

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Таким, число 64827 имеет 7 простых делителей, а т.к. мы рассматриваем 8-ми-значные числа, то каждое из них будет состоять из трех "3", четырех "7" и одной "1" (чтобы произведение его цифр = 64827). Рассмотрим кол-во таких чисел:

а) пусть единица стоит на 1-ом месте, тогда кол-во чисел, содержащих цифры 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, начинающихся с "1", будет равно $C_7^3 = C_7^4 = 35$.

б) для каждой "позиции" "1" (всего — 8 возможных) существует 35 способов расставить остальные 7 цифр в числе без повторений.

Тогда искомое кол-во восьмизначных чисел равно

$$35 \cdot 8 = 280.$$

Ответ: 280

Задание 3

Рассмотрим 2-е уравнение системы:

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\cancel{y^2 + 4y + 4 - 4 + 2xy + 4x - 3x^2 + 12x}$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4 + 2xy + 4x - 3x^2 + 8x = 0$$

$$(y+2)^2 + 2x(y+2) - 3x^2 + 8x - 4 = 0$$

Рассмотрим как квадратное относительно $(y+2)$:

$$\frac{1}{4}D = x^2 + 3x^2 - 8x + 4 = (2x-2)^2; \quad \frac{1}{4}D \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \text{корни есть всегда.}$$

$$y+2 = -x + 2x - 2$$

$$y+2 = -x - 2x + 2$$

$$y = x - 4$$

$$y = -3x$$

Рассмотрим 1-ое уравнение системы:

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \quad \text{где } x > 0, y < 0.$$

$$a) y = -3x:$$

$$\left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)} \Rightarrow x^{6\ln(3x)} = 3^{\ln(3x)} \cdot x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\ln x^{6\ln(3x)} = \ln 3^{\ln(3x)} + \ln x^{2\ln(9x^3)}$$

$$6 \ln(3x) \cdot \ln x = \ln(3x) \cdot \ln 3 + 2 \ln(9x^3) \cdot \ln x$$

$$6 \ln x (\ln 3 + \ln x) = \ln 3 (\ln 3 + \ln x) + 2 \ln x (\ln 9 + \ln x^3)$$

$$6 \ln x \cdot \ln 3 + 6 \ln^2 x = \ln^2 3 + \ln x \cdot \ln 3 + 2 \ln x \cdot \ln 9 + 6 \ln^2 x$$

$$6 \ln x \cdot \ln 3 = \ln^2 3 + \ln x \cdot \ln 3 + 4 \ln x \cdot \ln 3$$

$$\ln x \cdot \ln 3 = \ln^2 3 \quad | : \ln 3 \neq 0$$

$$\ln x = \ln 3$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -3 \cdot 3 = -9$$

$(3; -9)$ - подходящая пара

$$b) y = x - 4:$$

$$\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^{2\ln(x(4-x)^2)}$$

$$\ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = \ln x^{2\ln(x(4-x)^2)}$$

$$\ln(4-x) \cdot \ln\left(\frac{x^7}{4-x}\right) = 2 \ln(x(4-x)^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(4-x) \cdot (\ln x^7 - \ln(4-x)) = 2 \ln x (\ln x + \ln(4-x)^2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(4-x) \cdot (7 \ln x - \ln(4-x)) = 2 \ln x (\ln x + 2 \ln(4-x))$$

$$7 \ln x \cdot \ln(4-x) - \ln^2(4-x) = 2 \ln^2 x + 4 \ln x \cdot \ln(4-x)$$

$$3 \ln x \cdot \ln(4-x) = 2 \ln^2 x + \ln^2(4-x)$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \cdot \ln(4-x) + \ln^2(4-x) = 0 \quad | : (\ln^2(4-x)) \neq 0,$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln(4-x)} \right)^2 - 3 \frac{\ln x}{\ln(4-x)} + 1 = 0 \quad \text{или } \ln x = 0;$$

$$3 \neq 1.$$

Пусть $t = \frac{\ln x}{\ln(4-x)}$;

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Итак, $t = 1$ или $t = \frac{1}{2}$.

