



Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

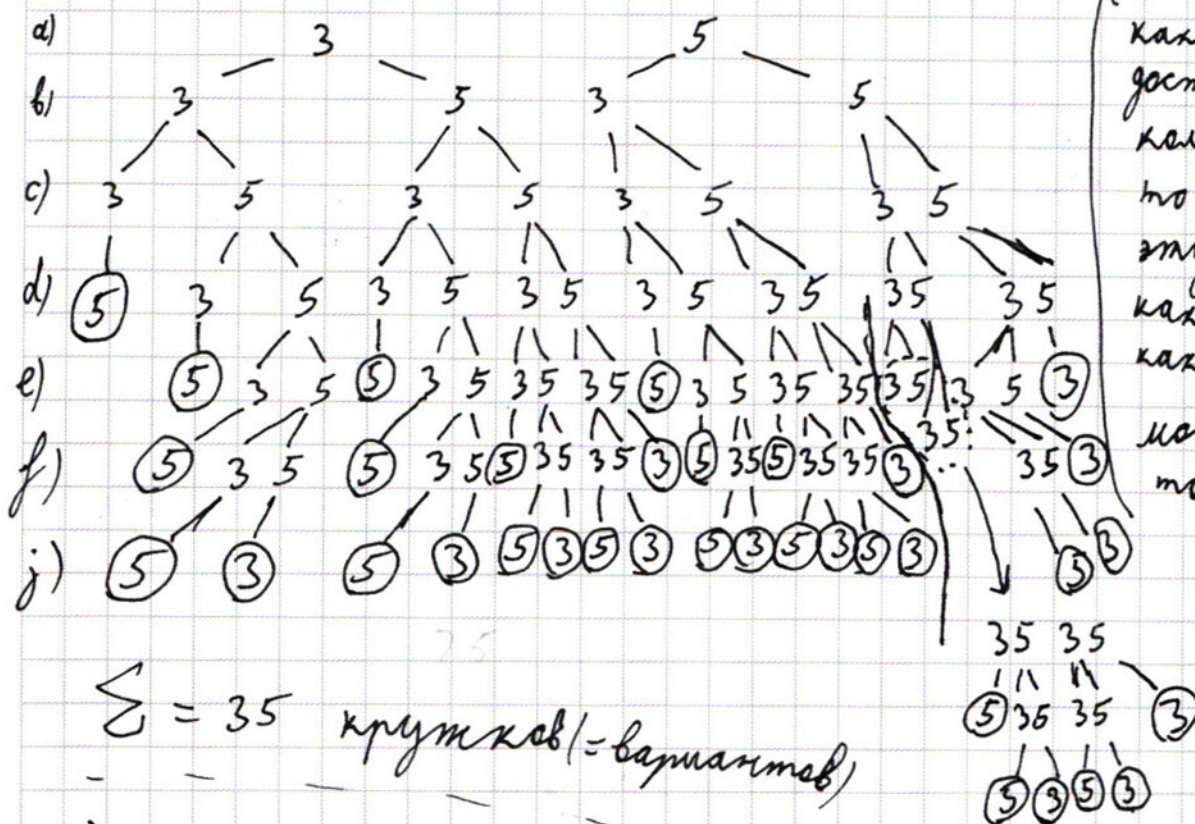


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$a b c d e f j : a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot j = 16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

- 1) Посчитаем, сколько 7-и значных чисел мы можем построить с помощью 5-ок и 3-ек, для этого построим граф вариантов выбора, какую цифру можно поставить / как только для



какого-то числа достигается максимальное кол-во 5-ок или 3-ек, но мы заканчиваем эту ветку и записываем как вариант, так как оставшиеся цифры можно расположить только 1-м способом.

$$\Sigma = 35 \text{ кружков (= вариантов)}$$

- 2) теперь если мы будем добавлять 1-у к каждой конфигурации, то её можно поставить на 8 позиций, при этом все они будут разными $\Rightarrow N = 35 \cdot 8$
 $\Rightarrow 280$ - количество вариантов 7-значных чисел
 Ответ: 280.

