

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

1) $3375 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$ числа могут состоять только из цифр 1, 3, 5, 9. (Применяя 3 пятёрки обязательно).

2) Рассчитаем числа возможные цифры чисел и их кол-во:

1. 3 пятёрки 3 тройки 2 единицы: $C_8^3 \cdot C_5^3$.

2. 3 пятёрки 1 тройка 3 единицы: $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^3$.

П.к "5" можно получить только цифрой 5, а "3" только тройкой и двойкой $\Rightarrow$ других вариантов нет.

$\Rightarrow$ всего чисел $C_8^3 (20 + C_5^3)$.

Ответ: $C_8^3 (20 + C_5^3)$.

№ 2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 9x + \sin 3x - \sin 11x &= \sqrt{2} \cos 14x \Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin 4x + 2 \cos 2x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 14x \\ &= (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0. \\ \Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 4x - \cos 2x - \sin 2x) &= 0. \end{aligned}$$

1. $\cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \operatorname{ctg} 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

2. $\sqrt{2} \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x \quad | : \sqrt{2} \quad \sin 4x = \sin 2x \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \Leftrightarrow$

$$\sin 4x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{cases} 4x + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi m \\ 4x + 2\pi k = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) + 2\pi m \end{cases}$$

2.1. $4x - 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi(m-k)$

$$-3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.2. $4x = \frac{3\pi}{4} - 2x + 2\pi(m-k)$

$$11x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \quad n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$

3) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^{2 \log xy} \quad (1) \quad \sqrt[3]{3}$
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$

1) Рассмотрим (2) как квадратное уравнение относительно x :

$x^2 + (-2y-4)x - 3y^2 + 12y = 0$

$D(x) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$
 $= 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$

2) $x = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$

$x_1 = y+2 + 2y-2 = 3y$

$x_2 = y+2 - 2y+2 = 4-y$

3) $x = 3y$:

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\log 3y} = y^{2 \log 3y^2}$

$\frac{y^{4 \log 3y}}{3^{\log 3y}} = y^{2 \log 3 + 4 \log y} = \frac{y^{4 \log 3 + 4 \log y}}{3^{\log 3y}} \quad | : y^{4 \log y} \neq 0$

4) $y^{\frac{2 \log 3}{3^{\log 3y}}} = y^{\frac{4 \log 3}{3^{\log 3y}}} \quad | : y^{\frac{2 \log 3}{3^{\log 3y}}}$

$1 = \frac{y^{\frac{2 \log 3}{3^{\log 3y}}}}{y^{\frac{2 \log 3}{3^{\log 3y}}}}$

$3^{\log 3y} = y^{2 \log 3}$

$y^{\log_4 3} \cdot \log_3 y = 2 \log 3$

$\log_4 3 \cdot \log_3 y = 2 \log 3 \quad | : \log 3$

$\log_4 3 \cdot \frac{\log_3 y}{2 \log 3} = 2 = \log_4 3 \cdot \frac{\log_3 3y}{2} = 2$

$\frac{\log_3 3y}{\log_3 y} = 2 = \log_4 3y =$
 $= 1 + \log_4 3$

$\Rightarrow y=3; x=9$

5) $x=4-y: \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\log(4-y)} = y^{2 \log y(4-y)}$

$x > 0, y > 0$

$\Rightarrow x \in [0, 4]$

$y \in [0, 4]$

$y^{5 \log(4-y)} = (4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2 \log y(4-y)}$

$y = \frac{(4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2 \log y(4-y)}}{y^{2 \log y(4-y) + 2 \log y}}$

$y^{\frac{3 \log 4 - 3 \log y}{y}} = y^{\frac{3 \log(4-y)}{y}} = (4-y)^{\frac{\log(4-y)}{y}} \cdot y^{\frac{2 \log y}{y}} \cdot y^{\frac{3 \log y}{y}}$

$y^{\frac{3 \log 4}{y}} = (4-y)^{\frac{\log(4-y)}{y}} \cdot y^{\frac{5 \log y}{y}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^{2 \lg xy}$ и $x=4-y$.