$$t = 1: \ln x = \ln(4-x) \Rightarrow x = 4-x \Rightarrow x = 2, \text{ а тогда}$$

$$y = 2 - 4 = -2$$

$(2; -2)$ — подходящая пара

$$t = \frac{1}{2}: 2 \ln x = \ln(4-x) \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln(4-x) \Rightarrow x^2 = 4-x \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ однако нас интересуют только } x > 0, \text{ при}$$

$$\text{которых } y < 0, \text{ тогда } x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит по}$$

DD3. Проверим $x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0$:

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2} - 4 < 0$$

$$\sqrt{17} - 1 < 8$$

$$\sqrt{17} \vee 9$$

$$\sqrt{17} < \sqrt{81} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2} - 4 < 0, \text{ что удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2} \right) - \text{подходящая пара.}$$

$$\text{Ответ: } (3; -9), (2; -2), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2} \right)$$

Задание 5

Рассмотрим 2-е ур-е системы:

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

Рассмотрим 1-е ур-е системы:

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+16 = 16 \Rightarrow x=0 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=16 \Rightarrow y=8 \\ -16 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-16=16 \Rightarrow x=-16 \\ -8 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y=16 \Rightarrow y=-8 \\ -16 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Данное ур-е задаёт на плоскости квадрат.

Рассмотрим 2-е ур-е системы:

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$$

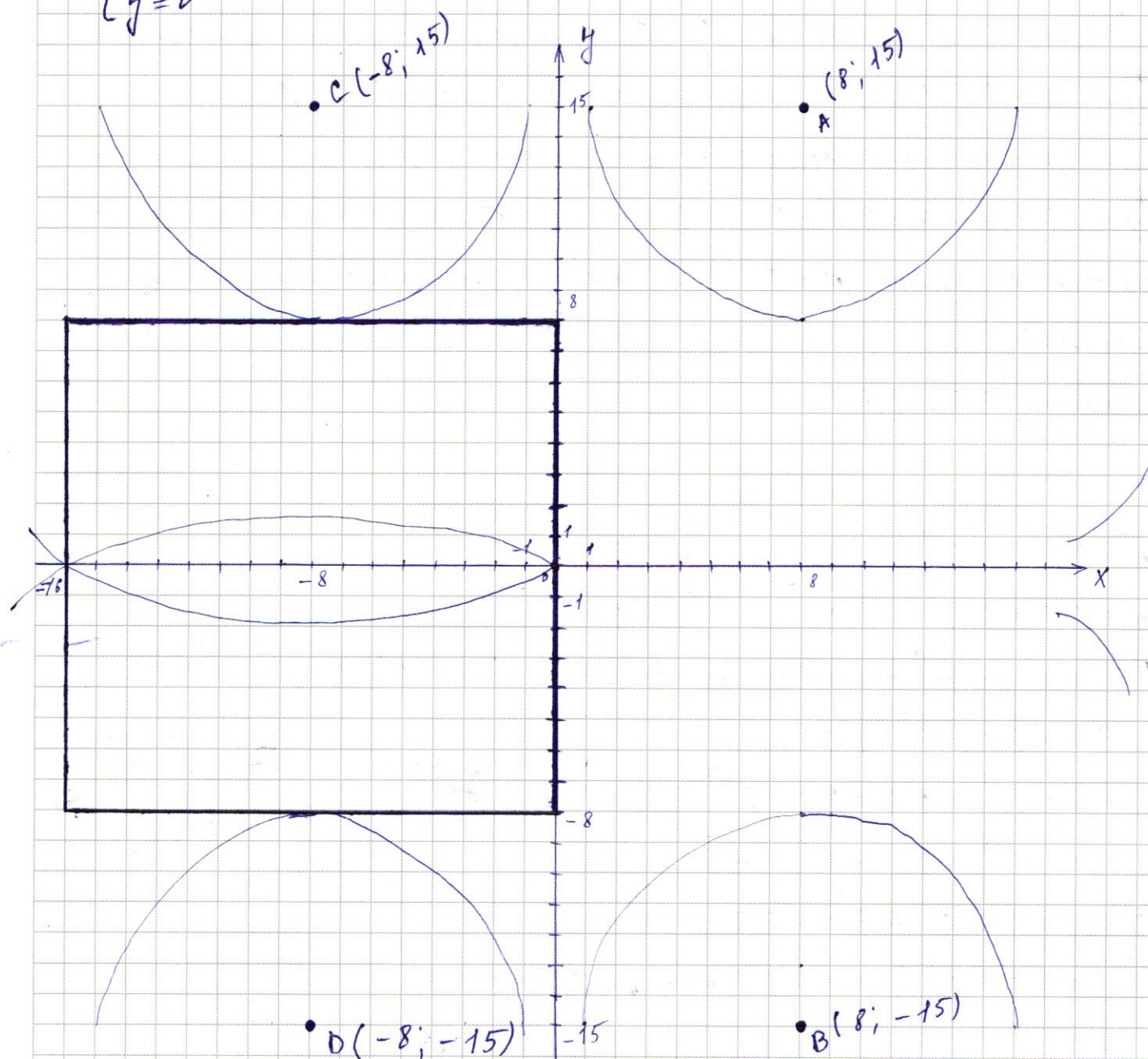
$$\textcircled{1} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-8)^2 + (y+15)^2 = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+8)^2 + (y+15)^2 = a$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$



