ок-тей, то т.к. центральные углы вдвое больше вписанных $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B = \frac{\pi}{2}$; т.к. $O_1A = O_2A = O_2B = O_1B$

$\Rightarrow O_1AO_2B$ – ромб, т.к. 2 угла прямые $\Rightarrow$ это квадрат



$\angle ABD = \angle BCA + \angle CAB = \frac{\pi}{4} + \alpha$

$\Rightarrow \Rightarrow \sin\angle ABD = \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Из Δ-ка ACB по т. синусов: $\sin\alpha = \frac{CB}{2R} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$;

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$; $\Rightarrow \sin\angle ABD = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12+5}{13} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$;

Тогда по той же т. синусов: $AD = 2R\cdot\sin\angle ABD = 26\cdot\frac{17\sqrt{2}}{26} = 17\sqrt{2}$; $\Rightarrow CA = AD = 17\sqrt{2}$; $\Rightarrow CD = \sqrt{CA^2+AD^2} = 17\cdot 2 = 34$; $\Rightarrow BD = CD - CB = 34-10 = 24$; $\Rightarrow BF = BD = 24$

$\Rightarrow FD = 24\sqrt{2}$ (по т. Пифагора; $\angle FBD = \frac{\pi}{2}$)

Заметим, что $\triangle FBD$ – равнобедренный и прямоугольный $\Rightarrow \angle BDF = \frac{\pi}{4}$; $\angle ADC = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle ADF = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; $\angle CAD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CA \perp AD \perp FD \Rightarrow CA \parallel FD \Rightarrow CADF$ – трапеция, причём AD – её высота $\Rightarrow S_{CADF} = \frac{FD+CA}{2}\cdot AD = \frac{24\sqrt{2}+17\sqrt{2}}{2}\cdot 17\sqrt{2} = (24+17)\cdot 17$; При этом $S_{CAF} = S_{CADF} - S_{ADF}$;

$S_{ADF} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot FD = \frac{1}{2}\cdot(17\sqrt{2}\cdot 24\sqrt{2}) = 17\cdot 24$;

$\Rightarrow S_{CAF} = 17\cdot 24 + 17^2 - 17\cdot 24 = 17^2 = 289$;

Ответ: $S_{CAF} = 289$;

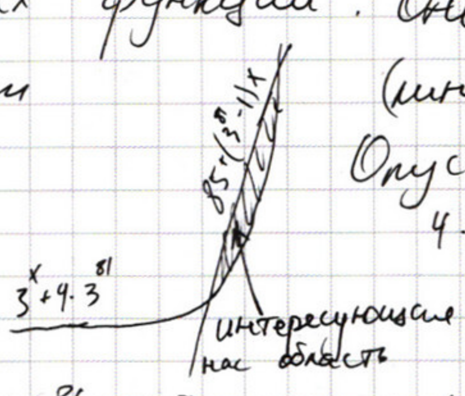
Задача №7

$85+(3^{81}-1)x > y \geq 3^x+4\cdot 3^{81} \Rightarrow 85+(3^{81}-1)x > 3^x+4\cdot 3^{81}$

Нам необходимо найти кол-во целых точек между графиками этих функций: Они будут выглядеть таким образом

(линейная ф-ия и экспонента)

Опустим каждую ф-ию на $4\cdot 3^{81}$, от этого кол-во точек не изменится



$\Rightarrow f(x) = 85 - 4\cdot 3^{81} + (3^{81}-1)x$; $g(x) = 3^x$.

Легко ищутся 2 корня $f(x)=g(x)$; $x=4$; $x=85$;

$85 - 4\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} - 4 = 3^4$ т.к. $85-4 = 3^4 = 81$

и $85 - 85 + 85\cdot 3^{81} - 4\cdot 3^{81} = 3^{85}$ т.к. $81\cdot 3^{81} = 3^4\cdot 3^{81}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

