

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N1)

Представим число 9261 в виде произведения простых множителей: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Значит, в числе могут быть только цифры 7, 9, 3 и 1 (1-и.к. она не мешает произведению цифр). Существовало два варианта:

1) В 8-значном числе 3 цифры „7” и 3 цифры „3”, а остальные по „1”. Воспользуемся формулой перестановок с повторениями. У нас есть 8 цифровых позиций, 3 цифры, 2 из которых повторяются 3 раза, а 1 — 2 раза. Тогда кол-во комбинаций в этом случае $A_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 8 \cdot 10 = 560$.

2) В исходном числе 1 цифра „9”, 1 цифра „3”, 3 цифры „7” и остальные 3 „1”. В этом случае $A_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 20 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$.

Всего комбинаций $A = A_1 + A_2 = 560 + 1120 = 1680$ комб.

Ответ: 1680.

(N2)

$$\cos 9x - \cos 6x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

Представим разность косинусов и сумму синусов в виде произведения, а $-\sqrt{2} \cos 4x = -\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$
 $-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0.$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0.$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$12) \begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & (1) \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 2x = \sin 2x; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2): 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0.$$

Применим формулы: $\sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) =$

$$= 2 \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right), \text{ тогда уравнение упр-ие примет вид}$$

$$2 \sin 7x - 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0;$$

$$2 \sin \left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} \right) = 0 & (3) \\ \cos \left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3): \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k; \quad \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k$$

$$(4): \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m; \quad \frac{9}{2}x = \frac{3}{8}\pi + \pi m;$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m.$$

В совокупности решение (1) и (2) даем

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m, \quad n, k, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m; \quad n, k, m \in \mathbb{Z}.$

13

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) - \ln x = \ln(y/x^2) & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{Решим сначала упр-ие (1), а затем перейдем к (2).}$$

$$(1): y^2 - y(x+y) - 2x^2 + 8x = 0. \text{ -выбр. относительно } y$$

$$D = (x+y)^2 + 8x^2 - 32x = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16$$

$$= (3x-4)^2 \quad y_{1,2} = \frac{x+y - (3x-4)}{2} = 4-x \quad y_{2,2} = \frac{x+y + (3x-4)}{2} = 2x$$

$$(y+x-4)(y-2x) = y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12) $\begin{cases} y = 2x(3) \\ y = 4-x(4) \end{cases}$ Подставим (3) в (2), получим:
 $(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = 2x \ln\left(\frac{2x}{x^2}\right)$ Заметим, что $x > 0 \Rightarrow$ перенесем

используя логарифмирование по e:

$$-\ln x \ln(16x^6) = \ln\left(\frac{2}{x}\right) \ln 2x$$

$$-\ln x (4\ln 2 + 6\ln x) = (\ln 2 - 6\ln x)(\ln 2 + \ln x)$$

$$-4\ln x \cdot \ln 2 - 6\ln^2 x = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 6\ln x \ln 2 - 6\ln^2 x$$

$$\ln x \cdot \ln 2 - \ln^2 2 = 0; \quad \ln 2 (\ln x - \ln 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Тогда $x=2$; $y=4$ — первое решение системы.

Подставим (4) в (2), получим

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)}$$

Снова логарифмируем, что
 где с условием $x \in (0; 4)$ (и.о. $\frac{4-x}{x^2} > 0$ и $x > 0$.)

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 \cdot (4-x)^4) = \ln(4-x) (\ln(4-x) - 2\ln x)$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \cdot \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 2\ln x \cdot \ln(4-x);$$

$$\ln^2(4-x) - 3\ln x \cdot \ln(4-x) + 2\ln^2 x = 0.$$

Проверим, является ли $\ln x = 0$ корнем; т.е. $x=1$:

$$\ln^2(4-1) - 3 \cdot 0 \cdot \ln(4-1) + 2 \cdot 0 = 0 \text{ (неверно)} \Rightarrow$$

вернемся к $\ln^2 x$:

$$\left(\frac{\ln(4-x)}{\ln x}\right)^2 - 3 \frac{\ln(4-x)}{\ln x} + 2 = 0 \quad t = \frac{\ln(4-x)}{\ln x};$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \quad D = 9 - 8 = 1 \quad t_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad t_2 = 1.$$

