

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 27} \\ \underline{81} \\ 116 \\ \underline{108} \\ 81 \\ \underline{81} \\ 0 \end{array}$$

$$343 = 7^3$$

1) Т.к. число состоит из цифр 3 и 7, то есть
два варианта набора цифр в таком
восьмизначном числе:

• 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1 (I)

• 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1 (II)

2) (I)

Вариант восьмизначных чисел состоящих
из восьми заданных, разных цифр:

8! 1 восемь вариантов первой цифры, на один

меньше второй и т.д.)

(столько раз мы посчитали каждое число в 8! раз)
вариантов переставить между собой задан-

ных цифр 3! ; две одинаковых - 2!

Восьмизначных чисел из набора (I):

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 = 560$$

3) (II) аналогично рассуждений из пункта 2 решения, таких чисел:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

4) Всего таких чисел $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680 восьмизначных чисел, произведение цифр которых 5261.

N3

$$1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

2) (2) решим квадратное уравнение относительно y .

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = \\ &= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$y_1 = \frac{x+4 + 3x-4}{2} = 2x$$

$$y_2 = \frac{x+4 - 3x+4}{2} = 4-x$$

подставим по очереди y_1 и y_2 в (1) и решим получившиеся уравнения

3) ~~x^2~~ ~~$y=2x$~~ $y=2x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2x}{x^2} \right)}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию e , из ОДЗ $(2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} > 0$ и $(16x^6)^{-\ln x} > 0$

$$\ln((16x^6)^{-\ln x}) = \ln((2x)^{\ln \frac{2}{x^6}})$$

$$-\ln x \cdot (\ln 16 + 6 \ln x) = (\ln 2 - 6 \ln x) \cdot (\ln 2 + \ln x)$$

$$-4 \ln x \ln 2 - 6 \ln^2 x = \ln^2 2 - 6 \ln x \ln 2 + \ln x \ln 2 - 6 \ln^2 x$$

$$\ln^2 2 - \ln x \ln 2 = 0$$

$$\ln 2 (\ln 2 - \ln x) = 0$$

$$\ln 2 = \ln x$$

$$\underline{x = 2}; \underline{y = 2x = 4}$$

$$4) y = 4 - x$$

$$(x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

Прологарифмируем обе части уравнения по натуральному основанию.

$$\ln((x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x}) = \ln((4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)})$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln(4-x)) = \ln(4-x) \cdot (\ln(4-x) - 2 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 2 \ln(4-x) \ln x$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln(4-x) + \ln^2(4-x) = 0$$

$$(\ln(4-x) - \ln x) \cdot (\ln(4-x) - 2 \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln(4-x) = \ln x \\ \ln(4-x) = 2 \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} 4-x = x \\ 4-x = x^2 \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \quad (3) \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$(3) \quad D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\sqrt{17} > 1$$