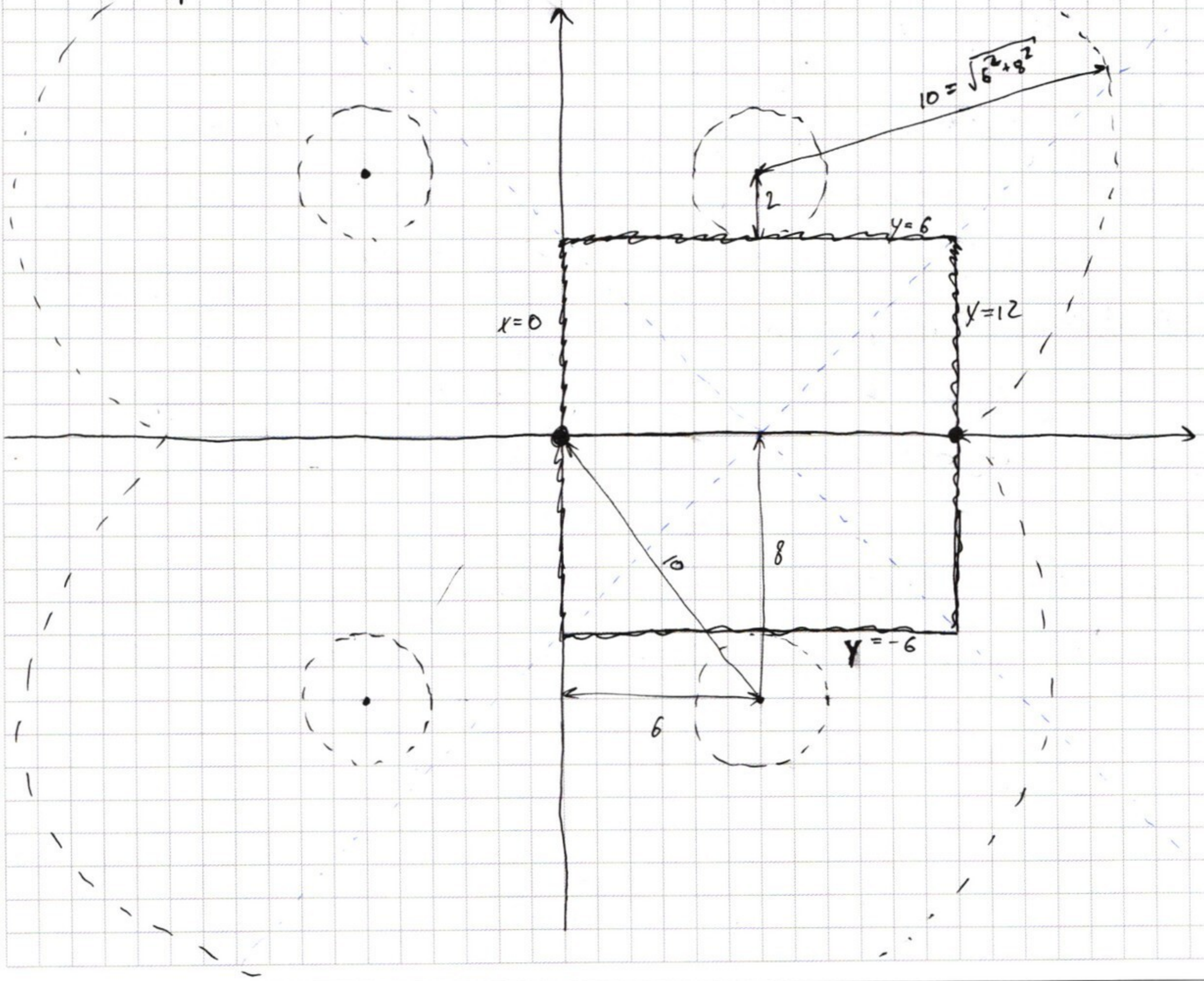
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5

$(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$; очевидно, что $a\geq 0$, т.к. $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}: \alpha^2+\beta^2\geq 0$; - иначе решений не будет вообще

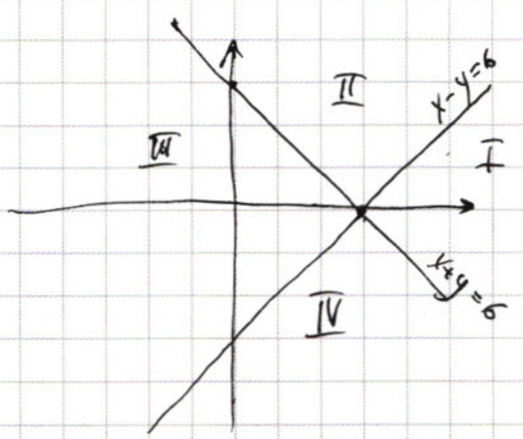
$(x-6)^2+(y-8)^2=a$ - ур-ние ок-ти с центром в точке $(6;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$; Но теперь нам нет разницы между x и $-x$; y и $-y$ $\Rightarrow$ Это будут 4 ок-ти с центрами в точках $(6;8)$, $(6;-8)$, $(-6;-8)$, $(-6;8)$



