

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS  
CHICAGO, ILL. 60637

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975

1975



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

1.  $16875 = 5^4 \cdot 3^3 \Rightarrow 1, 3, 5, 9$  - возможные цифры числа

2. В числе будет 4 цифры 5

3. Если в числе нет цифр 9, тогда цифры: 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

Всего чисел:  $\frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5$

4. Если в числе есть цифра 9 (она может быть только одна), то цифры:

5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1

Всего чисел:  $\frac{8!}{2!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$

5. Всего чисел:  $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 35 \cdot 32 = \underline{1120}$

№ 5 а-? 2 реш.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} & 2. \quad \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \end{cases} \end{aligned}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$x = 12$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} & 4. \quad \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \end{cases} \end{aligned}$$

$$6-x+y + x-6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$6-x+y + 6-x-y = 12$$

$$x = 0$$

$$(2) \quad (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$



№5

(2) - 4 окружности или 4 касяи окружностей с центрами в  $\begin{pmatrix} 6; 8 \\ -6; 8 \\ 6; -8 \\ -6; -8 \end{pmatrix}$  или 4 точки

радиусами  $\sqrt{a}$

первый раз 2 решения  $\{ \} a = 4$

$$y = x - 6$$

(1)

второй раз 2 решения  $\{ \}$

$$y = 6 - x$$

второй раз 2 решения  
 $a = 100$

Ответ:  $a = 4, a = 100$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad 2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x}}{4} = \frac{x+8 \pm \sqrt{(3x)^2 + 8^2 + 2 \cdot 3 \cdot 8x}}{4} =$$

$$= \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} = \begin{cases} x+4 & (A) \\ -\frac{x}{2} & (B) \end{cases}$$

(3) ~~1)  $y = x+4$~~

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\text{одз: } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ -x \neq 1 \\ \frac{x^4}{y^2} \neq 1 \end{cases}$$

$$(-x)^{4 \lg y} \cdot (y)^{-2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$(-x)^{3 \lg y - \lg(-x)} = y^{2 \lg y} \quad \leftarrow \lg$$

$$(\lg(-x)) \cdot (3 \lg y - \lg(-x)) = 2 \lg y \cdot \lg y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg(-x) \lg y + \lg^2(-x) = 0$$

~~$$\lg y \neq 3 \lg(-x) \Rightarrow y \neq (-x)^3$$~~

$$\lg^2(-x) \left( 2 \left( \frac{\lg y}{\lg(-x)} \right)^2 - 3 \frac{\lg y}{\lg(-x)} + 1 \right) = 0$$

$$\lg^2(-x) \cdot 2 \left( \frac{\lg y}{\lg(-x)} - 1 \right) \left( \frac{\lg y}{\lg(-x)} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = 0 \rightarrow (-x) = 1. & \text{не подходит} \\ \lg y = \lg(-x) \rightarrow y = -x \\ 2 \lg y = \lg(-x) \rightarrow y^2 = -x \end{cases}$$

$$6: 1) \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \text{ на одз.}$$

$$2) \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y^2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

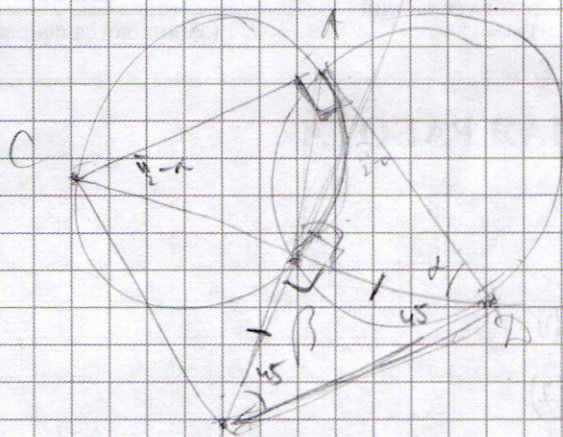
Ответ:  $(-2; 2), (-4; 2)$

$$x = -\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$2) \begin{cases} y = x+4 \\ y^2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = -1 \pm \sqrt{17} \\ x = -(\sqrt{17}-1)^2 \end{cases}$$



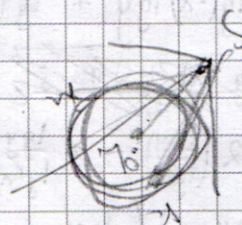
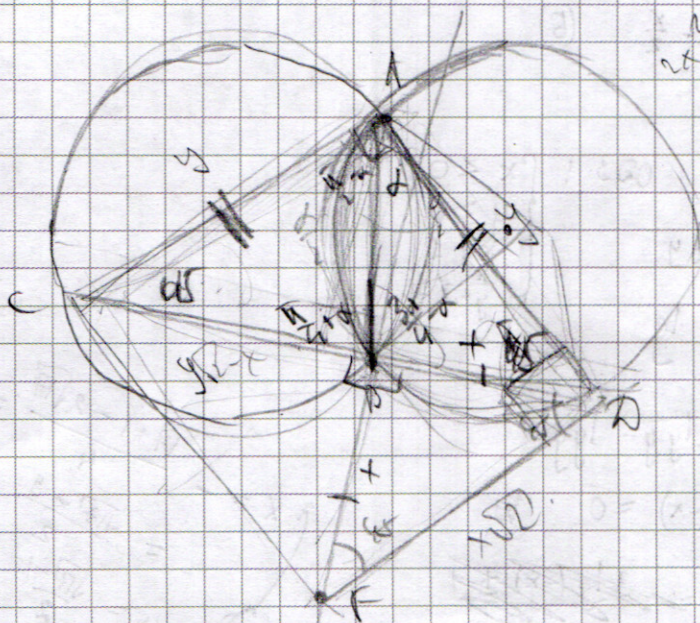