Обратимое замечание: $\begin{cases} \frac{\ln(4-x)}{\ln x} = 2 \quad (5) \\ \frac{\ln(4-x)}{\ln x} = 1 \quad (6) \end{cases}$

$$(5): \ln_x(4-x) = 2. \quad \ln_x(4-x) - \ln_x x^2 = 0 \quad (2)$$

$$(2) (x-1)(4-x-x^2) = 0. \quad \text{Поскольку } x \neq 1 \text{ (проверка обеих частей)}$$

$$\text{то } x^2 + x - 4 = 0 \quad D = 1 + 16 = 17; \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{При этом } x \in (0; 4) \Rightarrow \text{подходит только } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{и } y = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(6): \ln_x(4-x) - \ln_x x = 0. \quad (2) \quad 4 - 2 \geq x \quad (\text{так как } x \neq 1), \text{ тогда}$$

$$x \geq 2 \quad y = 4 - 2 = 2$$

Получаем в совокупности 3 решения: $(2; 2); (2; 4);$
 $(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2})$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); (\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2})$$

(У5)

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25 \quad (2)$$

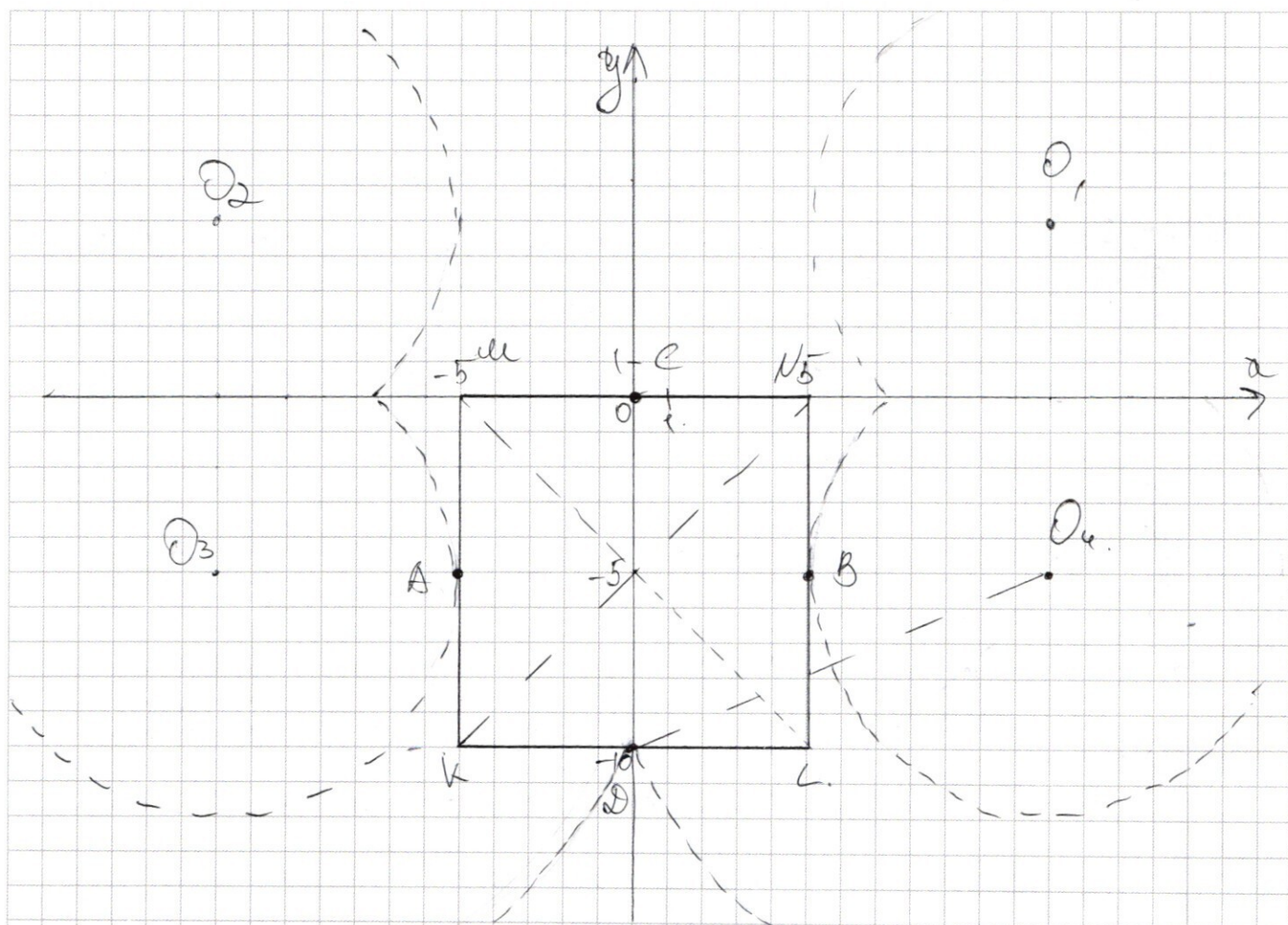
(1) - уравнение квадрата с центром $(0; -5)$ и стороной, равной 10. Это означает, если распроектировать на оси относительно уравнений $y = -x - 5$ и $y = x - 5$.