$|x-6-y|+|x-6+y|=12$; Раскроем это выражение на 4-х областях:

$$|x-6+y|=\begin{cases} x-6+y, & \text{при } x+y\geq 6 \\ 6-x-y, & \text{при } x+y<6 \end{cases}$$

$$|x-6-y|=\begin{cases} x-6-y, & \text{при } x-y\geq 6 \\ 6+y-x, & \text{при } x-y<6 \end{cases}$$



I: $\begin{matrix} x+y\geq 6 \\ x-y\geq 6 \end{matrix} \Rightarrow x-6-y+x-6+y=12 \Rightarrow \underline{x=12}$

II: $\begin{matrix} x+y\geq 6 \\ x-y<6 \end{matrix} \Rightarrow 6+y-x+x-6+y=12 \Rightarrow \underline{y=6}$

III: $\begin{matrix} x+y<6 \\ x-y<6 \end{matrix} \Rightarrow x-6-y+x-6+y=-12 \Rightarrow \underline{x=0}$

IV: $\begin{matrix} x+y<6 \\ x-y\geq 6 \end{matrix} \Rightarrow x-6-y-x+6-y=12$
$y=-6$

Посмотрев на рисунок, становится очевиден ответ $\sqrt{a}=2$; Давайте увеличивать радиусы ок-тей.

Но заметим, что каждая такая ок-ть не может выходить за пределы своего квадранта т.к. ок-ть с центром в т. $(-6;8)$, к примеру, строилась из предположения: $\begin{cases} x\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Тогда очевидно, что при $\sqrt{a}\in(2;10)$, будем иметь 4 решения: 2 при $x=0$, и 2 при $x=12$; а при $\sqrt{a}=10$ — ровно 2, т.к. решения некоторые совпадут и останется ровно 2: $(0;0)$ и $(12;0)$. Далее, при $\sqrt{a}>10$, решения пропадут вовсе

$\Rightarrow$ Ответ: $a=\{4;100\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$, Любая цифра ≥ 0 и ≤ 9. Заметим, что у нас нет нулей, т.к. в этом случае произведение цифр равно нулю. Будем вести подсчёт по кол-ву едениц. Если у нас вовсе нет едениц, то мы можем сделать не более чем семизначное число, т.к. $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $\Rightarrow$ Еденицы есть. Если еденица ровно одна, то должны присутствовать все числа, написанные выше, т.к. осталось ровно семь мест. $\Rightarrow$ Ставим еденицу 8 способами, тройки $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$ способами и пятерки задаются однозначно уже $\Rightarrow$ Имеем $8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 8 \cdot 35 = 43$ способа.

Единственная цифра >1, которую мы можем использовать кроме 3-к и 5-ок, это 9. $\Rightarrow$ Если у нас 2 еденицы, то необходимо расставить одну девятку, одну тройку и четыре пятерки. Это можно сделать $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ способами, т.к. 2 места необходимы для едениц $\left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right)$, 1 - для девятки (6) и одно для тройки (5) - пятёрки задаются однозначно. Заметим, что мы не можем сделать 2 девятки, т.к. у нас всего 3 тройки $\Rightarrow$ Это все возможные варианты $\Rightarrow$ Всего $8 \cdot 7 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ способов, $7 \cdot 5(8 + 6 \cdot 4) = 7 \cdot 20(2+6) =$

$= 140 \cdot 8 = 1120$ способов

Задача №3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

О.Д.З. $x<0$, $y>0$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 + y^2 - xy - 4(2y + x) = 0$

$(y-x)(y+x) + y(y-x) - 4(2y+x) = 0$

$\Rightarrow (y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0 \Rightarrow (2y+x)(y-x-4) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y+x=0 \\ y-x-4=0 \end{array}\right.$ Замена: $z = -x > 0$;

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = z \quad (1) \\ y = 4 - z \quad (2) \end{array}\right.$ Пусть верно (1) $\Rightarrow \begin{cases} z = 2y \\ \left(\frac{z^4}{y^2}\right)^{\lg y} = z^{\lg zy} \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2} \Rightarrow 2^{\lg y^2} \cdot \cancel{(2y)^{\lg y^2}} = (2y)^{\lg 2} \cdot \cancel{(2y)^{\lg y^2}}$ $\Big| : (2y)^{\lg y^2} \neq 0$ т.к. $y \neq 0$

$2^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2} \Rightarrow 2^{\lg y^2} = 2^{\lg 2y} \Rightarrow \lg y^2 = \lg 2y \Rightarrow y^2 = 2y \Rightarrow \underline{y=2}$

$z = 4$

$x = -4$

Первая пара $(-4; 2)$

Пусть верно (2) $\Rightarrow z = 4 - y$; $\left(\frac{z^2}{y}\right)^{2\lg y} = z^{\lg zy}$; $0<y<4$

