МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

+

1680

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

+

$(9,3)$ $(2,2)$ $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

+

1, 130

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

+

+

10

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

$(1+\sqrt{2})\ \frac{702}{25}$

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{5}\right)^{\lg x} = 2^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$\lg 3 \lg_3 y = \lg 3 y$

$1 = 3^{\lg 3 y} \cdot y^{-2\lg 3}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3} = 3^{\lg 3y}$

$1 = x^{\lg x} \cdot y^{2\lg xy - 5\lg x}$

$1 = x^{\lg x} \cdot y^{-3\lg x + 2\lg y}$

$1 = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2 - 4\lg 3y}$

$\lg 3(\log_3 y - 1) + \lg$

$4\lg y$

$-2\lg 3y + \lg y^2 = -\lg 3 - 4\lg y$

$x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$

$= x^{2\lg x}$

$3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y - 3\lg 3y + 2\lg y}$

$\lg \log_3 y^{\lg 3} = \lg 3 y$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$y > 0$ $x^2 - y^2 - 2xy - 4x - 4y^2 + 12y = 0$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg 4y - y^2}$

$y^2 + 2y^2 + 4y - 3y^2 + 12y = 0$

$\left(3^5 \frac{x^5}{x}\right)^{\lg x}$

$\lg \log_3 = 3^{\lg x}$

$\frac{y^4}{3} = 3y^{2\lg 3y^2}$

$2y$

$9y^2 - 6y^2 - 12y - 2y - 12$

$3^{\lg 3 + \lg y}$

$\frac{1}{3} = y^{2\lg y - 4}$

$y^{5\lg 4-y} = (4-y)^{\lg 4-y}$

$x^2 - 9y^2 + 6y^2 - 2xy - 4x + 12y = 0$

$\lg_{10} 3 + \lg_{10} y^2$

$y^{5\lg 4-y}$

$x > 0$ $y > 0$

$-2y(x - 3y)$

$-4(x - 3y) = 0$

$y^{4\lg 3y}$

$2\lg 4y - 4 + 2\lg y$

$(x-3y)(x + 3y - 2y - 4) = 0$

$3^{\lg 3y}$

1

$y^{3\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x = 4 - y \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x = 3y \end{cases} \end{array}\right.$$

$y^{2\lg 3y^2}$

$2\lg 3 + 2\lg y^2 = 4\lg 3 - 4\lg y$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$-2\lg 3$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

$\log_3 y^{2\lg 3} = \lg 3y$ $\quad 9-8=1$ 40 64 $\sqrt{3y}=y$ $\quad 3y=y^2$ $\quad y(y-3)=0$

$2\lg 3 \log_3 y = \lg 3y$ $\quad \frac{3\pm 1}{2\cdot 2}=1; \frac{1}{2}$ $\lg xy$ $\quad \log_y\left(\frac{y^5}{x}\right) = 2\lg xy$ $\quad y=3$, $y\neq 0$

$x=16-8x+x^2$

$16-9x+x^2=0$

$2\lg 3\log_3 y = \lg 3 + \lg y$ $\quad 81-$ $\quad \lg x\left(\log_y\left(\frac{y^5}{x}\right)-2\right) = 2\lg y$

$\lg 3(2\log_{3} y^2 - 1) = \lg y$ $\quad \lg x(\log_y y^5 - \log_y x - 2) = 2\lg y$

$t^2+t-4=0$

$\log_y 3^{\lg 3y} = 2\lg 3$ $\quad \lg x(-\log_y x + 3) = 2\lg y$

$D=1+16$

$\log_y 3^{\lg 3y}(\lg 3+\lg y) = 2\lg 3$ $\quad \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ $\quad \lg (4-y)(3-\log_y (4-y)) = 2\lg y$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)$ $\quad 3-\log_y (4-y) = 2\log_{4-y} y$

$\lg x \log_y (\ldots) = 2\lg xy$ $\quad 3 - \frac{1}{t} = 2t$

$\lg 3y \log_y \frac{y^4}{3} = 2\lg 3y^2$ $\quad \lg 3y(3-\log_y 3y) = 2\lg y$

$\lg 3y(\log_y y^4 - \log_y 3) = 2(\lg 3 + 2\lg y)$ $\quad 3-\log_y 3y = 2\log_{3y} y$