Заметим, что все 4 окружности с центрами в A, B, C, D имеют одинаковый радиус, равный $\sqrt{a}$.

Тогда при $a = 49$ окружности с центрами C и D будут касаться квадрата, а окружности с центрами в A и B не будут его пересекать $\Rightarrow a = 49$ подходит. Следующая пара решений найдётся при

$$a = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

$a = 225 + 64 = 289$, тогда окружности пересекут квадрат в точках $(-16; 0)$ и $(0; 0)$ — ровно 2 решения.

При $a > 289$ окружности с центрами в A и B перестанут пересекать квадрат вовсе.

При $289 < a \leq 23^2 + 8^2 \Rightarrow 289 < a \leq 593$ система имеет 4 решения при $a > 593$ и $a < 49$ система не имеет решений.

Ответ: 49, 289

Задание 7

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3^{28} x \end{cases}$$

Найдём т. пересечения графиков $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$ и $g(x) = 93 + 3x(3^{27} - 1)$:

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3x(3^{27} - 1)$$

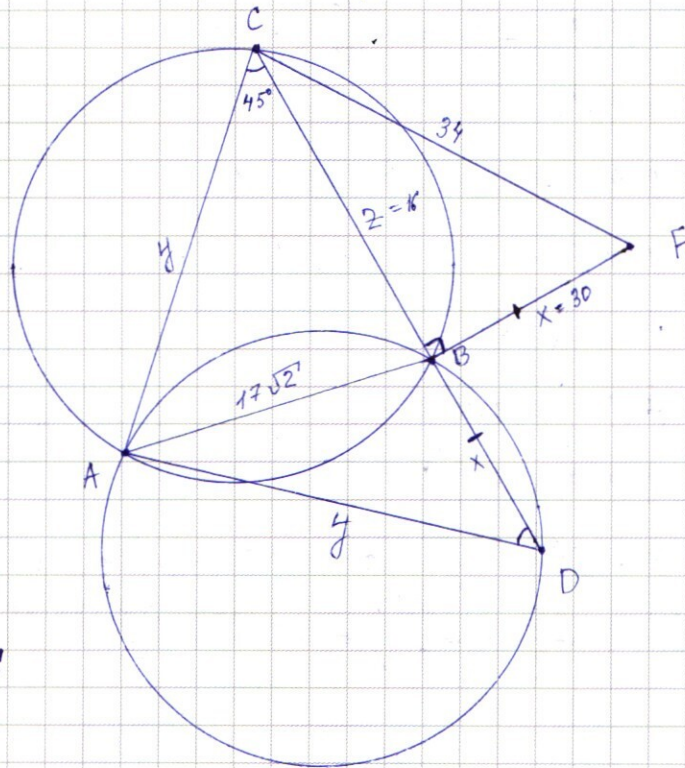
$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{28}(x - 4) = 3^x + 3x - 93 \quad |: 3$$

$$3^{27}(x - 4) = 3^{x-1} + x - 31 \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6