$\left(\frac{16 - 8y + y^2}{y}\right)^{\lg y^2} = (4-y)^{\lg y(4-y)} \Rightarrow (4-y)^{\lg y^4} = (4-y)^{\lg(4y - y^2)} \cdot y^{\lg y^2}$

$(4-y)^{\lg \frac{y^4}{4y - y^2}} = y^{\lg y^2} \Rightarrow (4-y)^{\lg \frac{y^3}{4-y}} = y^{\lg y^2}$. Очевиден корень $y = 2$

т.к. $(4-2)^{\lg \frac{8}{2}} = 2^{\lg 4}$, $\Rightarrow y = 2$; $x = 2 - 4 = -2$; ещё одно решение $(-2; 2)$

См. продолжение на листе №9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$

$\Rightarrow$ т.к. $\sqrt{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4}$

$\cos 5x\cdot\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x = \sin 5x\cdot\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x$

$\Rightarrow \cos 5x\left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = \sin 5x\left(\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 5x\right)$

А если так: Поделим исходное ур-ние на $\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x - \cos 10x = 0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$

$2\cdot\cos\frac{10x+\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{7x-3x}{2} = \cos 10x$

$\Rightarrow \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos 2x = \cos 5x\cdot\sin 5x$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right)\cdot\cos 2x = \cos 5x\cdot\sin 5x$

$\sqrt{2}\cos 5x\cdot\cos 2x - \cos 5x\cdot\sin 5x = \cos 5x\cdot\sin 5x + \sqrt{2}\cdot\cos 2x\cdot\sin 5x$

Ок... то же самое

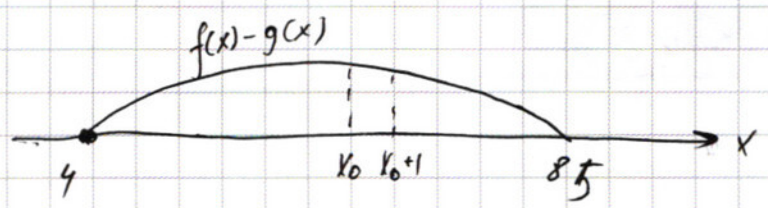
$\cos 5x = \cos(3x+2x) = \cos 3x\cdot\cos 2x - \sin 3x\sin 2x =$

$= (4\cos^3 x - 3\cos x)\cdot\cos 2x - (3\sin x - 4\sin^3 x)\cdot 2\sin x\cos x) =$

$= (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x(3 - 4\sin^2 x)\cdot\sin^2 x =$

$= 8\cos^5 x - 6\cos^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x - 2\cos x(4\cos^2 x - 1)\cdot(1-\cos^2 x) =$

Нарисуем $f(x)-g(x)$:
на $x\in[4;85]$



Причём очевидно, что $\forall x\in\mathbb{Z}: f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$. Посчитаем прирост точек под графиком при увеличении x на 1

$$\delta(x) = f(x+1)-f(x)+g(x)-g(x+1) = 3^{81}-1-(3^{x+1}-3^{x}) = 3^{81}-1-3^{x}\cdot 2,$$

$$f(4)-g(4)=0;\ \Rightarrow f(5)-g(5) = f(4)-g(4)+\delta(4) = 3^{81}-1-2\cdot 3^{4};$$

и т.д. Можно просто просуммировать такие выражения

$\delta(x)\cdot(85-x)$, $\Rightarrow$ Кол-во точек $S=\sum\limits_{x=4}^{84}\delta(x)\cdot(85-x) =$

$$=\sum_{x=4}^{84}(3^{81}-1-2\cdot 3^{x})\cdot(85-x) = \sum_{x=4}^{84}\left[85\cdot 3^{81}-85-170\cdot 3^{x}-x\cdot 3^{81}+x-2x\cdot 3^{x}\right]=$$

$$=81\cdot(85\cdot 3^{81}-85)-170\sum_{x=4}^{84}3^{x}+\sum_{x=4}^{84}x-3^{81}\cdot\sum_{x=4}^{84}x-2\sum_{x=4}^{84}x\cdot 3^{x},$$

$$\sum_{x=4}^{84}x = \frac{84+4}{2}\cdot 81 = 42\cdot 81$$

$$\Rightarrow S = 81(85\cdot 3^{81}-85-3^{81}\cdot 42+42)-170\sum_{x=4}^{84}3^{x}-2\sum_{x=4}^{84}x\cdot 3^{x} =$$

$$=81\cdot 43(3^{81}-1)-170\sum_{x=4}^{84}3^{x}-2\sum_{x=4}^{84}x\cdot 3^{x}$$

$\sum\limits_{x=4}^{84}3^{x}$ – сумма геометрической прогрессии,

т.к. $\sum\limits_{x=4}^{84}3^{x} = 3^{4}+3^{5}+\ldots+3^{84} = 3^{4}(1+3+\ldots+3^{80}) = 3^{4}\cdot\frac{3^{80}-1}{3-1} = 3^{81}\cdot\frac{3^{80}-1}{2}$,

$$\Rightarrow S = 81\cdot 43(3^{81}-1) - 85\cdot 3^{81}\cdot(3^{80}-1)-2\sum_{x=4}^{84}x\cdot 3^{x}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~cos~~