$\lg 3y(4-\log_y 3) = 2(\lg 3 + 2\lg y)$ $\quad 3-\frac{1}{t}$

$2t^2+1-3t$

$(\lg 3 + \lg y)(4-\log_y 3) = 2(\lg 3 + 2\lg y)$

$9-8$ $\quad \frac{3\pm 1}{4} = 1, \frac{1}{2}$

$\cancel{4}\lg 3 \cancel{+4\lg y} - \log_y 3\lg 3 - \log_y 3\lg y = 2\lg 3 \cancel{+4\lg y}$

$2\lg 3 = \log_y 3(\lg 3 + \lg y)$ $\quad \log$ $\quad \log_{3y} y = 1, \frac{1}{2}$

$\lg 3(2-\log_y 3) = \log_y 3\lg y$ $\quad \log_y 3 = \ldots$ $\quad 3y=y$

$9y^2=y$

$\lg 3(\log_y \frac{y^2}{3}) = \lg y \log_y 3$ $\quad \lg 3(2-\log_y 3) = \frac{\log_y 3}{\log_y 10}$

$\log_y 3 = 2$ $\quad 3y=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 11x\right) - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right) - \cancel{\sqrt{2}}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{\sqrt{2}}\cos 14x$

$\sin\left(-11x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-3x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$x+y=11$

$x-y=3$

$-7x-4x+\frac{\pi}{4}$

$-7x+\frac{\pi}{4}-4x$

$x=3+y$

$3+2y=11$

$2y=8$

$-2\sin 7x \sin$

$\cos\left(-7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x$

$\cos -7x \sin 4x \cos\frac{\pi}{4} + \sin 7x \sin 4x \sin\frac{\pi}{4} = \cos 14x$

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin 14x$

$\cancel{\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(4x\right) - \sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x - \cancel{\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)}\cos 4x - \sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4x$

$-2\left(\sin 7x \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x\right)\sin 4x$