№2

$$\underbrace{\cos 7x + \cos 3x}_{2 \cos(5x) \cos(2x)} - \sqrt{2} \cos 10x = \underbrace{\sin 7x + \sin 3x}_{2 \sin(5x) \cos(2x)}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x - 2 \cos 2x \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x + 2 \cos 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\cos 5x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 5x}{\sqrt{2}} = \cos 2x \end{cases}$$

сп-ла дополнительного угла

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos(2x) \\ 5x = \pm(\frac{\pi}{2} - 5x) + 2\pi n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = \pm(5x - \frac{\pi}{4}) + 2\pi n \\ 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n.$

№3

$$\begin{cases} (\frac{x^4}{y^2})^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $y > 0, x < 0$

(1): логарифмируем уравнение

$$\lg(\frac{x^4}{y^2}) \cdot \lg y = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$(4 \lg(-x) - 2 \lg(y)) \lg y = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg(y))$$

1) $\lg(-x) = \lg(y) = 0 \quad -x = y = 1$ - не удовлетворяет 2-ому

$$2) \quad 4 \frac{\lg(-x)}{\lg(y)} - 2 = \left(\frac{\lg(-x)}{\lg(y)} \right)^2 + \frac{\lg(-x)}{\lg(y)}$$

$$(\log_y(-x))^2 - 3 \log_y(-x) + 2 = 0$$

$$\log_y(-x) = \begin{cases} 1 \rightarrow -x = y & \textcircled{I} \\ 2 \rightarrow -x = y^2 & \textcircled{II} \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 3-ей задачи

Ⓘ

$$\begin{aligned} -x &= y \\ 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y &= 0 \\ 2y^2 - 4y &= 0 \\ y = 2 \quad x = -2 &\quad (-2; 2) \end{aligned}$$

Ⓜ

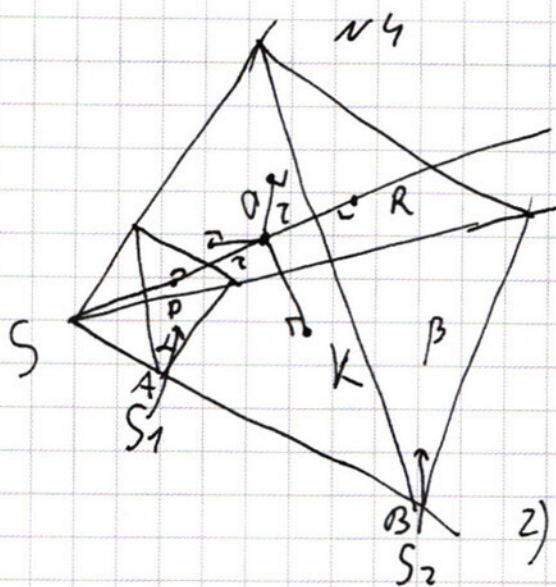
$$\begin{aligned} -x &= y^2 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y &= 0 \\ y^3 - y^2 - 6y + 8 &= 0 \\ y = 2 \quad x = -4 &\quad (-4; 2) \\ y^2 + y - 4 &= 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad y > 0 \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Дано:

$Q(0; 2)$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9}$$



1) так как $SP \perp \alpha$ и $SR \perp \beta$,

то объёмы 2-х тетраэдров
их пирамид: $= \frac{1}{3} S_1 \cdot SP$ и $\frac{1}{3} S_2 \cdot SR$,

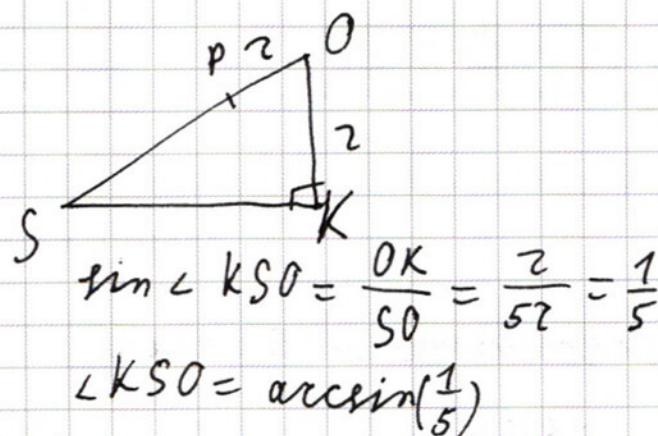
2) так как α и $\beta \perp SR$, то $\alpha \parallel \beta \Rightarrow$ стороны в этих