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \cos 10x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x +$$

$= \underline{8\cos^5 x} - \underline{\underline{6\cos^3 x}} - \underline{\underline{4\cos^3 x}} + 3\cos x - \underline{\underline{8\cos^3 x}} + 2\cos x + \underline{8\cos^5 x} - \underline{\underline{2\cos^3 x}} =$

$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x;$

Мне плохо. Это неправильный путь решения, очевидно.

Продолжение задачи №3

Давайте лучше выразим не через y, а через z; $z = 4 - y$

$\Rightarrow z^{4\lg(4-z)} = (4-z)^{2\lg(4-z)} \cdot z^{\lg 4 + \lg(4-z)} = (4-z)^{2\lg(4-z)} \cdot z^{\lg 4} \cdot z^{\lg(4-z)}$

$\Rightarrow (4-z)^{4\lg z} = (4-z)^{2\lg(4-z)} \cdot \cancel{z}4^{\lg z} \cdot (\cancel{4-z})^{\lg z}$

$\Rightarrow (4-z)^{4\lg z - 2\lg(4-z) - \lg z} = 4^{\lg z}$

$\Rightarrow (4-z)^{\lg \frac{z^3}{(4-z)^2}} = 4^{\lg z}$; Теперь из соображений роста становится очевидно, что корень может быть один, а мы его нашли

$z^{\lg 4}$ – возрастает;

Ответ: $(-4; 2)$ и $(-2; 2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \cos\beta\sin\alpha - \cos\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$16875 : 25 = 651$; $168 75 : 5 = 3355$; $675 : 5 = 135$; $135 : 5 = 27$; $671 : 11 = 61$

$673 \cdot 25 = 16275$; $651 \cdot 25 = 16275$; $671 \cdot 25 = 6775$; $675 \cdot 25 = 16875$; $135 \cdot 5 = 675$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x = 2$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

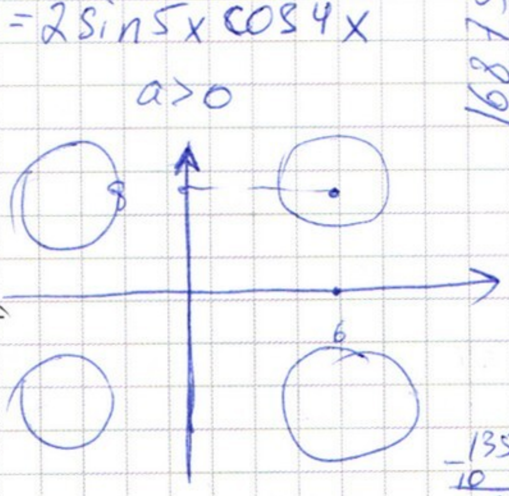
$\sin(x)+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cos 5x\cdot\sin 5x = 2\sin 5x\cos 4x$

$\cos 2x\left(1-\operatorname{tg} 5x\right) = \operatorname{tg} 5x$

$\left\{\begin{array}{l}|x-6-y|+|x-6+y| = 12\\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2 = a\end{array}\right.$

$a>0$



$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x)^{\lg(-xy)}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4$

$\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$x<0$, $-xy<0$ $\Rightarrow$ $x<0$, $y>0$

$z = -x > 0$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$y(2y - x - 8) - x(x+4) = 0$

$2y^2 + zy - z^2 + 4z - 8y = 0$

$3^{x+1} - 3^x = 3^x \cdot 2$

$y^2 + y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$

$2y^2 + zy - z^2 + 4z - 8y = 0$

$2y^2 + zy - 8y - 4$

$2y - 2y = y(z-2)$

$3^{81} - 1 - 23^x$

$625 = 25 \cdot 25$

$$\left(\frac{z^4}{y^2}\right)^{\lg y} = z^{\lg z + \lg y}$$

$z^{\frac{1}{\lg_z 10}}$

$2y^2 - 6y - 4$

$y^2 - 3y - 2 = y -$

$375 \cdot 27$; 2625, 750, 10125

$$\frac{z^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = z^{\lg z} \cdot z^{\lg y}$$