$$-7 \sin 7x - 3 \sin 3x$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3x$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3x$$

$$2y^2 + \frac{1}{2} - 2y\sqrt{2}x + x^2 = 2y^2 + \frac{1}{2} - 2y\sqrt{2}x$$



$$7 \sin 7x (\sqrt{2} \cos 3x - 1) + 3 \sin 3x (\sqrt{2} \cos 7x - 1)$$

$$= 5 \sin 7x (\sqrt{2} \cos 3x - 1) - 7 \sin 7x (\sqrt{2} \cos 3x - 1)$$

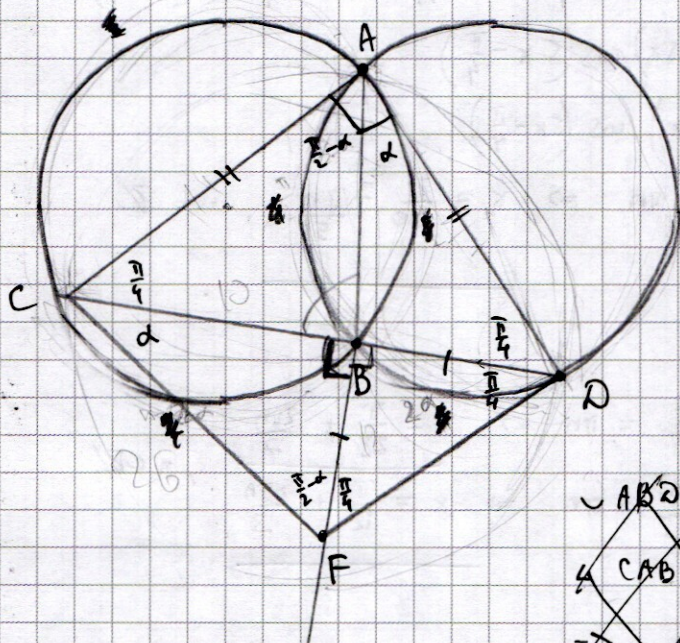
$$= -7 \sin 7x - 3 \sin 3x + 3 \sqrt{2} \cos 7x \sin 3x + 7 \sqrt{2} \sin 7x \cos 3x =$$

$$-7 \sin 7x - 3 \sin 3x - \sqrt{2} (-\cos 7x \cdot 3 \sin 3x - \cos 3x \cdot 7 \sin 7x) =$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

26.



$$1. \angle BDF = \angle BFD = \frac{11}{4}$$

$$2. \angle ACQ = \frac{\angle AB_1}{2} = \frac{\angle AB_2}{2} = \angle ACB$$

$$3. \quad \cancel{AB} = \cancel{AC} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2 \cdot AB} = \cancel{2 \cdot AC} \\ \cancel{BC} = \cancel{BC} \\ \cancel{\angle ABC} = \cancel{\angle ACB} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle AC1 \Rightarrow \angle BAO = \alpha, \text{ to} \\ \angle CAB &= \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \angle B3D = 2\alpha, \angle C2B = \frac{\pi}{2} - 2\alpha \\ \Rightarrow \angle ABD &= \frac{\pi}{2} + 2\alpha, \angle AC1 = 2\pi - \angle ABC = \\ &= 2\pi - \left( \angle B2C + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} - (\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2\alpha. \end{aligned}$$

$$3. \frac{AB}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2 \cdot 13$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$\angle CDB = \angle CAD = \alpha$$

$$4. \frac{BQ}{\sin \alpha} = 2R = \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{2} - \alpha} \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \angle BCF = \alpha.$$

$$\triangle CFD \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{FD}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = AB \cdot \frac{1}{2} = 26$$

5.  $BC = 10 \Rightarrow BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 2\sqrt{13^2 - 5^2} = 24 = DF = BD$

9.  $CD = BC + BD = 34$ ,  $CA = AD = \frac{34}{\sqrt{2}}$

$$7. \frac{AB}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{24}{13\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$8. S_{\text{net}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{39}{\sqrt{2}} \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = 17^2 = \underline{289}$$

Order!  $CF = 26$ ;  $S_{\text{ser}} = 289$



№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) + \cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cancel{-2 \sin \frac{\pi}{4}} - 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 & \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