а) Т.к. радиусы окружностей равны, то

$$\angle ACD = \angle CDA \text{ как}$$

опирающиеся на одну хорду $\Rightarrow \angle ACO =$

$$= \angle CDA = 45^\circ \Rightarrow$$

$$A \cap C = A \cap D$$

По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2.17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 17\sqrt{2}$$

По т. косинусов для $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$ соответственно:

$$\sqrt{578} = z^2 + y^2 - \sqrt{2}zy \quad (1)$$

$$\{ \begin{array}{l} 578 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \quad (2) \end{array}$$

По м. Тугарова где ΔACD :

$$24^2 = 2^2 + x^2 + 2 \times 2 \times x$$

Finden $CF^2 = x^2 + z^2$:

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : 1156 = x^2 + z^2 + z^2 + x^2 + 2xz - \sqrt{2}y(2+x)$$

$$1156 = 2x^2 + 2z^2 + 2xz - \sqrt{2}y(z+x)$$

$$(z + x) = \sqrt{2} y:$$

$$1156 = 2x^2 + 2z^2 + 2xz - 2y^2$$

$$1156 = 2x^2 + 2z^2 + 2xz - z^2 - x^2 - 2xz$$

$$x^2 + z^2 = 1156, \text{ что есть } CF^2 \Rightarrow CF = \sqrt{1156} = 34$$

$$\sqrt{2} = 16 \Rightarrow x^2 = 1156 - 256 = 900 \Rightarrow x = 30 \quad (x = 30)$$

$$2y^2 = 256 + 900 + 2 \cdot 16 \cdot 30 = 2116$$

$$y^2 = 1058 \Rightarrow y = \sqrt{1058}$$

По т. синусов для $\triangle CBF$: $\frac{CF}{\sin 90^\circ} = \frac{x}{\sin \angle BCF} \Rightarrow$
 $\sin \angle BCF = \frac{x}{CF} \Rightarrow \sin \angle BCF = \frac{30}{34} = \frac{15}{17} \Rightarrow$

По т. косинусов для $\triangle CBF$:

$$900 = 1156 + 256 - 2 \cdot 34 \cdot 16 \cdot \cos \angle BCF$$

$$2 \cdot 34 \cdot 16 \cdot \cos \angle BCF = 512$$

$$17 \cdot 16 \cdot \cos \angle BCF = 128$$

$$\cos \angle BCF = \frac{8}{17} \Rightarrow \angle BCF = \arccos \frac{8}{17}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin (\angle BCF + 45^\circ)$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1058} \cdot 34 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{8}{17} \right) =$$

$$= 17 \cdot \sqrt{1058} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{17} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{17} \right) = \frac{\sqrt{1058} \cdot \sqrt{2} (8+15)}{2} =$$

$$= 23\sqrt{529}$$

Ответ: а) 34

$$\sqrt{23\sqrt{529}}$$

Задание 2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x + \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x +$$

$$+ \sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

Пусть $p = \cos 3x$, $m = \cos 4x$, $k = \sin 3x$, $f = \sin 4x$

$$pm - kf + p + km + fp - k + \sqrt{2}m = 0$$

$$(p-k) + f(p-k) + m(p+k+\sqrt{2}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(p-k)(f+1) + m(p+k+\sqrt{2}) = 0$$

$$p-k = \cos 3x - \sin 3x$$

$$f+1 = \sin 4x + 1$$

$$p+k+\sqrt{2} = \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \cdot \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \cos 4x$$