двух тетраэдрах делятся в одинаковых соотношениях = n
отношение объёмов ^{тетраэдров} мы можем записать как n^3 или

как $\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{SP}{SR}$ $\left(n = \frac{SA}{SB} = \frac{SP}{SR} \right)$ $\frac{S_1}{S_2} \cdot n = n^3 \quad n = \frac{2}{3}$
и $\frac{SP}{SR} = n = \frac{SP}{SP+22} \Rightarrow SP = 42$

продолжение задачи 4.

3) рассмотрим $\triangle SOK$:



Ответ: $\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$.

№ 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(2) при разных раскрываниях модулей получаются графики окружностей с центрами в $O_1(6; 8)$, $O_2(6; -8)$, $O_3(-6; 8)$, $O_4(-6; -8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

(1) напишем все варианты раскрывания модулей

1) ++
 $x-6-y+x-6+y=12$
 $x=12$

эти прямые нарисуют графики

2) --
 $y+6-x-x+6-y=12$
 $x=0$

образуют квадрат с вершинами в

3) +-
 $x-6-y-x+6-y=12$
 $y=-6$

A(0; -6)

4) -+
 $6+y-x+x-6+y=12$
 $y=6$

B(0; 6)

C(12; 6)

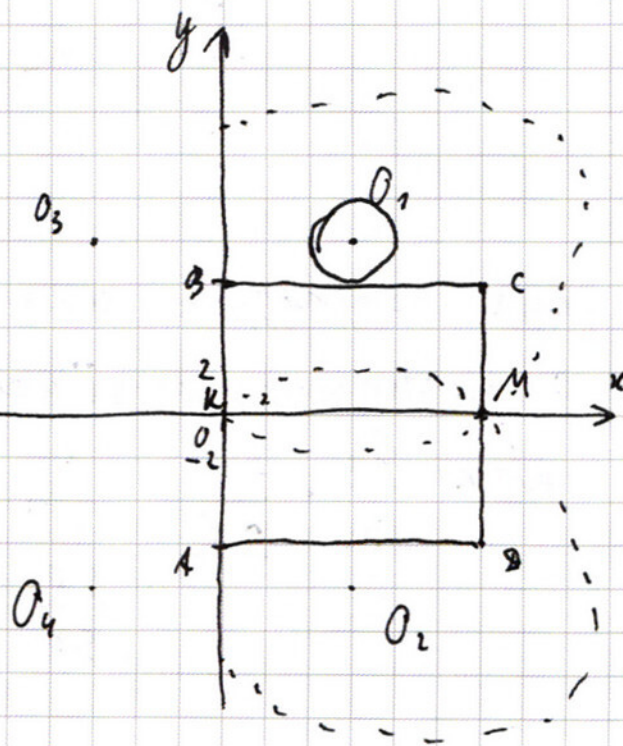
D(12; -6)

Первый случай 2-х решений

будет, когда окр. с центр. O_1 и O_2 коснутся квадрата:

$a^* = 4$

продолжение следует



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$x = 4$$

$$85 - 4 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$81 + 3^{81} \cdot 4$$