$$\sqrt{17} > 1$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

$$\sqrt{17} < 9$$

$$17 < 81$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

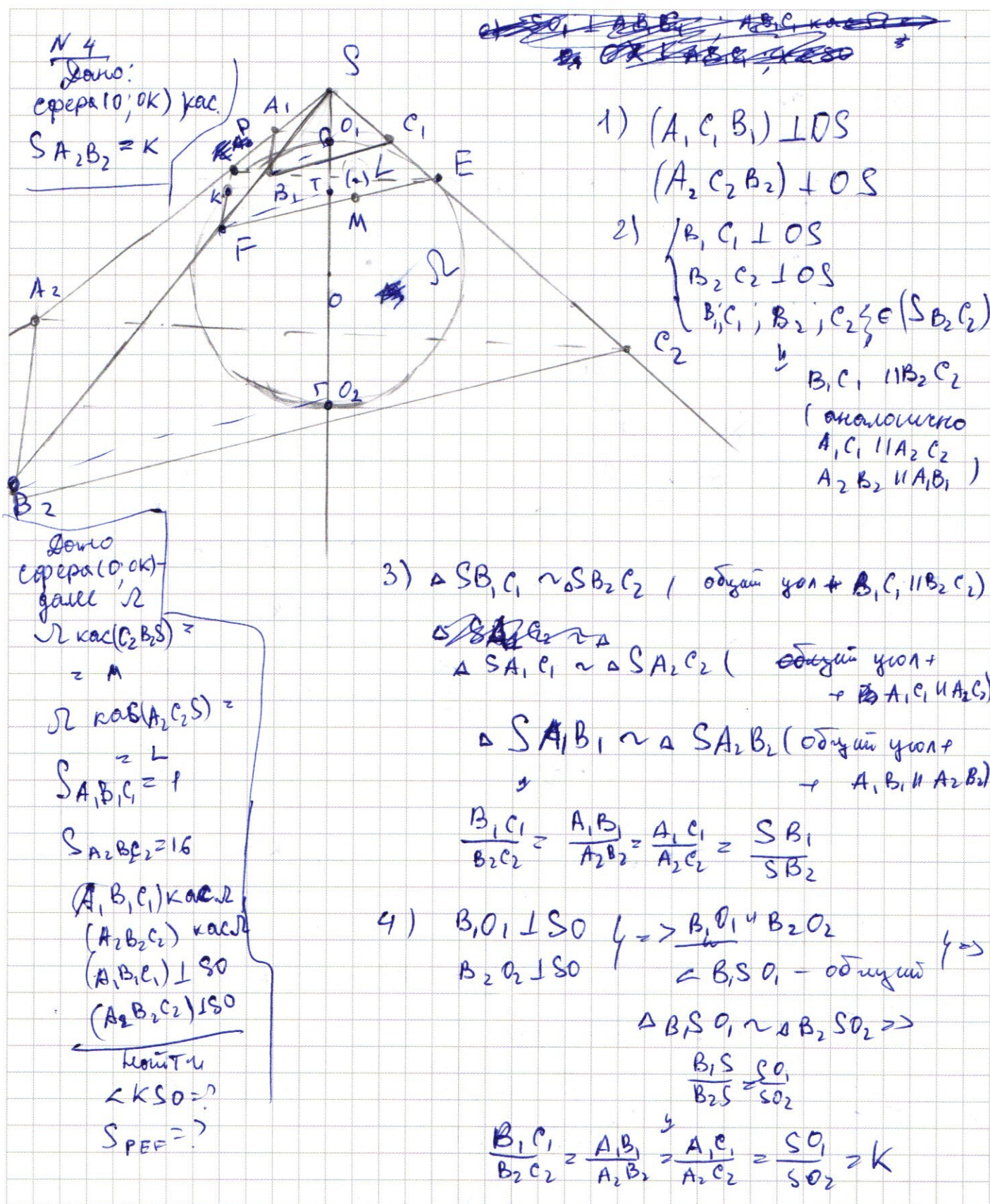
$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$y = 4 - x \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = 4 - \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 4); (2; 2); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$5) \frac{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}}{S_{\Delta A_2 B_2 C_2}} = \frac{A_1 B_1 \cdot B_1 C_1}{A_2 B_2 \cdot B_2 C_2} = 17, \text{ т.к. } \angle A B_1 C_1 = \angle A_2 B_2 C_2$$

↑
углы между
параллельными
прямыми)

$$\Rightarrow K^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

$$6) \frac{S O_1}{S O_2} = \frac{1}{4}$$

$$O_1 O_2 = 2R \quad (\text{т.к. } O \in O_1 O_2 \text{ и } O_1, O_2 \in \Omega)$$

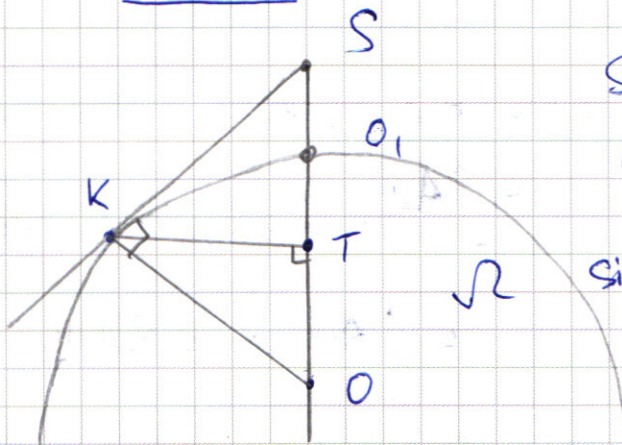
$$\frac{S O_1}{S O_1 + 2R} = \frac{1}{4}$$

$$4 S O_1 = S O_1 + 2R$$

$$3 S O_1 = 2R$$

$$S O_1 = \frac{2}{3} R$$

7)



$$S O = S O_1 + O_1 O = \frac{2}{3} R + R = \frac{5}{3} R$$

$$K O = R$$

$$\sin \angle K S O = \frac{K O}{S O} = \frac{R}{\frac{5}{3} R} = \frac{3}{5}$$

$$\angle K S O = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$8) K T \perp S O$$

$$K S = \sqrt{S O^2 - K O^2} = \sqrt{\frac{25}{9} R^2 - R^2} = \frac{4}{3} R$$

$$S T = K S \cdot \cos \angle K S O$$

$$\cos \angle K S O = \sqrt{1 - \sin^2 \angle K S O} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S T = \frac{4}{3} R \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15} R$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) $KS = MS = LS$ (кас, ^{проведённые} из одной точки к сфере)

$\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$ (углы между касательными, проведёнными из одной точки к сфере и осью симметрии сферы)

т.к. $KS = MS = LS$

$KO = MO = LO$

$\angle SKO = \angle SMO = \angle SLO = 90^\circ$

~~$\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$~~ угол ^{радиусом, опущенным} между в т. кас и касательной