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y = 10^{\lg y} \quad x = 10^{\lg x}$$

$$10^{\lg y \cdot 3 \lg x} = 10^{\lg x^2 + 2 \lg^2 y} \Leftrightarrow 3 \lg y \cdot \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

$$x=4-y \quad \lg x = \lg$$

6) $3 \lg y \cdot \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$ $2 \lg^3 y - 3 \lg y \lg x + \lg x = 0$.

$$3 \lg y \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2 \lg^2(y)$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg xy + \lg^2 x = 0 \quad | : \lg^2 x \quad ; \quad \frac{\lg y}{\lg x} = t$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

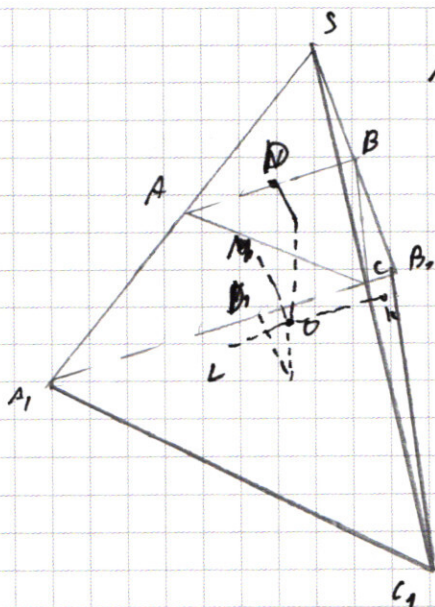
$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

6.1 $\frac{\lg y}{\lg(4-y)} = 1 \quad \lg y = \lg(4-y) \quad y=2 \quad x=2$

6.2 $2 \lg y = \lg(4-y) \quad \lg y^2 = \lg(4-y) \quad y^2 = 4-y \quad y > 0$
 $y^2 + y - 4 = 0; y > 0$

Ответ: $(9; 3) \quad (2; 2) \quad \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

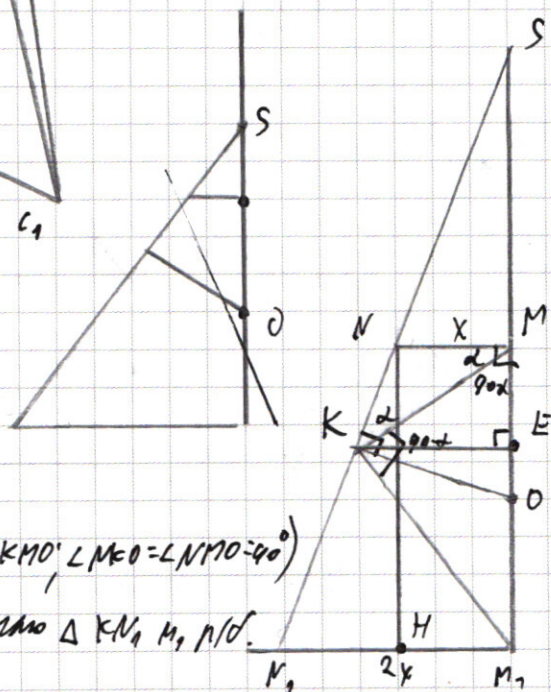


№4.

1) Плоскость $\perp SO \parallel \rightarrow$ сечения - подобие
 ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ к-во. подобия $= \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

2) Рассмотрим плоскость $\perp SO$: NM и N_1M_1 -
 медианы ΔABC
 и $\Delta A_1B_1C_1$

($NM, N_1M_1 \perp SO$;
 $\frac{NM}{N_1M_1} = \frac{1}{2}$); $KO \perp SN_1$.



3) $KO = OM = ON_1 = \frac{1}{3} SO$

$\Rightarrow \Delta NKM_1 - \text{п/с}$.

$\Rightarrow \angle NMK = \angle NKM_1$ ($\angle MKO = \angle KMO$; $\angle MKO = \angle NMO = 90^\circ$)

$\Rightarrow \Delta NMK \text{ п/с};$ аналогично $\Delta KN_1M_1 \text{ п/с}$.