$\cos 14x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

№5. $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=9 \end{cases}$

$y+\ \ 3+x$

$y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6$

$x=-3$

$y=3+x$ $\quad y-3-x+y-3+x=6$

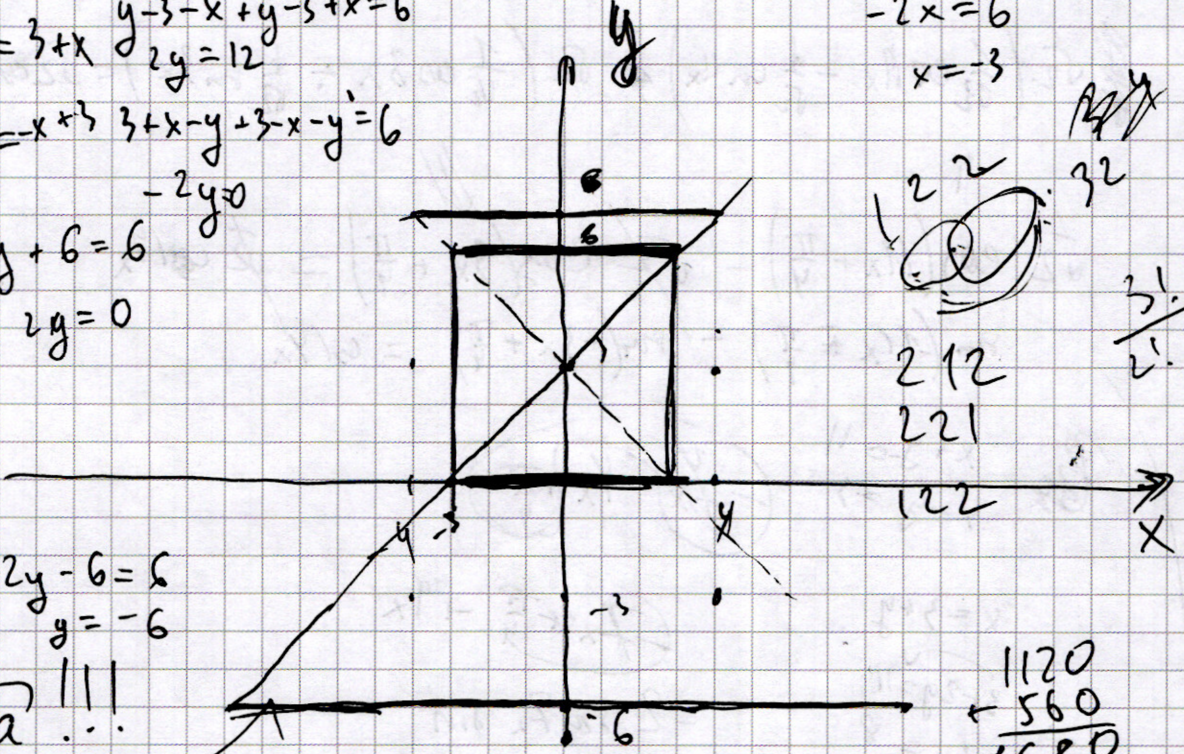
$2y=12$

$y=-x+3$ $\quad 3+x-y+3-x-y=6$

$-2y=0$

$2y+6=6$

$2y=0$



$-2y-6=6$

$y=-6$

$\sqrt{a}$!!!

$1\ 2\ 2$

32

$\frac{3!}{2!}=3$

212

221

122

$\begin{array}{r} 1120 \\ +\ 560 \\ \hline 1680 \end{array}$

$2\sqrt{49+81}=\sqrt{130}$

$9+4\cdot 16$

$40+24+9$

$49+24$

$3375 \,|\, 5$

675

$675 \,|\, 5$

135

$15\cdot 36$

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$

$135 \,|\, 5$

27

$C_8^3 \cdot C_5^4 =$

$\frac{8!}{5!\,3!}$

$\frac{5!}{4!}$

$5^3 3^4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$2^x - 70 - 2^{64}x + x + 3\cdot 2^{65}$

$2^x + x - 70 - 2^{64}(x + 6)$

сум разн

$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$4x + \frac{\pi}{4} - 7x$

$-2\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos 14x$

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$7x - \frac{\pi}{4} - 4x$ $\quad$ $7x - \frac{\pi}{4} + 4x$

$-2\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 4x = \cos 14x$

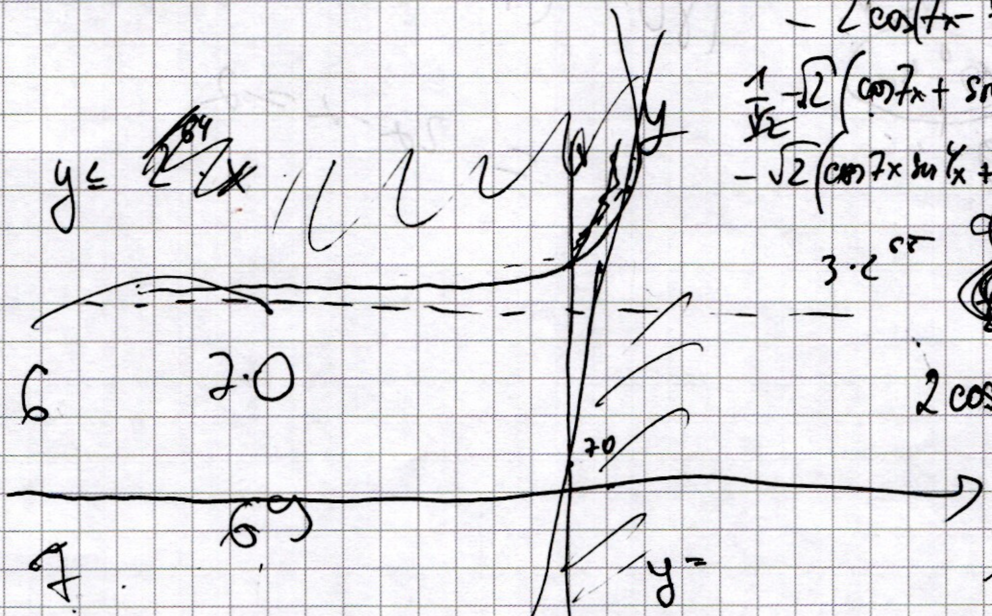
$\frac{1}{\sqrt2}\sqrt2(\cos 7x + \sin 7x)\sin 4x = \cos 14x$

$-\sqrt2(\cos 7x \sin 4x +$

$y \le 2^{64}x$

$3\cdot 2^{65}$

6 $\quad$ 70



$2\cos^2 7x - 1$

$x - 6 = 2^6$

$x = 2^6 + 6$

$x = 70$

$2^6(2^{64}-1)$

x $\quad$ 6

$2^{70} - 2^6$

7

$y >$ $2 + 3\cdot 2^{65}$

$6(2^{64}-1)$

$69 + 2^{64}$

$64 = 2^6$

$8\cdot 2^{64} - 6$ $\quad$ 66

$$\begin{cases} y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y = 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