$2y^2 + yz - z^2 + 4z - 8y = 0$

$$\left(y^{2\lg y}\right)' = y^{2\lg y} \cdot \frac{2}{\ln 10 \cdot y}$$

$\frac{1 \cdot y}{z}$

$$\Rightarrow \frac{z^{3\lg y}}{z^{\lg z}} = y^{2\lg y}$$

$$2\frac{y^3}{z} + y^2 - yz + 4y - \frac{8y^2}{z} = 0$$

$140 \cdot 8 = 1120$

$$z^{3\lg y - \lg z} = y^{2\lg y}$$

$$z^{\lg\frac{y^3}{z}} = y^{\lg y^2}$$

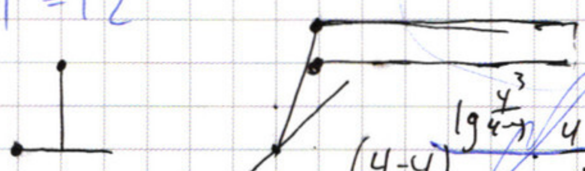
$$\left(\frac{y^3}{z}\right)^{\lg z} = (y^2)^{\lg y}$$

$x + y = 6$

$x - y = 6$

$$(4-y)^{\lg\frac{y^3}{4-y}} \cdot \frac{4-y}{\ln 10 \cdot y^3}$$

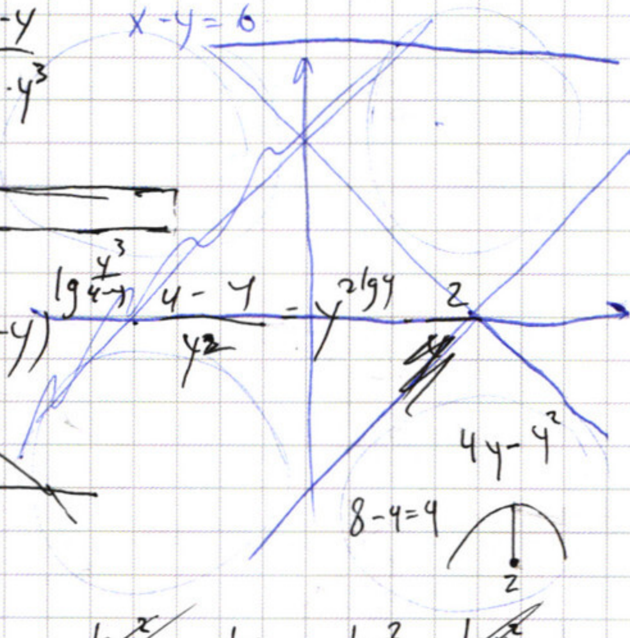
$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$



$x - y = 6$

$\Rightarrow y = x - 6$

$$(4-y)^{\lg\frac{y^3}{4-y}} \cdot \frac{4-y}{y^2} - y^{2\lg y}$$

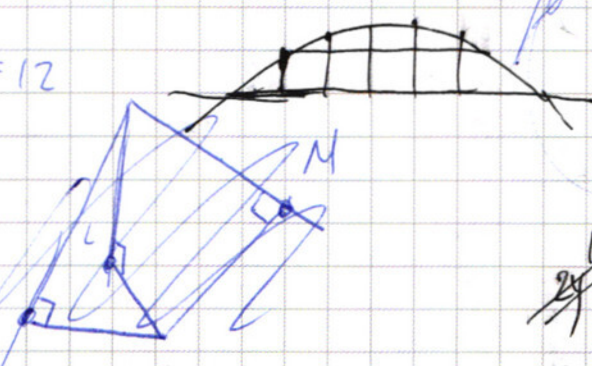


$x - 6 - \cancel{y} + x - 6 + \cancel{y} = 12$

$x = 12$

$4y - y^2$

$8 - 4 = 4$



$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = (y^2)^{\lg y}$$

$$y^{3\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\cancel{2y}^{\lg y^2} \cdot 2y^{\lg z} = 2^{\lg y^2} \cdot \cancel{2y}^{\lg y^2}$$

$4^{2\lg 4}$

$$2y^{\lg z} = 2^{\lg y^2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$85 = 81 + 4$

$3^{81} \cdot 81 = 3^{81} \cdot 3^4$

$\cos 5x = \cos(3x + 2x) =$

$= \cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x =$

$=$

$\beta = 5x \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$\beta = 5x + \frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{2}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$2y^2 - xy = x^2 + 4x + 8y$