$NM = x$; $N_1M_1 = x$; $NN_1 = 3x$

$NK = x$; $N_1K = 2x$; N_1H ($NH \perp N_1M_1$) $= x \Rightarrow \sin \angle N_1NH = \frac{1}{3} = \sin \angle KSO$ ($NH \parallel SO$).

4) NM - ср. линия $\Delta N_1M_1S \Rightarrow NS = 3x$; $KN = 4x$. $\Rightarrow KE$ ($KE \perp SO$) $= \frac{4}{3}x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NM}{KE} = \frac{3}{4}$.

5) П.к. аналог. рассмотрим прямо убоитривъ в плоскостях $SO \perp$ и $SO \perp$

$\Rightarrow$ плоскость $KLM \parallel ABC$ и образует $\Delta \approx \Delta ABC$. к подобия =

$= \frac{NM}{KE} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{NML} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

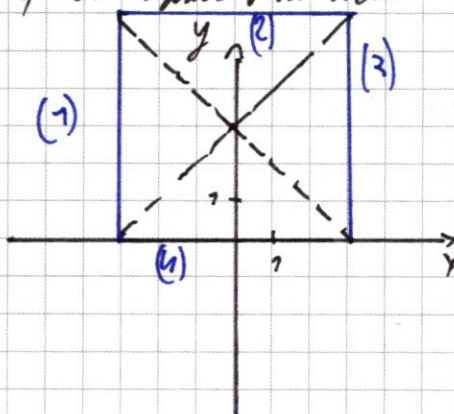
Ответ: $\angle N_1SM_1 = \arcsin \frac{1}{3}$; Площадь сечения равна $\frac{16}{9}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{5}$.

$$y = -3x \quad \begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 & (1) \\ (|x| - 4)^2 + (|y - 3|)^2 = \alpha & (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим множество (1) урав. (1) на коор. плоскости:



$$(1) \quad y = -3x \quad \begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

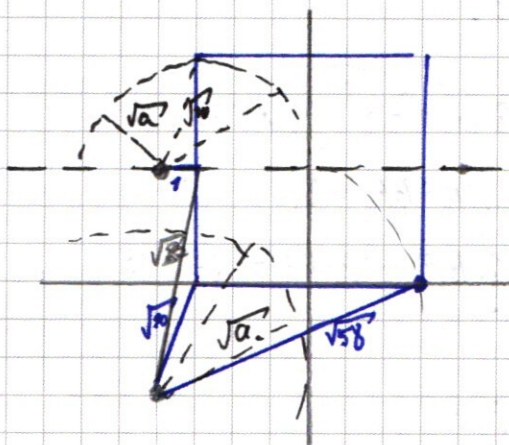
$$(3) \quad \begin{cases} y - 3 - x < 0 \\ y - 3 + x > 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} y - 3 - x < 0 \\ y - 3 + x < 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2) В зависимости от знака $x \geq 4$ $y \geq 3$ уравнение (2) есть окружность с центром $(4, 3)$ и $r = \sqrt{\alpha}$ ($\Rightarrow \alpha \geq 0$).

Итак (1) и (2) имеют решение $x \geq 4$ и нет решений $\Rightarrow x < 4$

и урав. (2) имеет вид $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = \alpha$.



3) $\alpha \in [0; 1]$ нет решений.

$\alpha = 1$: одна точка $\alpha = 10$: 2 решения $(-3; 0; -3; 6)$.

$\alpha \in (1; 10]$: 2 решения (только верхняя).

$\alpha \in (10; 49)$: 3 решения (1 в верхней и 2 в нижней).

$\alpha \in (49; 58)$: 4 решения.