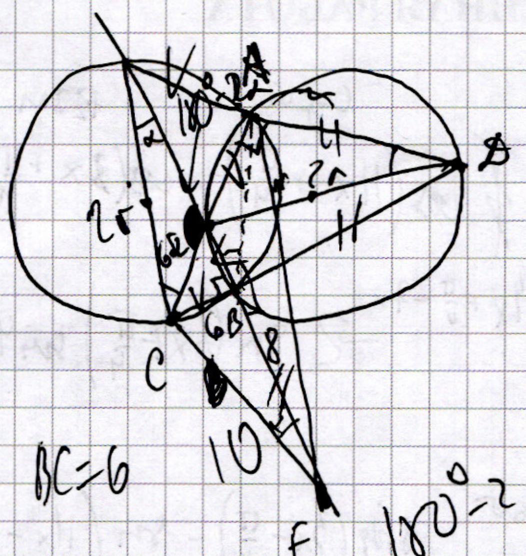
$-6(2^{64}-1) + 2^6 + x(2^{64}-1)$

$2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + x2^{64} - x$

$(x-6)(2^{64}-1) = 2^x - 2^6$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6.



$BC = 6$

$180^\circ - 2\alpha$

~~cos~~

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

2α

$180^\circ - 2\alpha - \alpha$

$180^\circ - 3\alpha$

$180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha =$

$= 2\alpha - \alpha = \alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3. $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-9y^2+6y^2-2xy-4x+12y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ (x-3y)(x+3y)-2y(x-3y)-4(x-3y)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ (x-3y)(x+3y-2y-4)=0 \end{cases}$

$x>0$
$y>0$, т.к. они под знаком логарифма

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_y\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = 2\lg xy \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \\ x=3y \end{cases} \end{array}\right.$ $y>0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x\left(\log_y \frac{y^5}{x}-2\right) = 2\lg y \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} 1 = 3^{\lg 3y} y^{2(\lg 3+\lg y^2)-4(\lg 3+\lg y)} \\ x=3y \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x\left(\log_y y^5-\log_y x-2\right) = 2\lg y \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} 1 = 3^{\lg 3y} y^{-2\lg 3+\cancel{4\lg y}-\cancel{4\lg y}} \\ x=3y \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \lg x\left(3-\log_y x\right)=2\lg y \\ y=4-x \end{cases} \\ \begin{cases} y^{2\lg 3}=3^{\lg 3y} \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 3-\log_y x=2\dfrac{\lg y}{\lg x} \\ y=4-x \end{cases} \\ \begin{cases} \log_y 3^{\lg 3y}=2\lg 3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 3-\log_y x=2\log_x y \\ y=4-x \end{cases} \\ \begin{cases} \lg 3y\log_y 3=2\lg 3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right.$$

Сделаем замену
$t=\log_x y$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 3-\dfrac{1}{t}=2t \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \lg 3\log_y 3+\lg y\log_y 3=2\lg 3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} \dfrac{2t^2+1-3t}{t}=0 \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \lg 3\left(2-\log_y 3\right)=\lg y\log_y 3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right.$$

вернёмся к x и y

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \log_x y=1;\ \frac{1}{2} \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \lg 3\left(2-\log_y 3\right)=\dfrac{\log_y 3}{\log_y 10} \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=y \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}=y \\ x=4-y \end{cases}\end{array}\right. \\ \begin{cases} \lg 3\left(2-\log_y 3\right)=\lg 3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4-y=y \\ x=4-y \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}=4-x \\ x=4-y \end{cases}\end{array}\right. \\ \begin{cases} \log_y 3=1 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=4-y \end{cases} \\ \sqrt{x}=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ \varnothing \end{array}\right. \\ \begin{cases} y=3 \\ x=3y \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{18-2\sqrt{17}}{4} \\ y=\frac{16-\frac{18+2\sqrt{17}}{4}}{4} \end{cases}\end{array}\right. \\ \begin{cases} y=3 \\ x=9 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(9;3);\ (2,2);\ \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{4};\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