10) ~~$MT_1 \perp SO$~~ ; $T_1 \in SO$

$LT_2 \perp SO$; $T_2 \in SO$

$ST_1 = MS \cdot \cos \angle MSO$

$ST_2 = LS \cdot \cos \angle LSO$

$ST_1 = ST_2 = ST$

$(KLM) \perp SO$

$FE \parallel B_1C_1$; $PF \parallel A_1B_1$; $A_1C_1 \parallel PE$

$\triangle PFE \sim \triangle A_1B_1C_1$

$\frac{S_{\triangle PFE}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{SB_1}{SF} \right)^2$

11)

$\triangle SBO_1 \sim \triangle SFT$ ($BO_1 \perp SO$, $FT \perp (LKM) \Rightarrow$

$\frac{SB_1}{SF} = \frac{SO_1}{ST}$

$FI \perp SO$, и
и общий угол

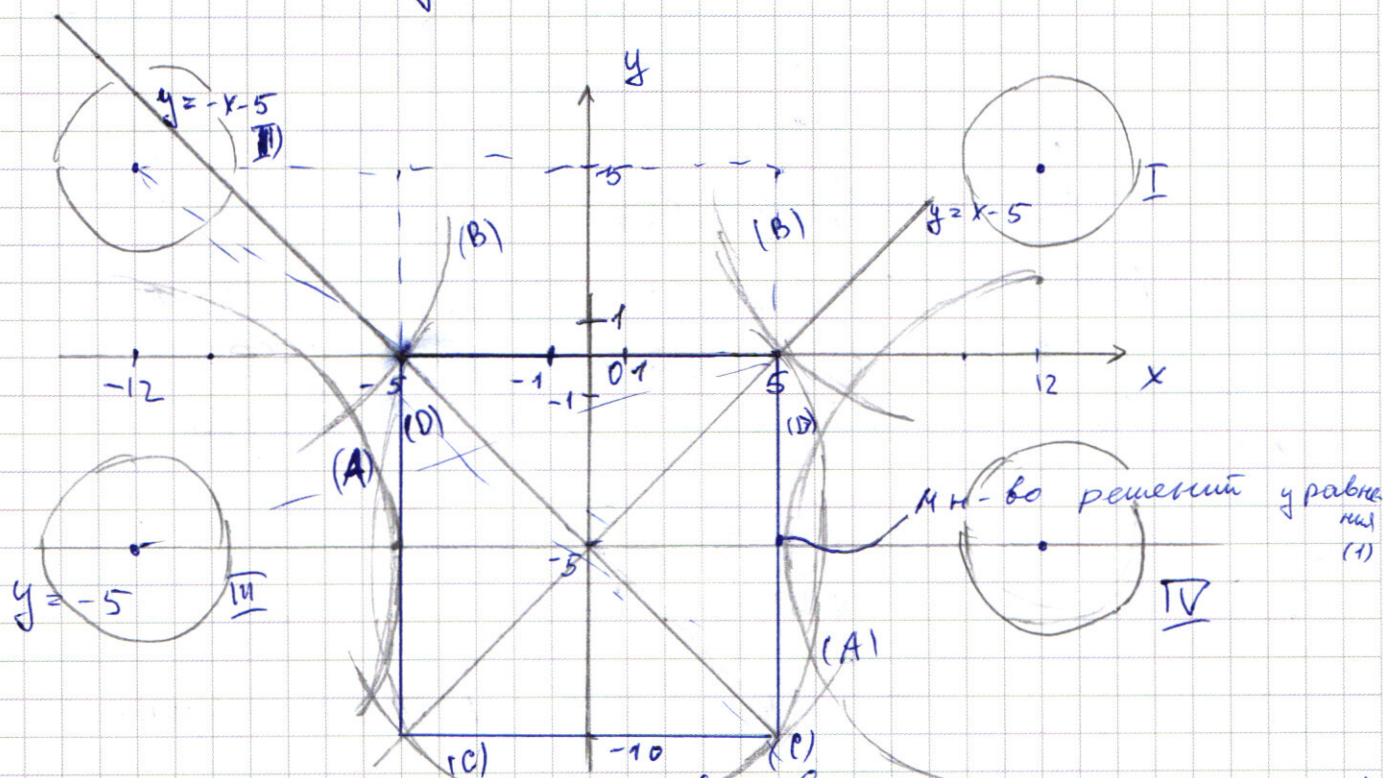
$S_{\triangle PFE} = 1 \cdot \left(\frac{SO_1}{ST} \right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{16}{15}R} \right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 15}{3 \cdot 16} \right)^2 = \frac{25}{16}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$
 $S_{PEP} = \frac{25}{16}$

№5

1) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$

2) (1) нарисовали мн-во решений этого уравнения на координатной плоскости:



поочередно рассмотрим все варианты, сняв ограничения

3) $\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \\ x+y+5 + y-x+5 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y > -x-5 \\ y > x-5 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 > -x-5 \Rightarrow x > -5 \\ 0 > x-5 \Rightarrow x < 5 \\ y = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \\ x+y+5 - y-x-5 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y > -x-5 \\ y < x-5 \\ x = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y > -10 \\ y < 0 \\ x = 5 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)

$$\begin{cases} x + y + 5 < 0 \\ y - x + 5 > 0 \\ -x - y - 5 + y - x + 5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x - 5 \\ y > x - 5 \\ -2x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y < x - 5 \\ y > x - 5 \\ x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ y > -10 \\ x = -5 \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} x + y + 5 < 0 \\ y - x + 5 < 0 \\ -x - y - 5 - y + x - 5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5 - x \\ y < 5 - x \\ y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 < -5 - x \\ -10 < 5 - x \\ y = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5 \\ x > -5 \\ y = -10 \end{cases}$$

7) (II) - это уравнение 4 окружностей с радиусом $\sqrt{a}$ и центрами в точках $(12, 5)$ $(-12, 5)$ $(12, -5)$ $(-12, -5)$

8) ~~окр. I и II~~ окр. I и II симм. отн. оси y
окр. III и IV симм. отн. оси y
мн. во решении уравнений (I) симм. отн. осей
~~если~~ ~~первое~~ ~~и~~ ~~то~~
если точка окр. I является решением, то и
точка окр. II является решением, аналогично
для III и IV

9) Переберем все варианты, когда окр III и IV дают каждое по одному решению:

(A) $\sqrt{a} = 7$ и все. (при этом окр I и II не касаются квадрата)
т.е. III, IV и ни решений (4) симметрично
относительно оси $y = -5$ (проходит через центры окр. и центр квадрата)

10) Варианты, когда окр. ~~III~~ I и ~~IV~~ II дают каждое по одному решению:

(B) $\sqrt{a} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$ (при этом I)

(C) $\sqrt{a} = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{514}$ (при этом I и II не дают дополнительных корней)

$$\begin{array}{r} 49 + 25 = 74 \\ \sqrt{74} \\ 8.6 \\ 113 \\ 14 \quad 289 \\ 183 \quad 514 \\ \hline 314 \end{array}$$

11) (D) — значения ~~III~~ и IV не дают корней, при которых $a > a(D)$

$$\sqrt{a} = \sqrt{5^2 + 17^2} = \sqrt{314}$$

12) где (B) и (C) $\begin{cases} \sqrt{a} > \sqrt{314} \\ \sqrt{a} < 7 \end{cases}$

(B) — не удовлетворяет; (C) — удовлетворяет

$\sqrt{a} = \sqrt{514}$; $\sqrt{a} \geq 7 \Rightarrow a = 49$; $a = 514$

Ответ: $a \in \{49, 514\}$

№ 6

Дано

окр. ω_1 и $\omega_2 = A'B'$
 $C \in \omega_1$
 $D \in \omega_2$
 $B \in CD$
 $\angle CAD = 90^\circ$

$$R_1 = R_2 = R = 10$$

$$BD = BF$$

$$BF \perp CD$$

$$CF = ?$$

$$BC = 12$$

$$S_{\triangle ACF} = ?$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по т. синусов

$$\frac{AC}{\sin(45^\circ + \alpha)} = 2R \Rightarrow AC = 20 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) =$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{10\sqrt{2}}{5} \cdot 7 = 14\sqrt{2}$$

$$10) \quad S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin(45^\circ + \alpha) =$$

$$= 140\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \frac{140 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) =$$

$$= 140 \cdot \frac{7}{5} = 14 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} = 14^2 = 196$$

$$\frac{14}{14}$$

$$\frac{14}{56}$$

$$\frac{14}{156}$$

Ответ: $CF = 20$; $S_{\triangle ACF} = 196$.

~~N 1~~ N 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

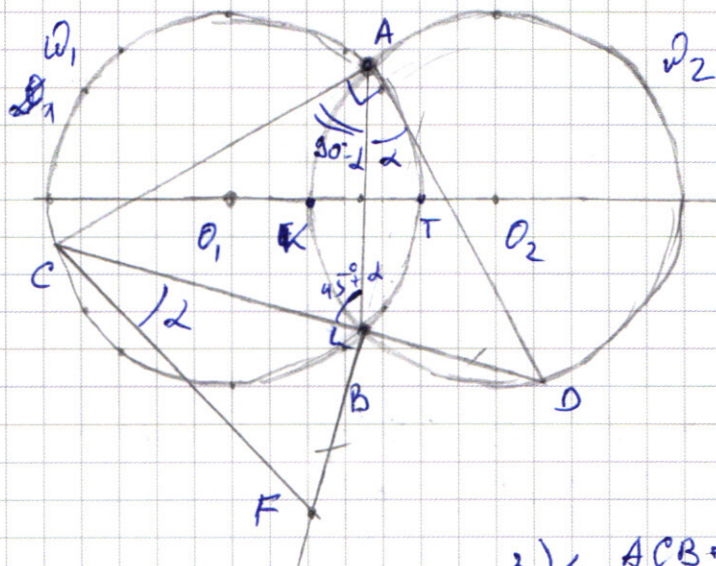
$$\sqrt{2} \sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x & (1) \\ \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$1) \overset{\frown}{AKB} = \overset{\frown}{ATB}$$