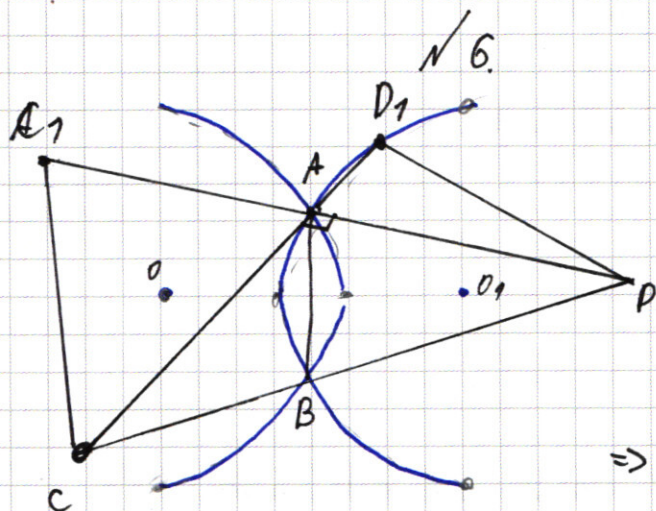
$\alpha > 58$ 2 решения (нижняя и 1 в верхней).

$\alpha = 58$: 2 решения $(3; 0)$ и $(7; 6)$.

$\alpha \in (58; 40)$: 2 решения (1 в верхней и 1 в нижней).

$\alpha \in (49; 58)$: 3 решения (нижняя и 2 в верхней).

Ответ: $a=10$ $a=58$ $a \in (37; 49)$



1) Пусть $CA \cap O_1 = A$ и $AD \cap O_1 = D$.

$$\Rightarrow \angle C_1 A C = 90^\circ; \angle D A D_1 = 90^\circ$$

$$\angle C C_1 A = \alpha = \angle A B D \text{ (} \angle_1 A B C \text{ впис.)}$$

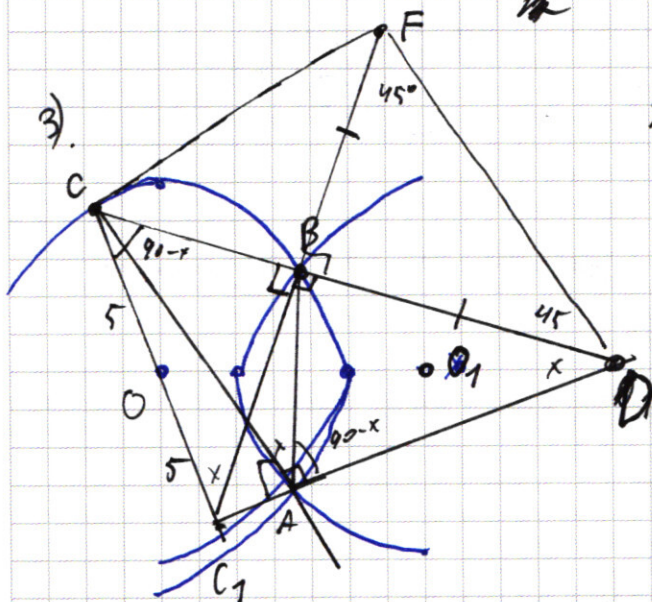
$$\Rightarrow \angle A D_1 D = 180 - \alpha; \angle A D D_1 = 90 + \alpha \leq 90$$

$\Rightarrow$ обе окружности касаются в одной точке.

2) Если AC - кас. O_1 и AD - кас. $O_1 \Rightarrow \triangle CAP$ - н/с ; $CA = d = 10$.

$$CF = AC = AD = 10.$$

$$\Rightarrow BD = BE = CF = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \cdot 10$$



Пусть CA касается O_1

$$\Rightarrow AD \cap O_1 = C_1.$$

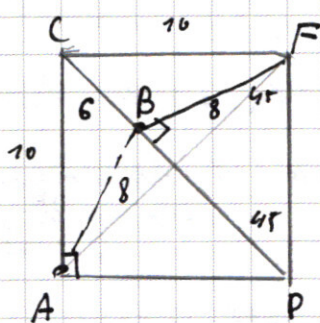
$$\angle C A C_1 = \angle C B C_1 = 90^\circ.$$

$$\angle C C_1 B = \angle C A B = \frac{1}{2} \angle A B C = \angle B D A$$

$$\Rightarrow \angle C D A = x; \angle B C A = 90 - x = \angle C_1 C B =$$

$$\Rightarrow CA \equiv CC_1 \Rightarrow CA \text{ и } AD - \text{касательные.}$$

$$\Rightarrow CF = 10.$$



$$5) CB = 6 \Rightarrow BF = 8 \left(\sqrt{10^2 - 6^2} \right); \angle CBF = 90^\circ.$$

$$AC = CF = 10 \Rightarrow AB = BF = 8.$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{CB \cdot 2BF}{2} = CB \cdot BF = 6 \cdot 8 = 48$$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 48$. $CF = 10$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq y < 70 + (2^{64} - 1)x \quad \sqrt{7}.$$