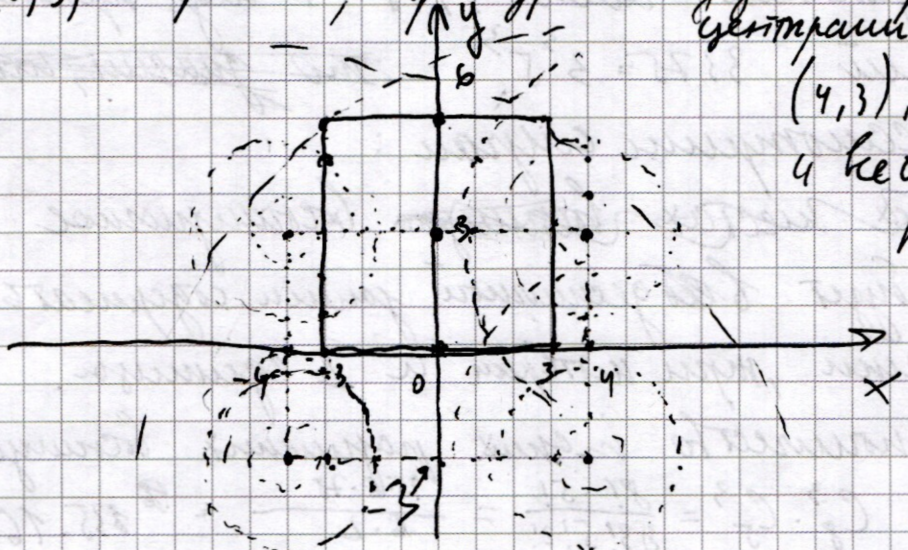
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 3^{\lg 3y} = y^{2\lg 3} \\ x = 3y \end{cases}$

№5. $\begin{cases} |y-x-3|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$

Первое уравнение задаёт квадрат с серединой в точке $(0,3)$ и стороной 6. Второе уравнение задаёт 4 окружности с центрами в точках $(4,3)$, $(-4,3)$, $(-4,-3)$, $(4,-3)$ и все они имеют радиус $\sqrt{a}$



Чтобы исследовать систему на предмет количества решений начнём увеличивать радиус 4-х окружностей с 0 до $+\infty$. при $\sqrt{a}<1$ система не имеет реш.
при $\sqrt{a}=1$, у системы ровно 2 решения
при $\sqrt{a}\in(1;\sqrt{10})$ у системы будет иметь 4 реш.
при $\sqrt{a}=\sqrt{10}$ система будет иметь 4 реш
при $\sqrt{a}\in(\sqrt{10};5)$ сист. будет иметь больше 2-ух реш.
при $\sqrt{a}=5$ сист. имеет 4 реш. всилу симметрии
при $\sqrt{a}\in(5;\sqrt{130})$ система будет иметь больше 2-ух реш, ~~[illegible]~~.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) при $5a = \sqrt{130}$ система будет иметь 2 реш.

при $5a > \sqrt{130}$ нет реш

Ответ: ~~а=~~ система будет иметь ровно 2 реш при $a = 1,\ 130$.

№1. ~~В~~ Представим число 3375 в виде простых множителей $3375 = 3^3 5^3$, ~~это значит, что~~

~~что~~ рассмотрим случаи:

1) ~~на 3-х местах восьмизн~~ восьмизначное число будет в ~~его~~ десятичной записи содержать три тройки, три пятёрки и 2 единицы.

тогда количество таких различных восьмизначных чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8! \cdot 5!}{3!3! \cdot 5! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 2} = 35 \cdot 16 = 560$

2) восьмизначное число содержит в себе одну девятку, три пятёрки, ~~и~~ ~~две~~ одну тройку и три единицы

Тогда количество таких различных восьмизначных чисел: $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 \cdot 56 = 1120$