T.k. $R_1 = R_2$

$$2) \angle ACB = \frac{\overset{\frown}{ATB}}{2}$$

$$\angle ADB = \frac{\overset{\frown}{AKB}}{2}$$

(впис. углы)

$$\angle ACB = \angle ADB$$

$$3) \angle ACB + \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} = 45^\circ$$

$$4) \angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle CAB = 90^\circ - \alpha$$

$$5) \text{ по т. синусов в } \triangle ABD: \frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\text{ по т. синусов в } \triangle ABC: \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$\left. \begin{array}{l} BD = 2R \sin \alpha \\ BC = 2R \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$6) \triangle CBF: BC \perp BF \Rightarrow \text{по т. Пифагора}$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{4R^2} = 2R$$

$$\underline{CF = 2R = 20}$$

$$7) \triangle CBF: BF = BD = 2R \sin \alpha$$

$$CF = 2R$$

$$\sin \angle BCF = \frac{2R \sin \alpha}{2R} = \sin \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha$$

$$8) BC = 12$$

$$\triangle BCA: \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

по т. синусов

$$\frac{12}{20} = \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$9) \triangle BCA: \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k \end{cases}$$

(2)

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin 2x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - x = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$$

Ответ : $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$

N 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

1) $2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$$76 + 2 \cdot x - 2x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x - (2^{33} - 2)x + 3 \cdot 2^{34} < 76$$

2) $f(x) = 2^x - (2^{33} - 2)x + 3 \cdot 2^{34}$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - (2^{33} - 2)$$

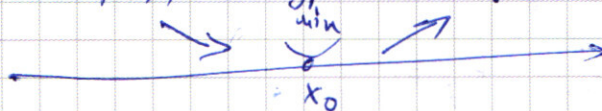
Найдем точки экстремума

$$x_0 = \frac{2^{33} - 2}{\ln 2}$$

$$x_0 \approx \log_2 \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \approx 33$$

при $x < x_0$ $f(x)$ убывает, при $x > x_0$

$f(x)$ возрастает.



3) у уравнения $f(x) = 76$ не более двух корней, такими являются:

$$x_1 = 6 \quad 2^6 - 2^{33} \cdot 6 + 12 + 6 \cdot 2^{33} = 64 + 12 = 76$$

$$x_2 = 38 \quad 2^{34} \cdot 2^4 - 2^{33} \cdot 2 \cdot 19 + 76 + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$= 19 \cdot 2^{34} - 19 \cdot 2^{34} + 76 = 76$$

~~$6 < x < 38$~~ $6 < x < 38$ так как так как не

всего таких $x \quad 38 - 6 - 1 = 31$

4) $g(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$$h(x) = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по условию
5) $h(x) \leq y$ и $y \in Z$
 $g(x) \leq y-1 < h(x)$
при каждом $x \in [6; 38]$ (при $x=6$ и $x=38$ будет равно y)
 $\forall$ всего таких y ~~максимум~~

$$-g(x) + h(x)$$

количество ~~равных~~ ^{глав} ~~уравнений~~ ^{уравнений} ~~уравнений~~ ^{уравнений} корней этой ~~уравнений~~ ^{системы}

$$A = \sum_{x=6}^{38} (-g(x) + h(x))$$

↑ $x=6$
кол-во пар чисел (x, y) удовлетвр. системе

6)

$$A = -(2^6 + 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \cdot 33) + (76 \cdot 33 + 2(2^{32} - 1) \cdot 6 +$$

сумма всех $g(x)$ + $2(2^{32} - 1) \cdot 7 + \dots + 2(2^{32} - 1) \cdot 38$

$$= \underbrace{(2^6 + 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{32})}_{K = 2(2^{32} - 1)} + (2508 + \underbrace{K \cdot 6 + K \cdot 7 + K \cdot 8 + \dots + K \cdot 32})_{\text{...}}$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \quad 76 \\ \hline 76 \quad 33 \\ \hline 228 \\ + 228 \\ \hline 2508 \end{array}$$

злом происходит с $q=2$

Сумма S_1

арифм. прогрессия

$$C d = K$$

сумма S_2

$$S_1 = \frac{2^{38} - 2^6}{2} = 2^{38} - 2^5$$

$$S_1 = 2^{39} - 2^6 \quad \left(2^6 \cdot \frac{2^{33} - 1}{2 - 1} = 2^{39} - 2^6 \right)$$