$\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y(y-x) -$

$\frac{1}{2}\left(\sin 10x + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$(y-x)(y+x)$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta =$

$y^2 - xy = 4(y-x) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$

$85 - x +$

$(y-x)(2y+x) - 4x - 8y = 0$

$\alpha + \beta = 10x \pm \frac{\pi}{2}$

$+ 3^{81}(x-4) = 3^x$

$\cos 10x$

$(y-x)(2y+x) - (2y+x) \cdot 4 = 0$

$\alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}$

$(x+6)^2 + (y-8)^2$

$\Rightarrow (y - x - 4)(2y + x) = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2\sin 5x} + \frac{\sqrt{2}}{2\cos 5x} = \frac{1}{\cos 2x}$

$85 + (3^{81} - 1) \cdot x > y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$85 - 4 \cdot 3^{81} + (3^{81} - 1) \cdot x > 3^x$

$85 + (3^{81} - 1) \cdot x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$\alpha \neq$

$\frac{1}{\sin 5x} + \frac{1}{\cos 5x} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2x}$

$5x + \frac{\pi}{4}$

$3^{81} - 4 > 81$

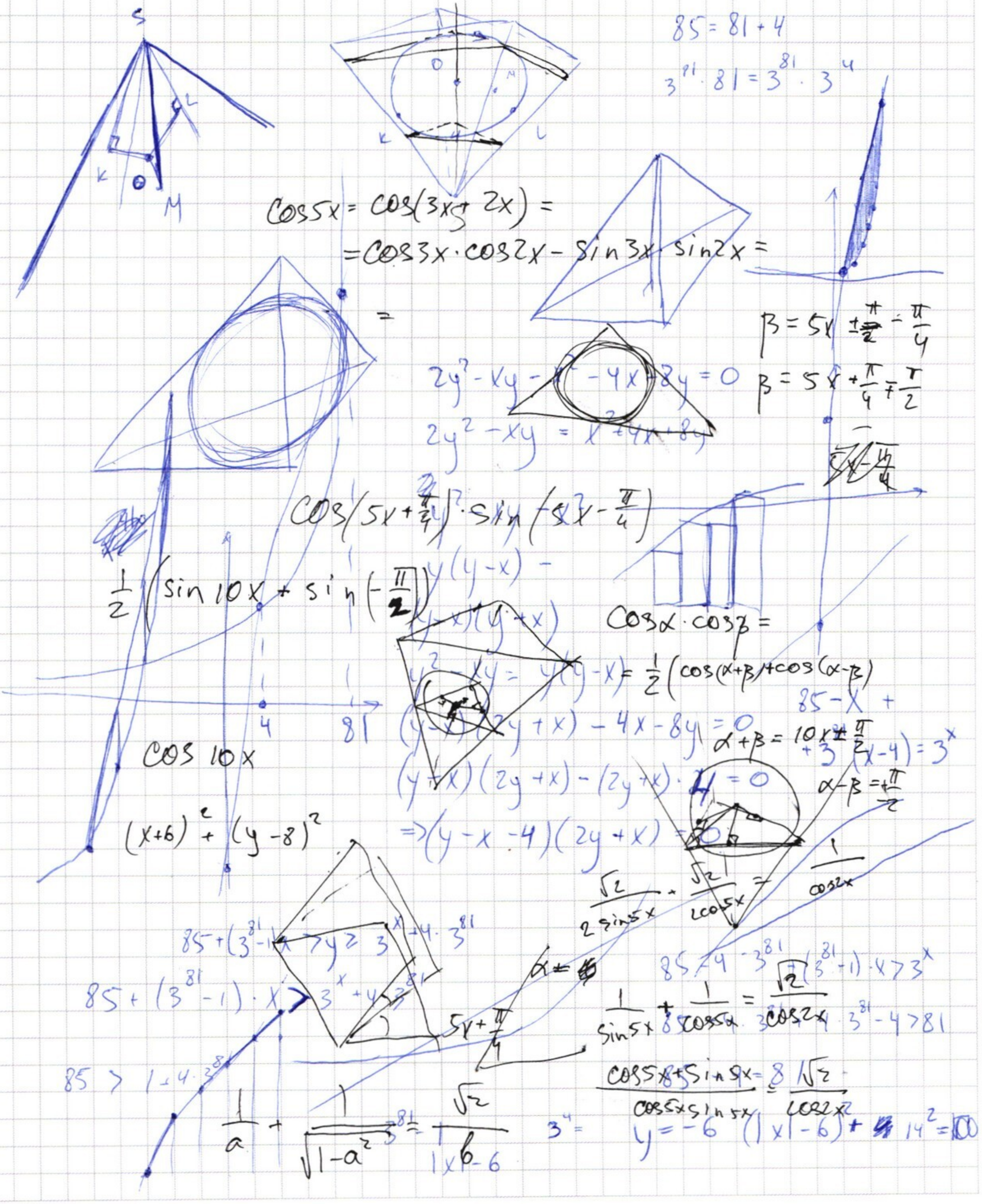
$85 > 1 + 4 \cdot 3^{81}$

$\frac{\cos 5x + \sin 5x}{\cos 5x \sin 5x} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 2x}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{|x| - 6}$