количество расстановок пятёрок

расстановки на оставшиеся места 9 и 3

Итого в сумме будет: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

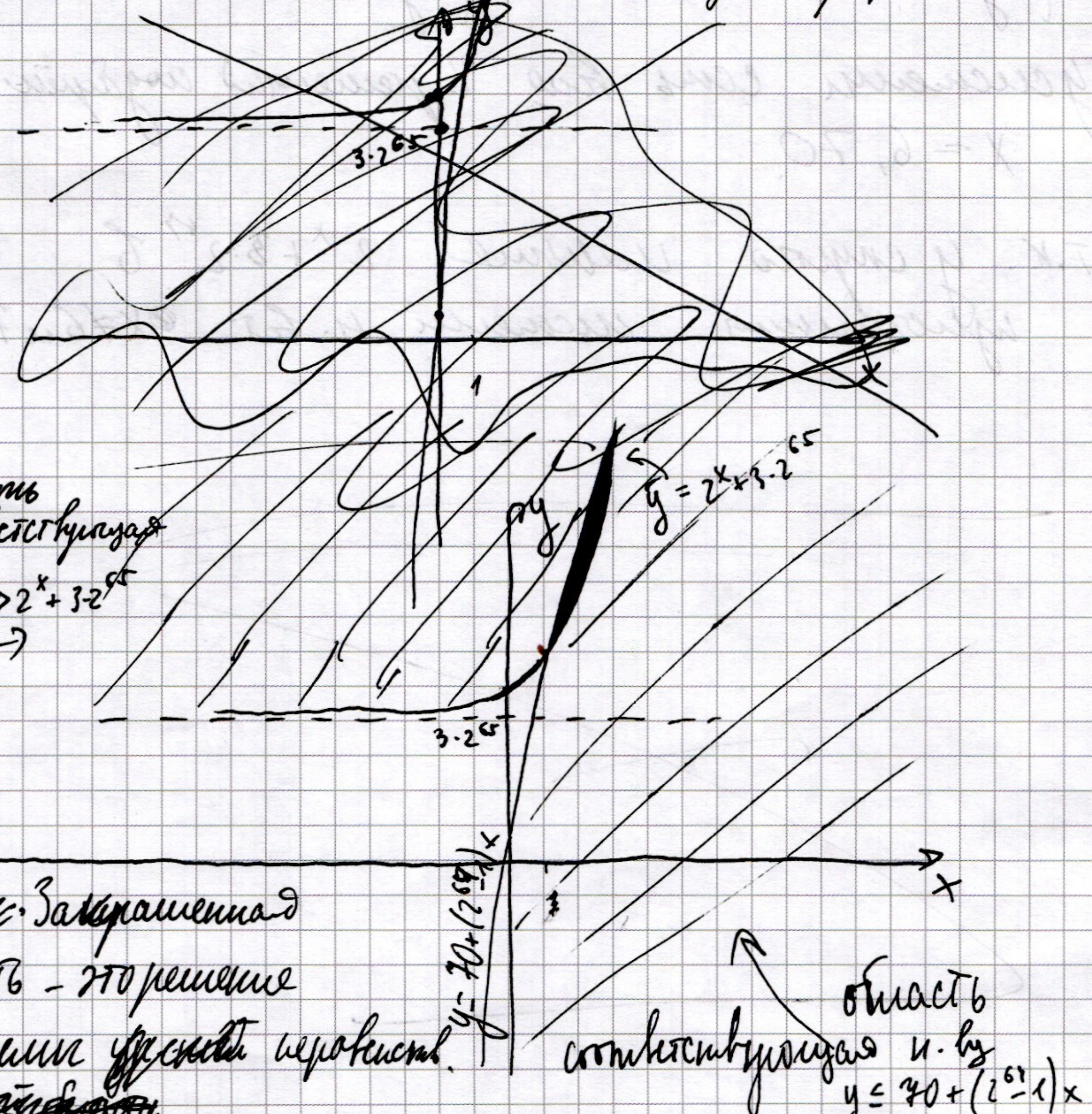
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. $\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$

~~Рассмотрим функции~~

Запишем как система выглядит графически:



~~Ответ~~. Закрашенная область – это решение системы ~~уравнений~~ неравенств. ~~возможности~~

~~Всего у системы есть 2 реш~~
Найдём все целые x которые нам подойдут
для этого Найдём ~~точки~~ ~~пер~~ абсциссы
точки пересечения данных функций.
для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y = 70 + (2^{64}-1)x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + (2^{64}-1)x \\ y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \end{cases}$$