$$S_2 = \frac{6k + 38k}{2} \cdot 33 = 22 \cdot 33 \text{ k}$$

$$\begin{aligned}
 A &= -2^{39} + 2^6 - 99 \cdot 2^{34} + 33 \cdot 76 + 22 \cdot 33 \cdot 2(2^{32} - 1) = \\
 &= -2^{39} + 2^6 - 99 \cdot 2^{34} + 33 \cdot 76 + 11 \cdot 33 \cdot 2^{34} - 2 \cdot 22 \cdot 33 = \\
 &= -2^{34}(2^5 + 99 - 11 \cdot 33) + 2^6 + 33 \cdot 76 - 44 \cdot 33 = \\
 &= -2^{34}(32 + 33(3 - 11)) + 64 + 33(76 - 44) = \\
 &= -2^{34}(32 - 33 \cdot 8) + 64 + 33 \cdot 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 33 \\
 32 \\
 \hline
 96 \\
 + 96 \\
 \hline
 1056
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1056 \\
 \times 32 \\
 \hline
 2112
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 1056 \\
 64 \\
 \hline
 1120
 \end{array}$$

$$33 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r}
 \times 33 \\
 8 \\
 \hline
 264
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 264 \\
 - 32 \\
 \hline
 232
 \end{array}$$

$$A = 232 \cdot 2^{34} + 1120$$

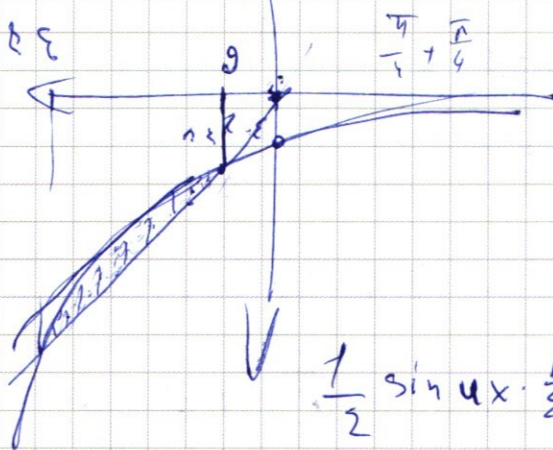
Ответ: пар $(x; y)$ - удовлетворяющих системе
 $232 \cdot 2^{34} + 1120$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$



$$\sin 7x$$

$$\sin(6x + 3x) \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\sin 4x \cos 3x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x (1 -$$

$$- \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \sin 3x)$$

$$\frac{1}{2} \sin 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(x + \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \cos 4x (1 - \frac{1}{2} (\sin(5x - \frac{\pi}{4}) +$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4})) + \sin(x + \frac{\pi}{4}))$$

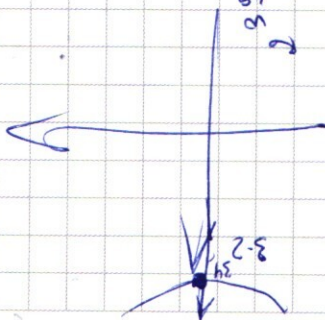
$$\frac{1}{2} \sin 7x (\sin 2x + \cos 2x) = \cos 4x$$

$$\frac{1}{2} \sin 7x (-\sin 2x + \cos 2x) = \cos 2x \sin^2 2x$$

$$\cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$



$$g(x) - h(x) \in \mathbb{Z}$$

$$(2^6 \cdot 2^{128} + 3 \cdot 2^{34})$$

$$h(x)$$

$$64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$76 + 2^{33} \cdot 6 - 12$$

$$64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y: \min(2^x, 2^{34})$$

$$-76 - 2^{33} \cdot x + 2x$$

$$x < 34$$

$$y \geq 2^x (1 + 3 \cdot 2^{34-x})$$

$$g(x) - h(x) + g(x) - h(x)$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\frac{a^{x+dx} - a^x}{dx}$$

$$5 + 2$$

$$a^x (a^{dx} - 1)$$

$$\frac{a^{dx} - 1}{dx}$$

$$a^x$$

$$a^5 \cdot a^2$$

$$2^x - kx$$

$$2^x \ln 2 - kx$$

$$2^6 + 12 < 76$$

$$64 + 12 = 76$$

$$a = e^{\ln a}$$

$$2^x = e^{x \ln 2}$$

$$= (e^{\ln 2})^x$$

$$\ln 2 = \frac{2^{33} - 2}{2^{33} - 1} \ln 2$$

$$> 33$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and notes on a grid background:

Top Left: Long division of 9261 by 9, result 1029.

Top Middle: Long division of 1029 by 3, result 343.

Top Right: Long division of 6789 by 3, result 2263.

Middle Left: Long division of 9261 by 3, result 3087.

Middle Right: Long division of 343 by 3, result 114 with remainder 1.

Center: A diagram showing the prime factorization of 21: $21 = 3 \cdot 7$. The numbers 3 and 7 are circled.

Bottom Left: Calculation of $56 \cdot 3 = 168$.

Bottom Middle: Calculation of $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 168$.

Bottom Right: Calculation of $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 168$.

Other notes: "7 - три шестки", "I) 9 и 3", "II) 3, 3, 3", "3! \cdot 3! \cdot 2!", "8! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!", "8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 168".