~~$$2 + 3 \cdot 2^{65}$$~~ ~~равно~~

$$1. x=0: \quad 3 \cdot 2^{65} \leq y < 70 \quad \emptyset$$

$$2. x=1: \quad 2 + 3 \cdot 2^{65} \leq y < 70 + 2^{64} - 1.$$

Кол-во решений: 2

$$\begin{aligned} \text{Кол-во решений } (x): y(x): 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} &= \\ &= 70 + 2^{64}(x-6) - x - 2^x \geq 0. \\ x &\geq 6. \quad x \leq 70. \end{aligned}$$

(для $x=70$ получается значение 0).
+ функция монотонно убывает.
(2^x растет быстрее, чем $2^{64}x$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Кол-во решений: } \sum_{x=6}^{70} 70 + (2^{64} - 1)x - x - 2^x &= \\ = 70 \cdot 63 + \sum_{x=6}^{70} (2^{64} - 1)x - x - 2^x &= \\ = 70 \cdot 64 - \left(\frac{6+70}{2}\right) \cdot 64 + \sum_{x=6}^{70} (2^{64} - 1)x - 2^x &= \\ = 70 \cdot 64 - 38 \cdot 64 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 64 + \sum_{x=6}^{70} -2^x &= \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 32 \cdot 64 + (2^{64}) \cdot \sum_{x=6}^{70} 12^x.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Бланк задания должен быть вложен в рабо
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- + - 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 = 5^2 \cdot 13 \cdot 5 = 5^3 \cdot 13$. $2 \cdot 7 = 5^3 \cdot 3^3$.

1) $\Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9$.

2) $\cos 11x - \cos 3x = \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 7x$
 $-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$
 $2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$
 $\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\sqrt{2} \sin 4x - (\cos 7x + \sin 7x)) = 0$

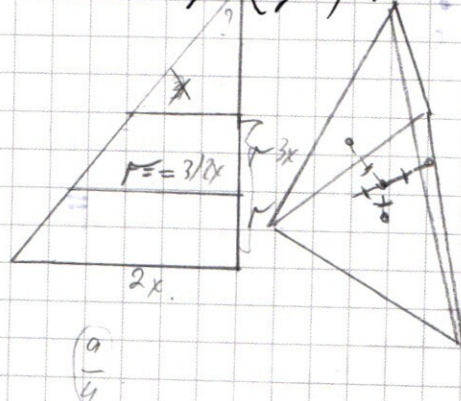
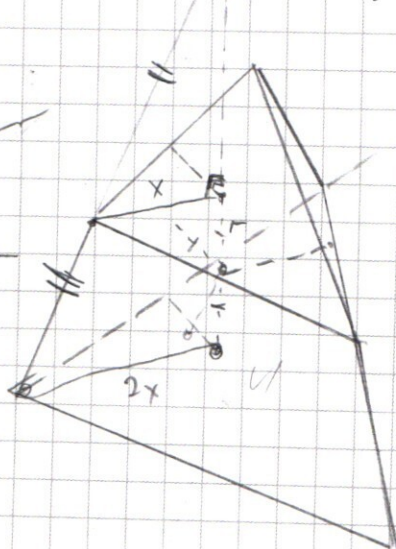
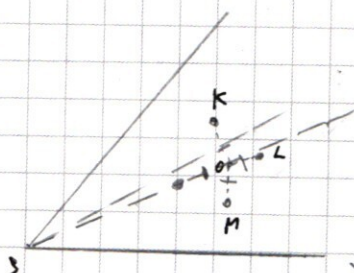
$\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x + \sin 7x$