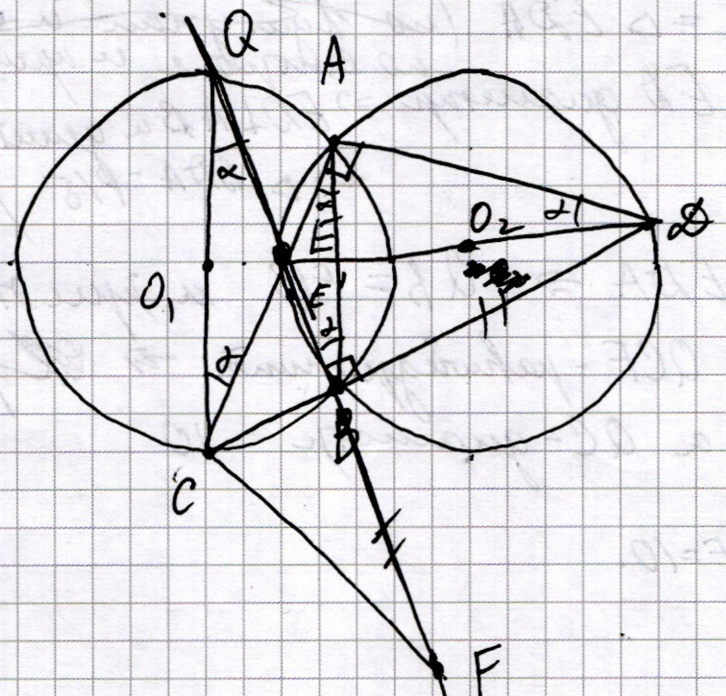
$$\begin{cases} 2^x - 64 = x(2^{64}-1) - 6(2^{64}-1) \\ y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x - 2^6 = (x-6)(2^{64}-1) \\ y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \end{cases}$$

у системы есть всего 2 решения подберём их
$x = 6, 70$.

т.к. у другого значение $2^x + 3\cdot 2^{64}$ в
изначальной системе и. все $x \neq 6$ и 70

№6.

а)



1) прямые AC и BQ пересекаются на окружности O_2 в точке E

(допустим это не так) E', тогда $\angle EAD = 90^\circ \Rightarrow$ ED – диаметр, а $\angle E'BD = 90^\circ \Rightarrow$ E'D – диаметр $\Rightarrow$ противоречие

E' совпадает с E (ED – диаметр)

2) $\angle QCA = \alpha$, $\angle QCA$ – опирается на дугу $\overset{\frown}{QA}$ и $\angle QBA$ опирается на $\overset{\frown}{QA} \Rightarrow \angle QCA = \angle QBA$

3) $\angle EBA = \angle EDA$, т.к. они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{EA}$

4) CQ – диаметр окружности с центром O_1, т.к. $\angle CBQ = 90^\circ$, т.к. диаметры у окружностей с центром O_1 и O_2 равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow CQ = ED$

5) $\triangle BEA$ - равнобедренный, т.к. ED диаметр

$\Downarrow$

$\angle QBA = \angle CAB$

6) $\angle CAB = \angle CQB$, т.к. они опираются на одну дугу

7) тогда $\triangle CBQ = \triangle EDA$ (~~по двум углам и~~ по стороне и прилежащим углам)

($AD = BD$ = т.к. ED диаметр $\Rightarrow ED \perp AB$ и делит её пополам $\Rightarrow \triangle BDA$ - р/б)

8) т.к. $\triangle CBQ = \triangle EDA \Rightarrow QB = FB$ и при этом $CB \perp QF \Rightarrow \triangle QCF$ - равнобедренный $\Rightarrow$ ~~QC~~ ~~диам~~ $\Rightarrow QC = CF$, а QC - диаметр $= 10$

Ответ: $CF = 10$.

б)

$DC = 6$

~~тогд~~ тогда найдём AC и $\sin\alpha$, $\cos\alpha$

$\triangle QCB = \triangle EDB \Rightarrow BC = EB = 6$
$\triangle AED = \triangle CBQ \Rightarrow BC = AE = 6$
$\Rightarrow AC = 6 + 6\sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Найдём $\sin\alpha$ $\angle CFQ = \alpha$ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, т.к. $BC = 6$, $CF = 10$

тогда $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \sin(180^\circ - 3\alpha) \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} 6(1+\sqrt{2}) 10 \cdot \sin 3\alpha =$

$= \frac{3(1+\sqrt{2}) 2 \cdot 3(39)}{25} = \frac{(1+\sqrt{2})702}{25}$

$\times\begin{array}{r}39\\18\\\hline 312\\39\\\hline 702\end{array}$

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$

$= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha =$

$= 2\frac{3}{5}\frac{16}{25} + \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right)\frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 16}{125} + \frac{7 \cdot 3}{125} = \frac{3(32+7)}{125}$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = \frac{(1+\sqrt{2})702}{25}$.