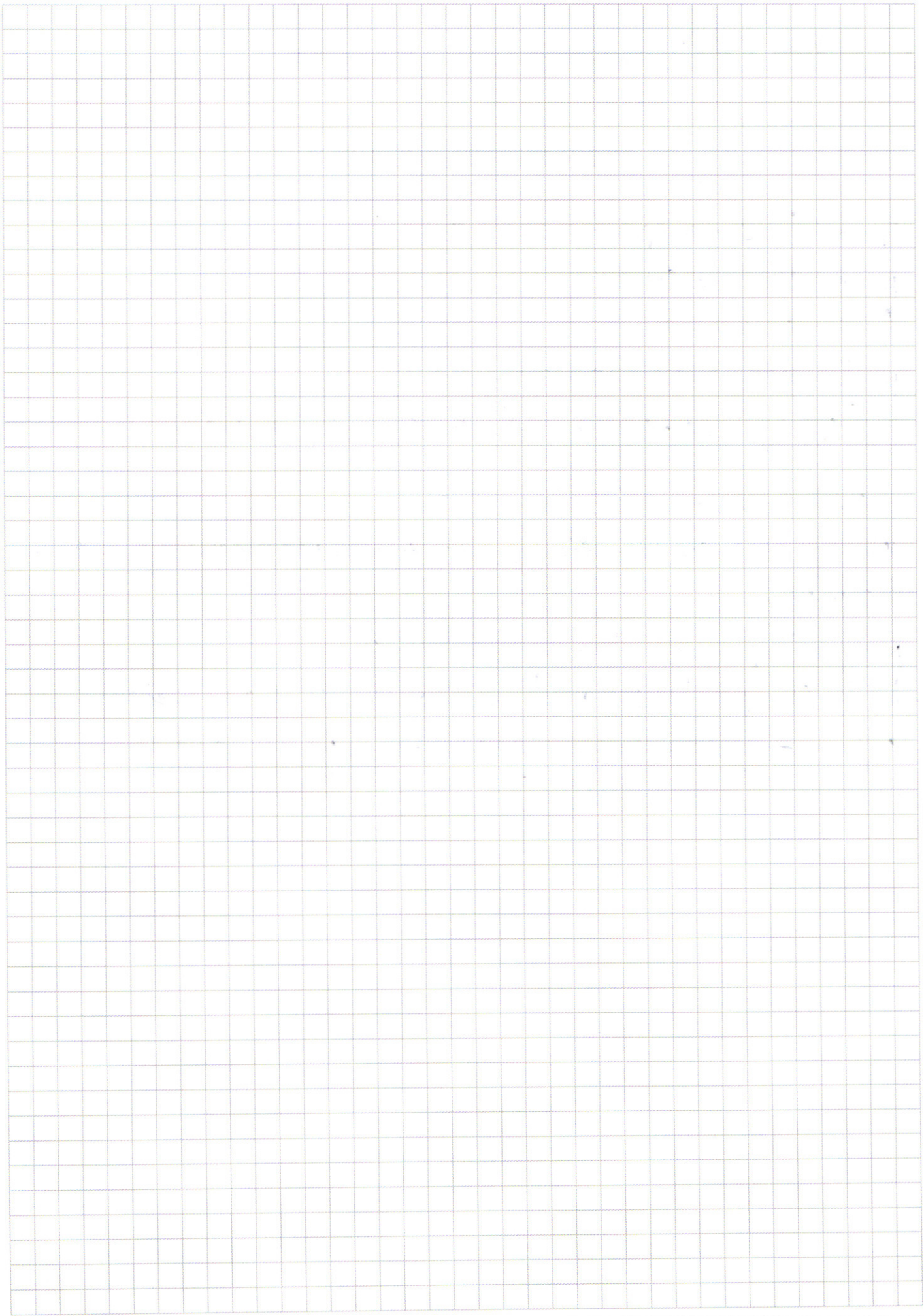
$$\times \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \cdot \sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sqrt{2} \cos 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + 2 \cos 4x = 0$$

$$pm - kf + p + km + fp - k + \sqrt{2}m = 0$$

$$-k(f+1) + p(f+1) + m(k+p+\sqrt{2}) = 0 \quad | : \sin 3x \cdot \cos 4x$$

$$-\cot 3x - \cot 4x + \cot 3x \cdot \cos 4x + 1 + \cot 4x \cdot \cot 3x =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and diagrams on graph paper:

- Top Left:**

$$\begin{array}{r} 64827 \\ - 63 \\ \hline 18 \end{array}$$
- Top Right:**

$$\begin{array}{r} 7203 \\ - 6 \\ \hline 12 \end{array}$$
- Middle Left:**

$$\begin{array}{r} 24017 \\ - 21 \\ \hline 343 \end{array}$$
- Middle Right:**

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$
- Bottom Left:**

$$\begin{array}{r} 343 \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$
- Bottom Center:**

$$\begin{array}{r} 27 \cdot 49 \cdot 49 \\ 3 \\ 49 \\ 49 \\ \hline 441 \\ + 96 \\ \hline 2401 \\ \times 27 \\ \hline 14807 \\ 4802 \\ \hline 62827 \end{array}$$
- Bottom Right:**

$$\begin{array}{r} 080 \\ 8 \times \\ \hline 35 \\ 4 \end{array}$$
- Other notes:**
 - Vertical text on the left: $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 4$, $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 4$, $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 4$.
 - Vertical text on the right: $3^x + 4 \cdot 3^{28} < 4$.
 - Handwritten numbers: 3, 49, 49, 441, 96, 2401, 27, 14807, 4802, 62827.
 - Handwritten numbers: 3, 49, 49, 441, 96, 2401, 27, 14807, 4802, 62827.
 - Handwritten numbers: 3, 49, 49, 441, 96, 2401, 27, 14807, 4802, 62827.

$$x^{\ln(729x^6)} =$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 0$$

$$\frac{81}{729} \times 9$$

$$3^{27} = 3$$

$$\left(\frac{4}{5} + xz\right) \sin \cdot x \cos$$

$$\left[\frac{5}{2} \cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^2 2x - 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5} \cos 5x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}(2 \cos^2 2x - 1) - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 8 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$



$$\frac{524}{524} = 1$$

$$\begin{aligned} 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin y \cdot \cos x \\ 2 \sin 2x \cdot \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \\ 2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ 119 \\ \hline 169 \\ 119 \\ \hline 50 \\ 46 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

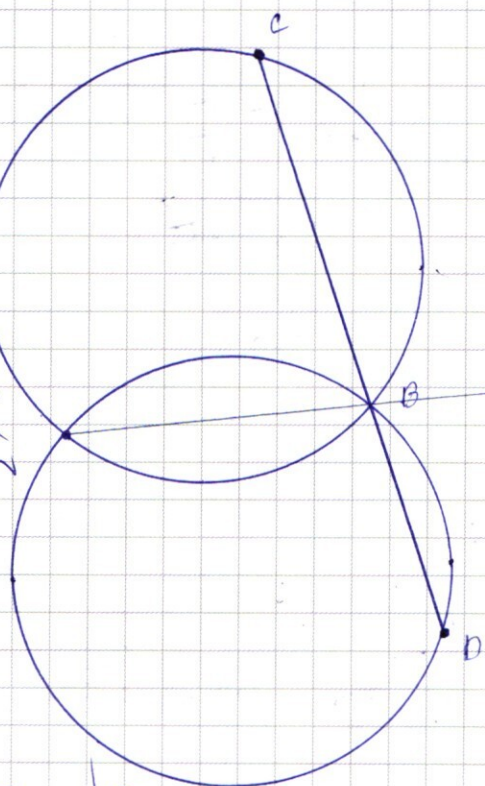
$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \\ \cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x + \cos 5x + \sin 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$$\begin{array}{r} 1860 \\ + 258 \\ \hline 2118 \\ \hline 2116 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 1058 \\ - 10 \\ \hline 1048 \\ \hline 1058 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 40 \\ \hline 520 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 16 \\ \hline 960 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1058 \\ - 9 \\ \hline 1049 \\ \hline 6 \times 158 \end{array}$$

$$13 \times$$

$$1050$$

$$158$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 16 \\ \hline 960 \\ \hline 960 \\ + 900 \\ \hline 1860 \\ + 258 \\ \hline 2118 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \hline 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$18 \cdot 158$$

$$6 \times 16$$

~~24~~
~~24~~

$$\begin{array}{r} 1156 \\ + 256 \\ \hline 1412 \\ - 900 \\ \hline 512 \end{array}$$

cos

$$\frac{1058}{2} = 529$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 2 \\ \hline 32 \\ \times 2 \\ \hline 64 \\ \times 2 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\sin(\arccos \frac{8}{17}) = t$$

$$\alpha = \arccos \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{289 - 64}{289}}$$

$$\begin{array}{r} 512 \\ \div 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\sin(\arccos \frac{8}{17}) = t$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\sqrt{529} = 23$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 8 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ - 64 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\frac{15}{17}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \end{array}$$