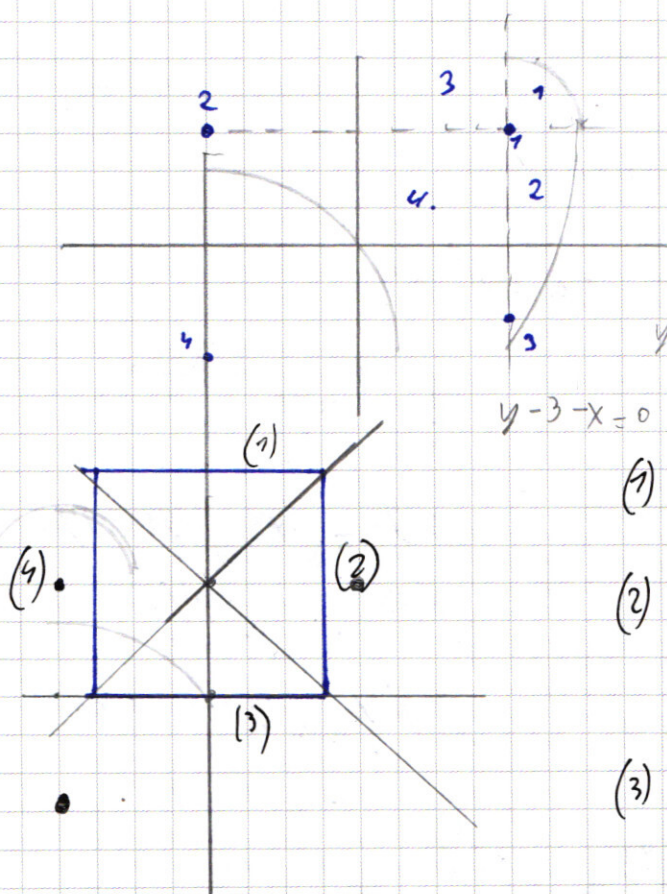
$\sin 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \dots$

3) $\frac{y}{x} = y$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$D(x) : (2y+4)^2 + 4(3y^2-12y) - 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$
 $= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-4)^2 = (4y-4)^2$