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 9x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{18x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sqrt{2} \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos 9x + \sin 9x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos 4x = 0$$

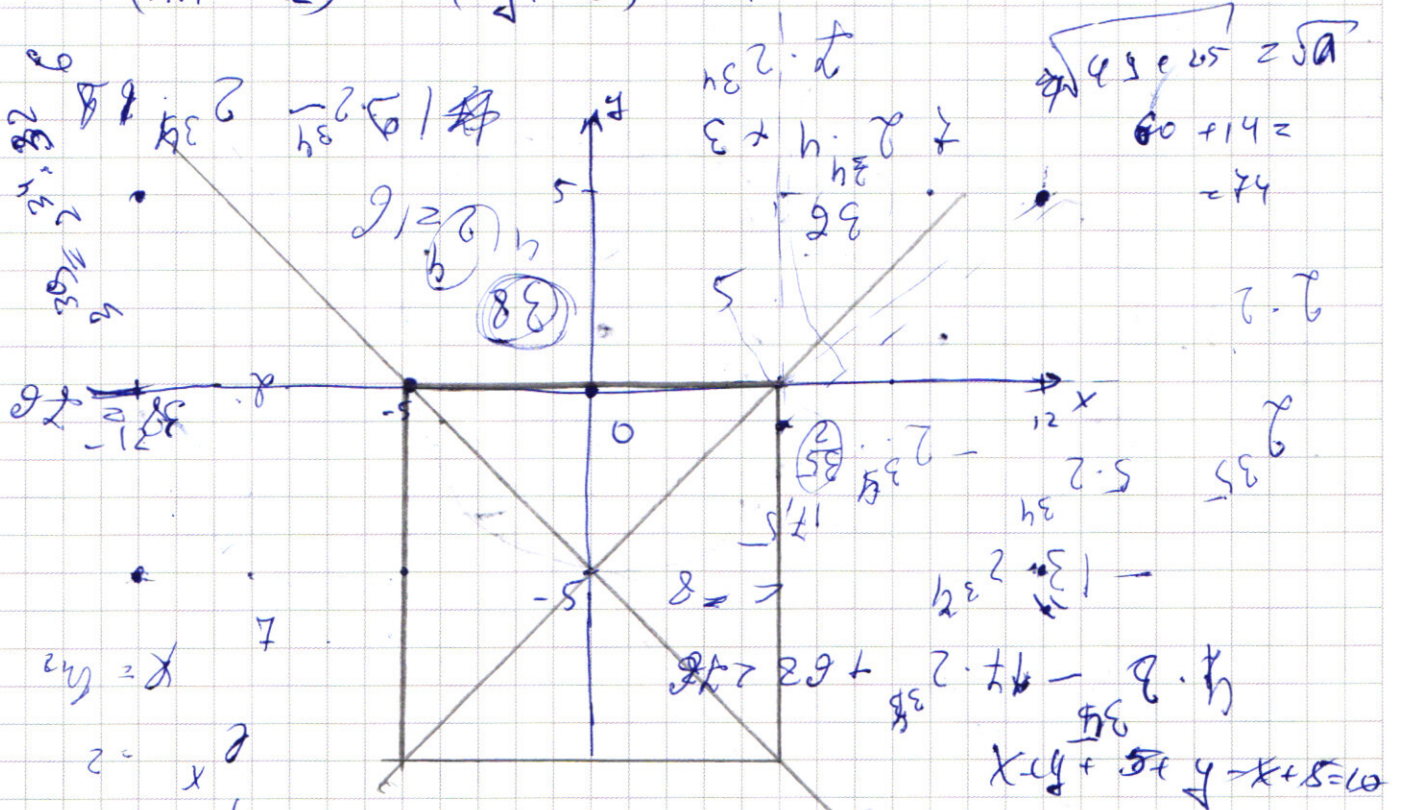
$$9x - 5x + \frac{\pi}{2} = "$$

$$= 4x + \frac{\pi}{2}$$

15

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x-5 &= y-5 \\ -2x &= 10 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