23

24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\sin 2x + \cos 2x) + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cos 5x \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1) = 0 \quad | : \sqrt{2}, : 2$$

$$\cos 5x \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos^2 2x = 1$$

~~$$\cos 4x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \sin x$$~~

$$\cos 5x \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}, \quad x > 0, \quad y < 0$$

~~$$\ln(-y) =$$~~

$$\ln(-y) = \frac{\log_x(-y)}{\log_x e}$$

~~$$(-y)^{\frac{7}{\log_x e}}$$~~

$$(-y)^{\ln(-y)} = \frac{\log_x(-y)}{\log_x e}$$

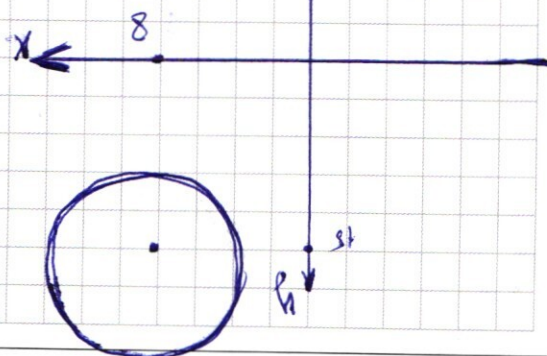
$$\left(\frac{-x^2}{y}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln(3x^3)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$z \geq x$$

$$0 \geq x$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+2)^2 - 4 + 2xy - 3x^2 + 12x = 0$$

$$(y+2)^2 + 2x(y+2) - 3x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$(y+2)^2 + 2x(y+2) - (2x-2)^2 + x^2 = 0$$

$$\frac{1}{4} D = x^2 + 3x^2 - 8x + 4 = 4x^2 - 8x + 4 = (2x-2)^2$$

$$y+2 = \pm (2x-2)$$

$$y+2 = 3x-2, \quad 2x-2 \geq 0$$

$$y+2 = -x+2$$

$$y = 3x-4$$

$$y = -x$$

$$3x-4 < 0$$

$$x < \frac{4}{3}$$

$$a) y = -x:$$

$$x \ln x = x^2 \ln(x^3)$$

$$6 \ln x = 2 \ln x^3$$

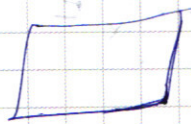
$$\ln x^6 = \ln x^6$$

$$x^6 = x^6$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y = -x \end{matrix}$$

$$y = 3x-4 \ln(4-3x)$$

$$= x \ln \left(\frac{x^2}{4-3x} \right)$$



$$x < 0$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$y \geq 8$$

$$y - 8 \leq 0$$

$$x = -16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a circle and several triangles.

Diagram: A circle with center O. Points A, B, C, D are on the circumference. Chords AC and BD intersect at point E. A line segment CF is drawn from point C to point F on the extension of BD. Angles of 45° are marked at vertices C and D of triangle ABC and at vertex D of triangle BCD. A line segment AD is drawn, and angle CAD is marked as 90°.

Handwritten Calculations:

- Top left: $\sqrt{1156} = 34$
- Top center: $\begin{array}{r} 64 \\ \times 9 \\ \hline 256 \end{array}$
- Top right: $\angle CAD = 90^\circ$
- Top right (triangle CF): $\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ + 102 \\ \hline 1156 \end{array}$
- Bottom left: $\frac{AB}{\sin 45} = 34$
- Bottom left: $2AB = \sqrt{2} \cdot 34$
- Bottom left: $AB = 17\sqrt{2}$
- Bottom left: $\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$
- Bottom center: $\begin{array}{r} 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$
- Bottom center: $2y^2 = z^2 + x^2 + 2zx$
- Bottom center: $\begin{array}{r} 578 \\ \times 2 \\ \hline 1156 \end{array}$
- Bottom center: $578 = z^2 + y^2 - \sqrt{2}zy$
- Bottom center: $578 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy$
- Bottom center: $1156 = z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + 2zx - \sqrt{2}(zy + yx)$
- Bottom center: $y \cdot \sqrt{2y^2} = 2y^2$
- Bottom right: $CF^2 = CB^2 + x^2$
- Bottom right: $\begin{array}{r} 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$
- Bottom right: $z^2 + x^2 - ?$