$$3^{81} (4 + 3^{x-81})$$

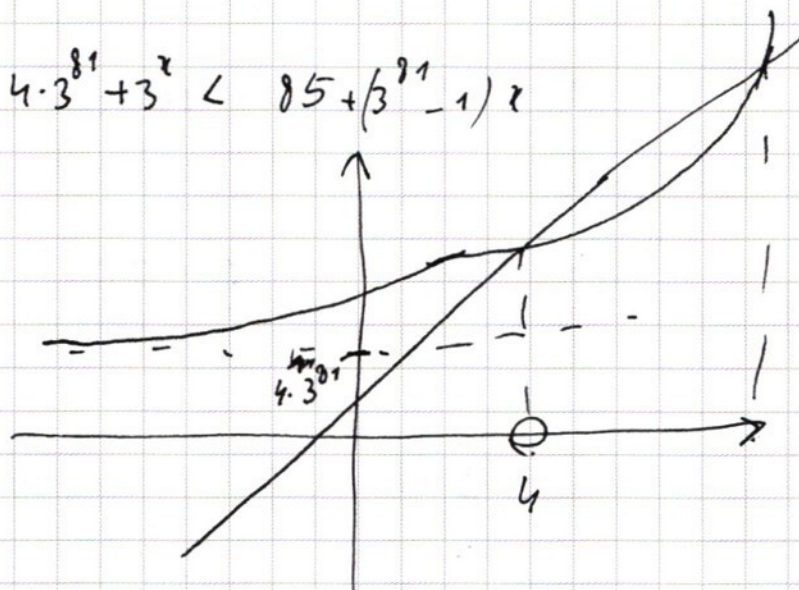
$$x = 85 \text{ — снова равен}$$

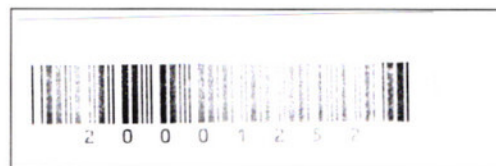
$$x \cdot 3^{81}$$

$$n = 84$$

$$\sum_{n=5}^1 (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{81})$$

$$4 \cdot 3^{81} + 3^x < 85 + (3^{81} - 1)x$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 6-ой задачи

$$\sin \cos + \cos \sin$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 11\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \angle OCF\right) = 13 \cdot 11\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\right)\right) =$$

$$= 17 \cdot 11 = 187$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 187 \end{array}$$

Ответ: а) 26.
б) 187.

17

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

— одно — график показательной ф-ии,
а второе — прямая, если
есть решения, то график
выглядит так:

заметьте, что при

$$x = 85 \text{ и } x = 4$$

два графика пересекаются

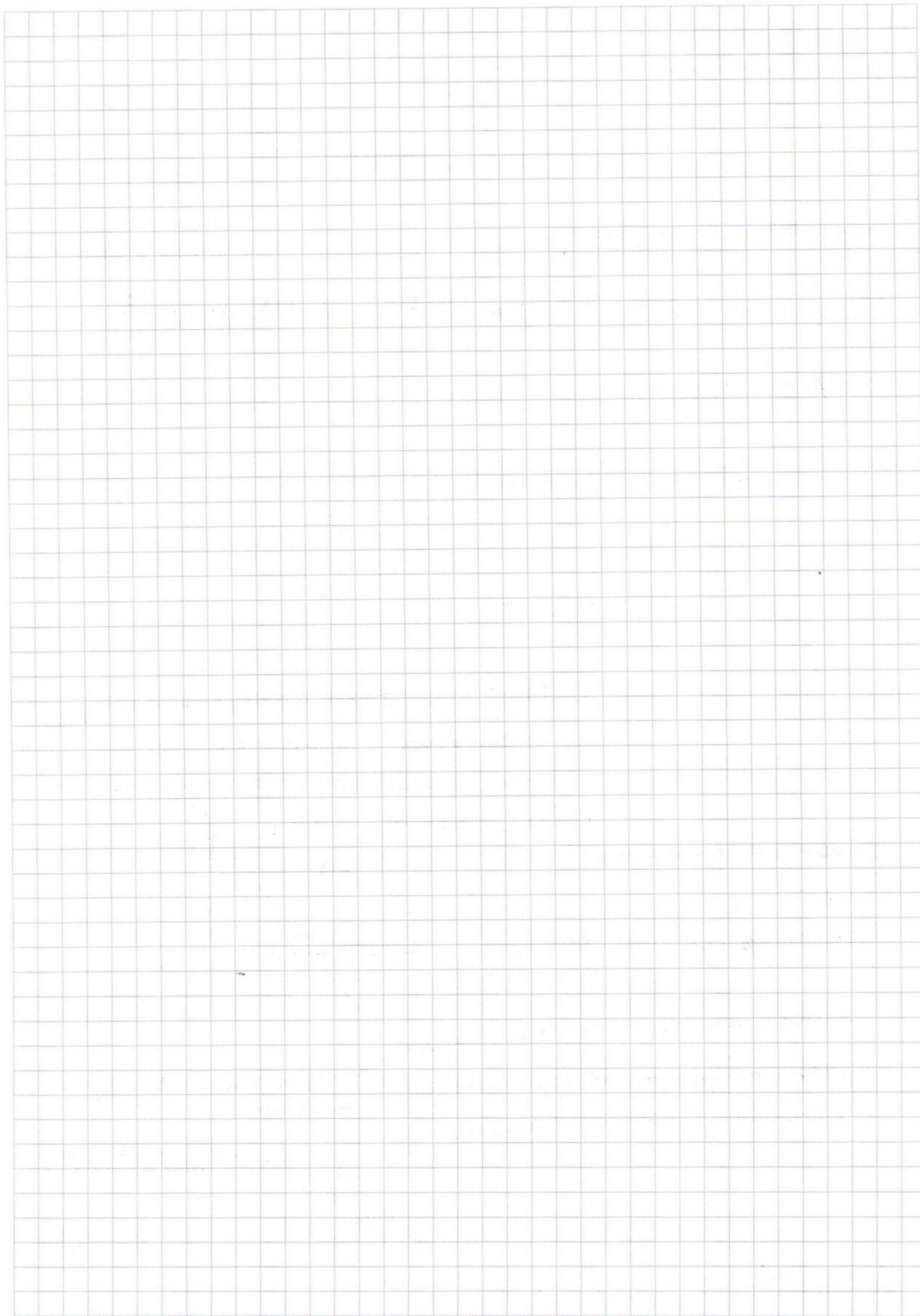


между ними лежат все возможные пары чисел (x, y) ,
удовлетворяющие неравенству, значит
кол-во N решений будет:

$$N = \sum_{i=5}^{84} (85 + (3^{81} - 1)i - 3^i - 4 \cdot 3^{81}) =$$

$$= \sum_{i=5}^{84} ((3^{81} - 1)i - 3^i) + 85 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$\text{Ответ: } 85 - 4 \cdot 3^{81} + \sum_{i=5}^{84} ((3^{81} - 1)i - 3^i)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