$$y - 3 + x = 0 \quad y = 3 - x$$

$$y - 3 - x = 0 \quad y = x + 3$$

$$(1): \begin{aligned} y - 3 - x &> 0 \\ y - 3 + x &> 0 \end{aligned}$$

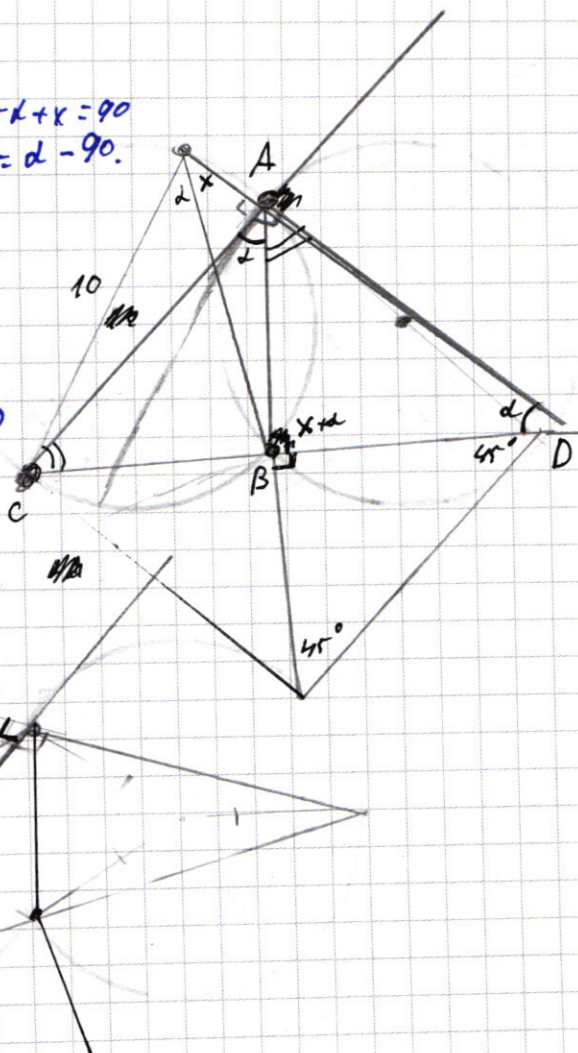
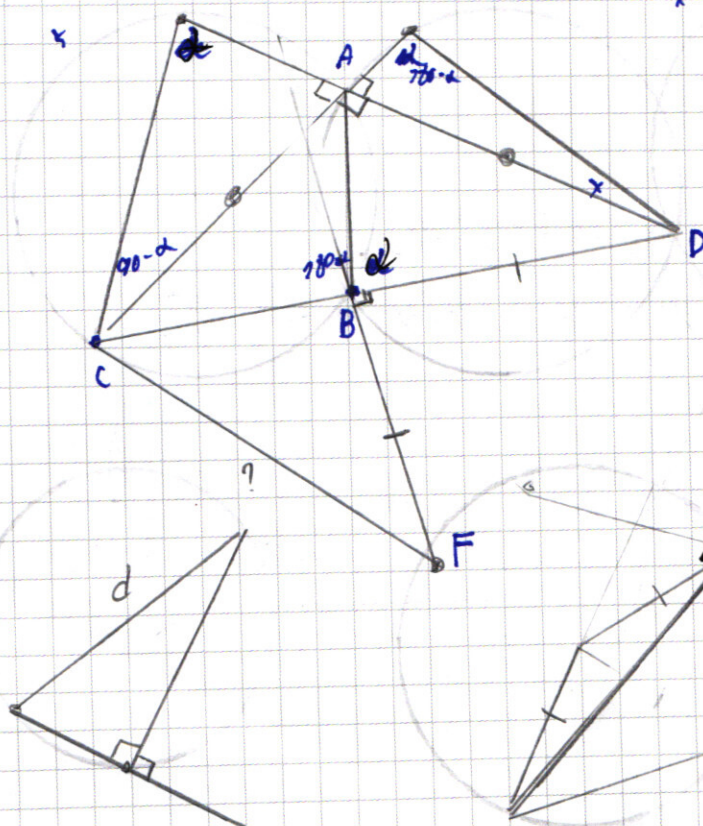
$$(2) \begin{aligned} y - 3 - x &< 0 \\ y - 3 + x &> 0 \end{aligned}$$