$3^4 =$

$y = -6 \quad (|x| - 6)^2 + \quad 14^2 = 100$



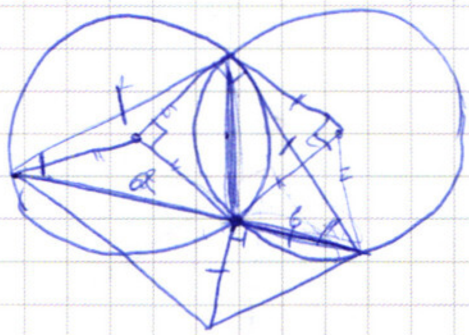
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cos 5x\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)\cdot\cos 2x = \sqrt{2}\cdot\cos 5x\cdot\sin 5x$$

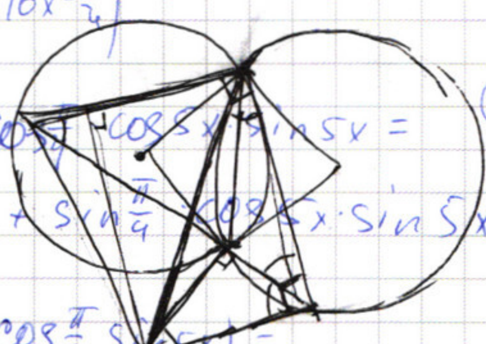


$$\begin{array}{r} 169 \\ -\ 25 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$-\cos\left(10x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(10x-\frac{\pi}{4}\right)$$



a^2+b^2

$(a+b)^2 = d^2 + c^2$

~~cos7x~~

$$\cos 5x\cdot\cos 2x - \cos\frac{\pi}{4}\cos 5x\cdot\sin 5x =$$

$$= \sin 5x\cdot\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x\cdot\sin 5x$$

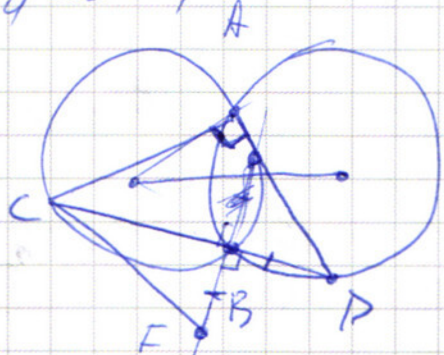
$$\cos 5x\left(\cos 2x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 5x\right) =$$

$$= \sin 5x\left(\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x\right)$$

~~$\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}$~~

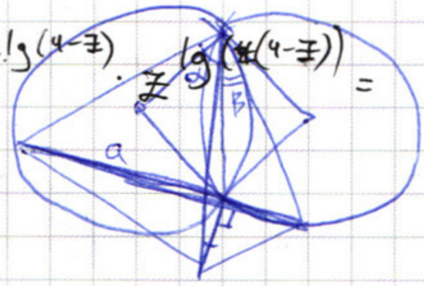
$$\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x$$

$$\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x$$



cos

$$z^{4\lg(4-z)} = (4-z)^{2\lg(4-z)}\cdot z^{\lg(4-z)} =$$

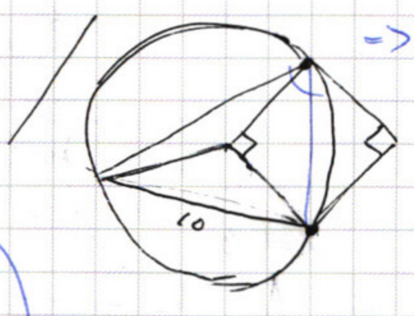


$z^{\lg}$

$$a = 2R\cdot\sin\alpha$$

$$b = 2R\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=$$



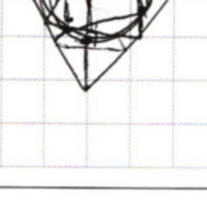
$$\frac{10}{\sin\alpha} = 26$$

$$\Rightarrow \sin\alpha$$

85

4^2

4^3



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)