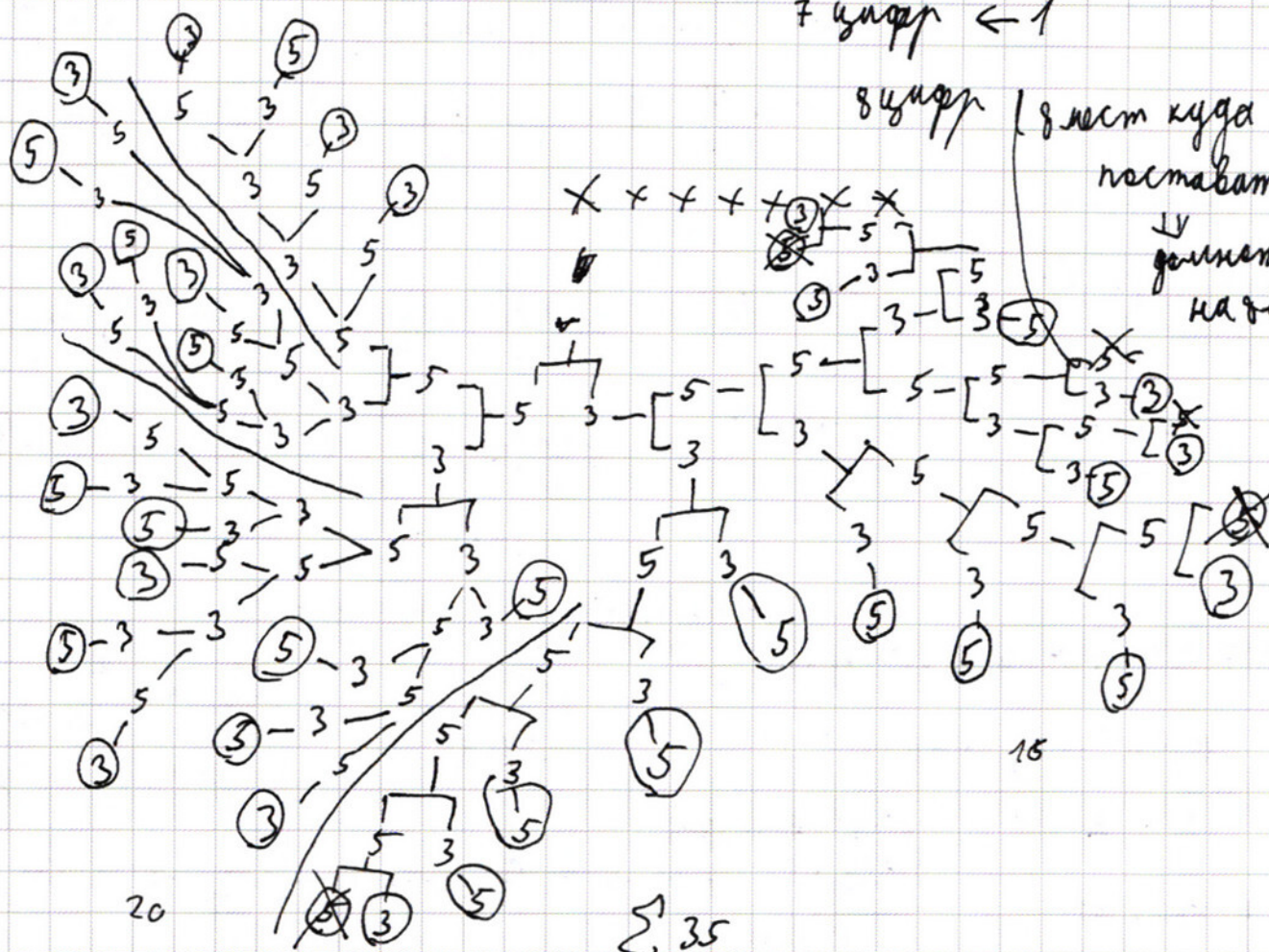
№1

$$\begin{array}{r}
 16875 \div 5 \\
 \underline{15} \\
 18 \\
 \underline{15} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3375 \div 5 \\
 \underline{30} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 675 \div 5 \\
 \underline{5} \\
 17 \\
 \underline{15} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 135 \div 5 \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{27} = 3 \cdot 3 \cdot 3
 \end{array}$$

число состоит из $5(4), 3(3), 1(1)$

7 цифр $\leftarrow 1$

8 цифр | 8 мест куда
поставить
IV
должны
на 8-й месте



$$35 \cdot 8 = 280 \text{ — ответ}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x \quad 2 \sin(5x) \cos(2x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x - \cos 5x \cdot \sqrt{2} - \sin 5x \cdot \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$5x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \left[\frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n}{5} \right]$$

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x$$

$$\cos(2x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2x = \pm\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$$

$$\begin{cases} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \cdot \lg y = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$(4 \lg|x| - 2 \lg y) \lg y = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg(y))$$

$$\lg(-x) = \lg y = 0$$

$$y^2 = -x$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y = 2 \quad \checkmark$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \dots$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \dots$$

$$-x = y \quad 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y - 8y = 0$$

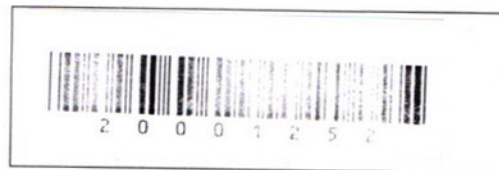
$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y = 2 \quad x = -2 \quad \checkmark$$