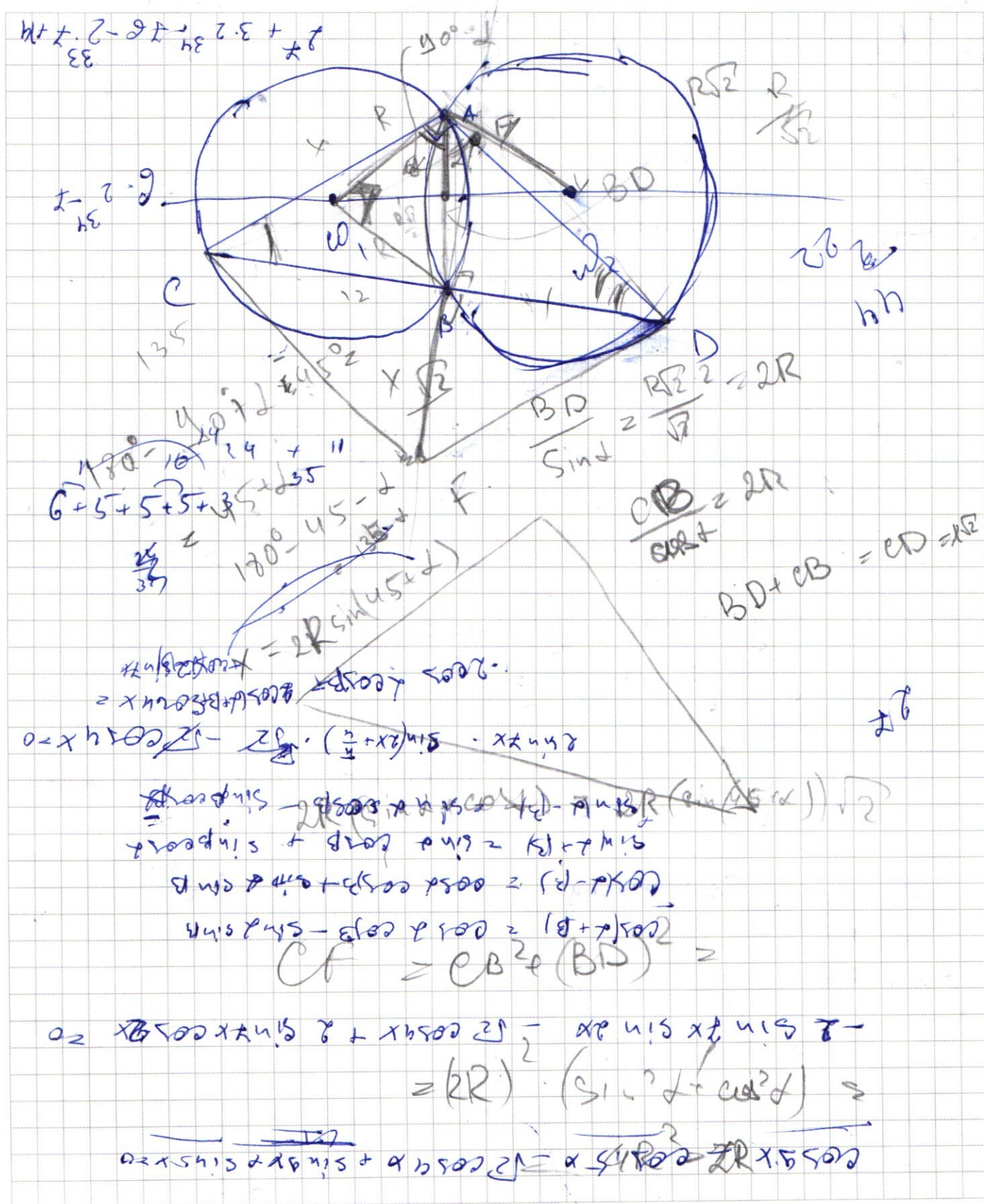
$$8-7 \cdot 2 \cdot 31 \rightarrow 13 \cdot 2 \cdot 31$$

$$2 \cdot 31 = 62$$

$$4 \cdot 31 = 124$$

$$2 \cdot 31 = 62$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4) - \ln x \cdot \ln(y/x^2)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - 4y + 4$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 - xy = 2x^2 + 8x + 8 - 8$$

$$(y-2)^2 = xy + 4 - 8 + 2(x+2)^2$$

$$(y-2)^2 = xy - 4 + 2(x+2)^2$$

$$y = 2x$$

$$y = 4 - x$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = 0$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$8 - 32 = -24$$

$$4 \cdot 2 - 3 = (3x - 4)^2$$

находим

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$y = \frac{x+4 \pm 3x-4}{2}$$

$$y = \frac{(x+4) + (3x-4)}{2}$$

$$y = 2x$$

$$0 = |5+x-4| + |5+4-x|$$

$$4-x = \frac{x+4-3x-4}{2}$$

$$y = 2x$$

$$(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = \frac{\ln \left(\frac{2x}{x^6} \right)}{2x}$$

$$(16 \cdot x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6} \right)}$$

$$-\ln x \cdot \ln(16 \cdot x^6) = \ln \left(\frac{2}{x^6} \right) \cdot \ln(2x)$$

$$-\ln x \cdot (\ln 16 + 6 \ln x) = (\ln 2 - 6 \ln x) \cdot (\ln 2 + \ln x)$$

$$-4 \ln x \ln 2 - 6 \ln^2 x = \ln^2 2 + \ln 2 \cdot \ln x - 6 \ln x \ln 2 - 6 \ln^2 x$$

$$R^2 \ln^2 2 + \ln - 5 \ln 2 \ln x + 4 \ln x \cdot \ln 2 = 0$$

$$\ln 2 (\ln 2 - \ln x) = 0$$

$$\ln 2 = \ln x$$

$$x = 2$$

$$y = 2x = 4$$

$$y = 4 - x$$

$$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 2R$$

$$3x = 2R$$

$$x = \frac{2}{3}R$$

$$\cos \alpha = \sin \frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{2.5} \cdot \frac{16}{2} = \frac{16}{2}$$

$$K = 4$$