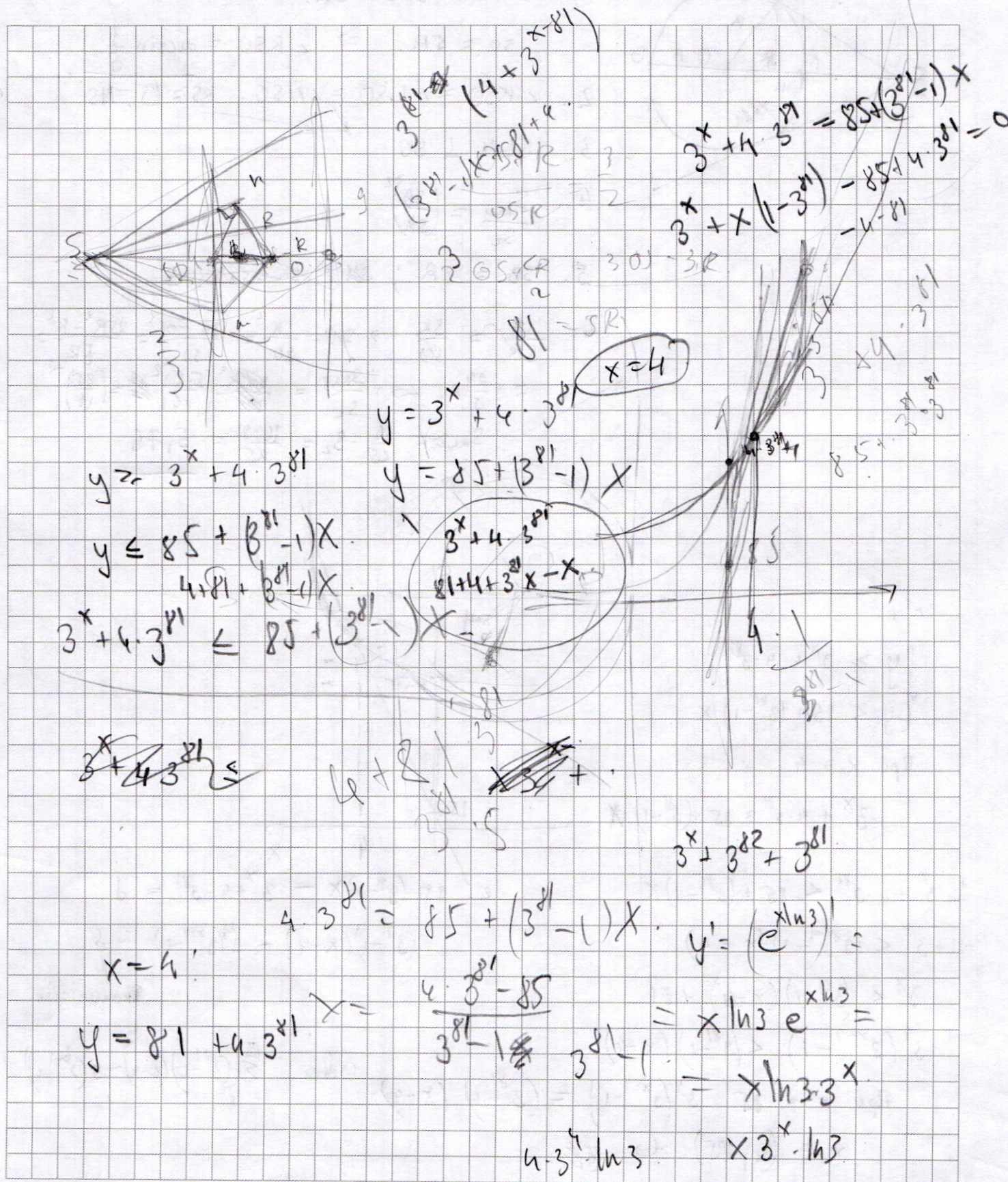
$$-2 \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 & \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 & \frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) + \cos 3x = \sin 7x (1 - \sqrt{2} \sin 3x) + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x \cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right) = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2 \cos 7x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right)$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$(-x)^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$(-x)^{3 \lg y} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = \cos 10x$$

$$2y^{\lg(-xy)} - x^2 - 4x - 8y = 2$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 + 16x -$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 4 + 81 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - 81 \leq 4(1 - 3^{81}) + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 85 + 3^{81}x - x$$

$$3^x + x + 4 \cdot 3^{81} - 4 - 81 - 3^{81}x \leq 0$$



$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos 7x (\cos 5x - \sin 5x) = 2 \cos 10x \quad \cos \alpha - \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$5x + 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \cos \alpha - \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$5x - 2x$$

$$(\cos 7x - \sin 5x \cos \frac{\pi}{2} - 7x) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 10x$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos 2x = 25 \cdot 6.25 \cos 5x - \sin 5x$$

$$5^2 \cdot 5 (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$5 \cdot \cos 5x - \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) \quad \cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$(-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(5x - \frac{\pi}{4})) \quad 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \frac{\pi}{4} \quad \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$9, 3, 5, 5, 8, 5$$

$$\cos 7x - \sin 7x =$$

$$= \cos 7x - \cos(\frac{\pi}{2} - 7x) =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)$$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) - \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) - \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 10x$$

$$-2 \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \sin 2x = \cos 10x$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) \cos 2x = 2 \cos 5x - 1$$

$$\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$