$$f^2 - 3f + 2 = 0$$

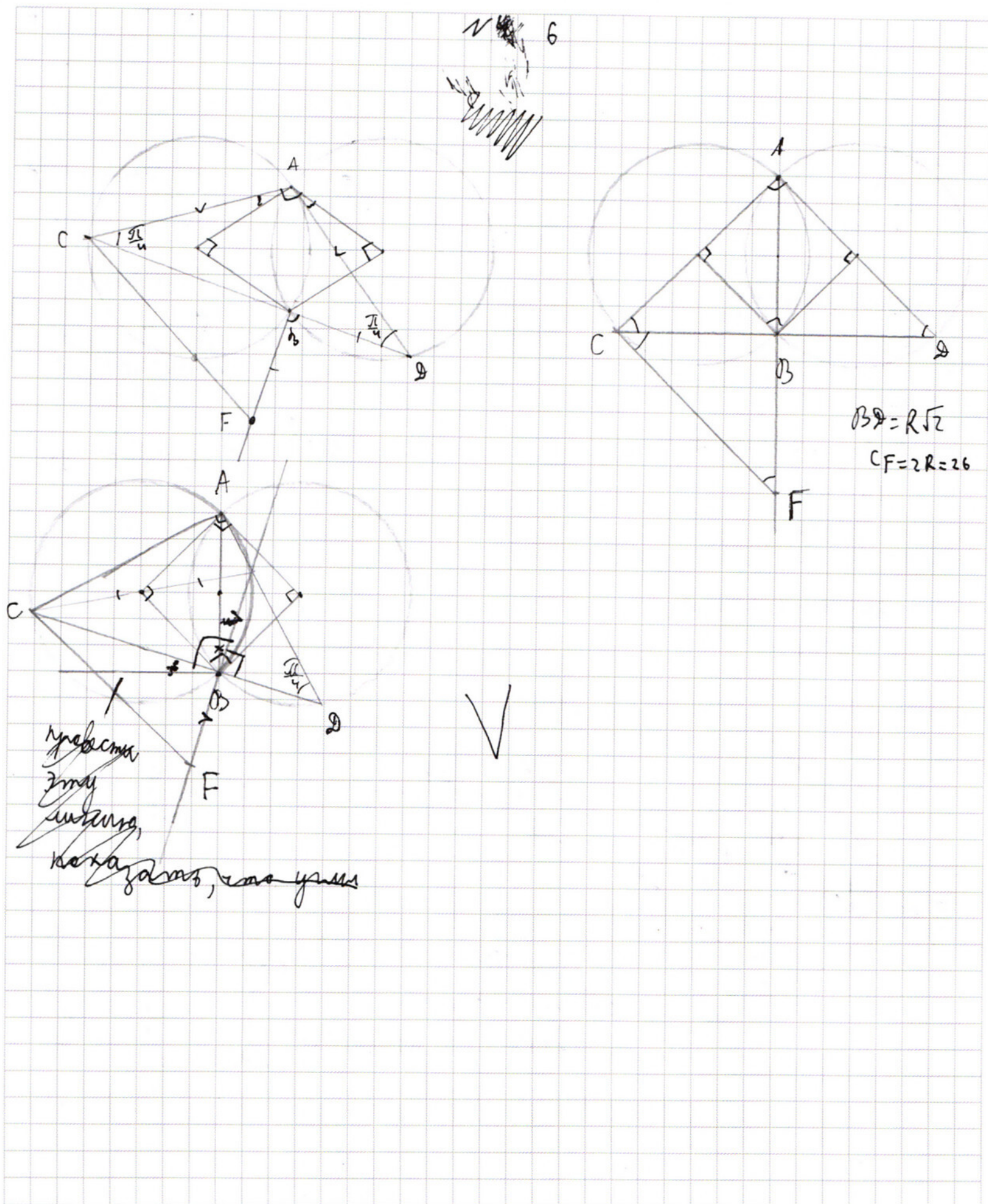
$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \log_2(-x) = 1$$