$$x + 3 - y + y - 3 + x = 6 \quad x = 3$$

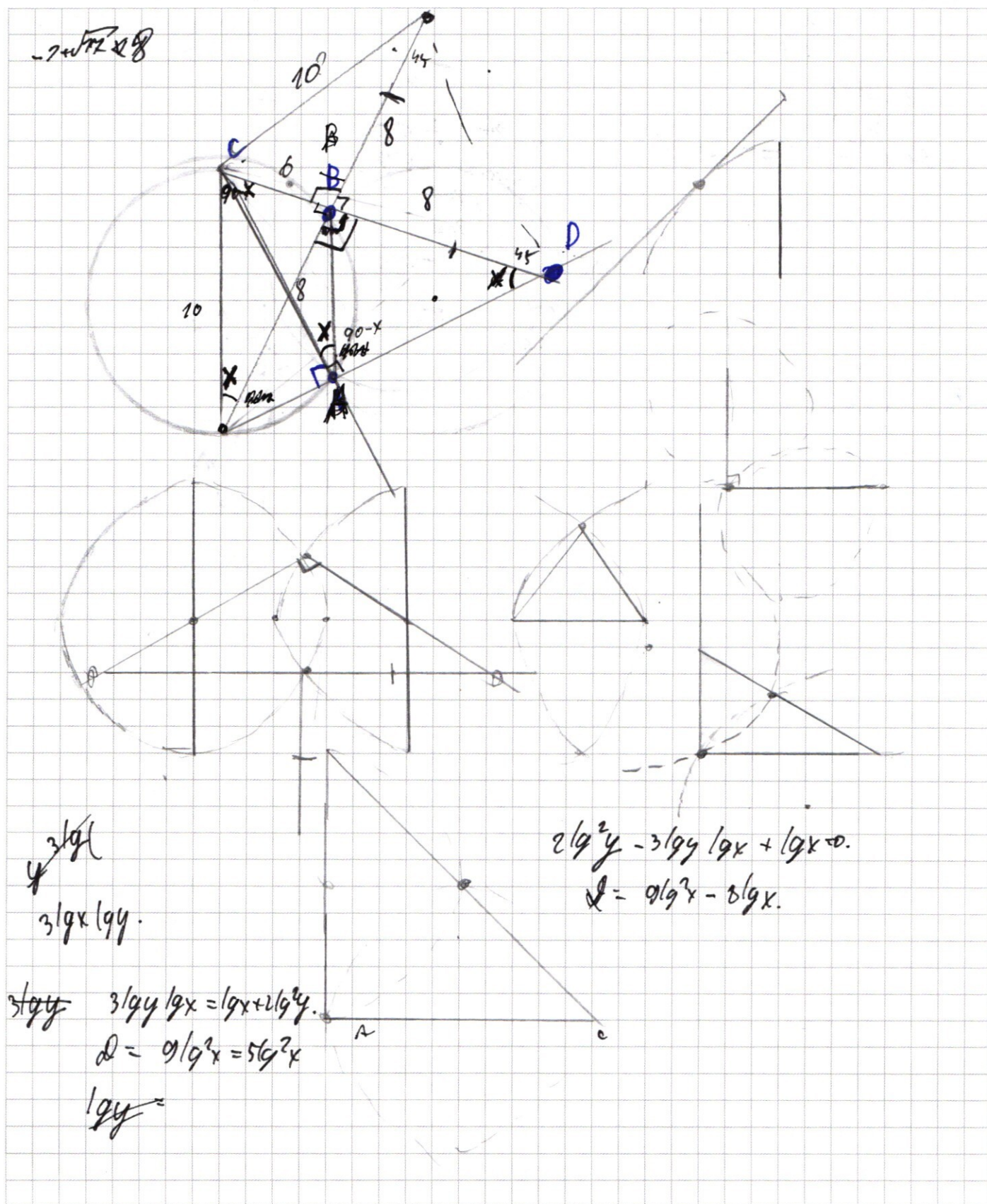
$$(3) \begin{aligned} y - 3 - x &< 0: \quad x + 3 - y + 3 - x - y = 6 \\ y - 3 + x &< 0: \quad -2y = 0. \end{aligned}$$

$$x < 4 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 = \alpha$$

$$\begin{aligned} 180 - \alpha + \alpha &= 90 \\ x &= d - 90. \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

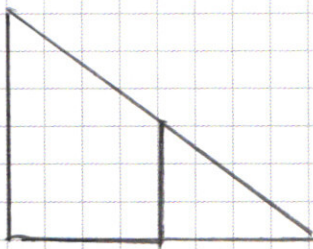
$$y \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x.$$

~~$2^x + 3 \cdot 2 = 65$~~

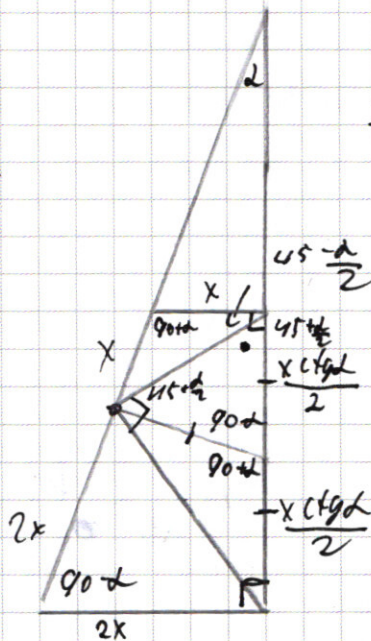
$$170 + 2 \cdot 64 - x > 2 \cdot x + 3 \cdot 65$$

$$170 + 2(64)$$

$$20 \cdot \begin{pmatrix} 2^{64} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \Rightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$



$$y \leq 70$$



$$\frac{780 - 90 - 2}{2} = \frac{688}{2}$$

$$45 - \frac{\alpha}{2}$$