$$-x = y^2$$



(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \rightarrow$$

1) ++

$$x-6-y+x-6+y=12$$

$$2x=24$$

$$x=12$$

2) --

$$y+6-x-x+6-y=12$$

$$x=0$$

3) +-

$$x-6-y-x+6-y=12$$

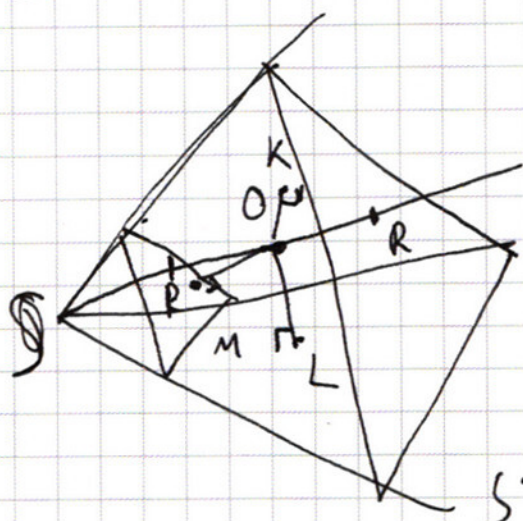
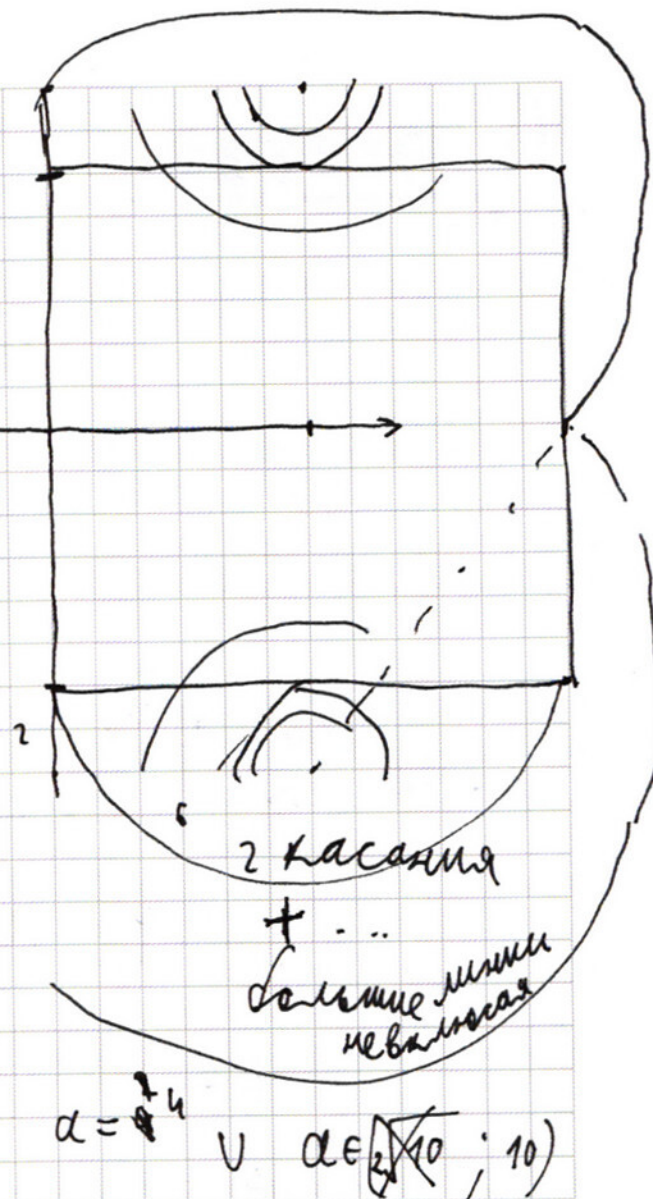
$$2y=-12$$

$$y=-6$$

4) -+

$$y+6-x+x-6+y=12$$

$$y=6$$



NS

$$\frac{SP}{SR} = \frac{SP}{SP+2z} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$2(2z+SP) = 3SP$$

$$4z = SP$$

$$z = \frac{SP}{4}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{z}{SP+2z} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$$