(2) - график построен из графика окружности с центром $(1; 5)$ и радиусом 5. Ограничения относительно осей Ox и Oy . Изобразим в одной системе оба графика:

Оформим центр точек окружностей O_1 , O_2 , O_3 и O_4 или поместим на рисунке.

В данной задаче подходит 2 возможных конфигурации расположения точек окружностей, они изображены на рисунке.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) В 1-м случае, если мы с с. O_3 и O_4 касаются
сторона квадрата. При этом в силу симметрии
если мы с с. O_1 и O_2 касаются не будут, т.е.

имеем 2 решения. $O_4B \geq O_3A \geq 1$, тогда $A \geq 4$.
Если $ML \perp O_4$, то $AB \parallel O_4$ и $y_B = y_{O_4} = 5$, $x_A = x_{O_4} - AB \geq 1$.

2) Во 2-м случае если мы с с. O_3 и O_4 касаются
квадрат в м. $(0; -10)$, а касания
в 1 и 2 четвертях имеют одну точку с квадратом
 $C(0;0)$. Тогда расстояние $O_4D \geq \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$2\sqrt{169} = 26$. Тогда $a \geq 13^2 = 169$.

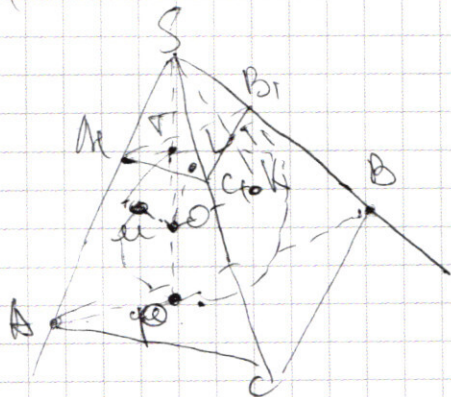
В море найдены 2 железные предмета:
 $a \geq 169$ и $a \geq 49$.

Ответ: $a \geq 49$; $a \geq 169$

(14)

По св-гу касательной к сфере отрезки SK , SL и SM равны между собой и равны $1/2$ из 1 -го условия, проведенная к точке K , L и M .

Тогда $\triangle KSO$, $\triangle LSO$ и $\triangle MSO$ равны между собой (по 2-му условию).



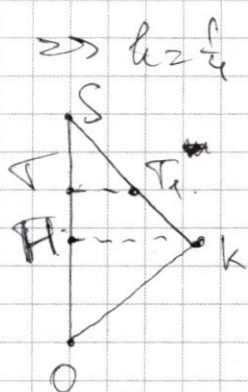
Тогда SO и сфера в вершине S и имеют точку P . Точка O — центр вписанной сферы, но все точки SO равноудалены от грани ABC . Тогда

сечение ISO и касательная сфера проходят через точку T (сверху) и через P (снизу), т.е. это единственная точка, принадлежащая поверхности сферы и SO одновременно. Обозначим IK — IK ISO и IP — IP ISO , но $IK \parallel IP$, а по св-гу пересечения IK — IK ISO и IP — IP ISO касательная сфера.

В-нов, найденная в сечении точка совпадает с IK — IK ISO и IP — IP ISO . Тогда найдены IK — IK ISO и IP — IP ISO (по св-гу касательной к сфере) и

$$\frac{AK}{AC} = \frac{SK}{SA} = \frac{ST}{SP}, \text{ где } SP = ST + 2R. \text{ По } \frac{SK}{SA} = \frac{ST}{SP} = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА*



$\Rightarrow h \approx \frac{1}{4}$ u $\frac{ST}{2R+ST} \approx \frac{1}{4}$, sonst $ST \geq \frac{2}{3}R$. Dann immer

Δ ΣΟΚ: ΟΚ = R и OK ⊥ SK (по в-гг 'маса-
мелбаш и падежы'), тогда

(molekulen u puzanju) , onda
 $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle KSO = 45^\circ$
 $\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$

Для $\triangle KSO$, $\triangle MSO$ и $\triangle LSO$ верно, что верно, что
везде из точек K, L и M отрезки SO равны
и показан в одну точку O .

$\text{По } \text{cb-By} \text{ канона } \text{OK} \geq \text{OK} \cdot \text{OS} \quad R^2 \geq \text{OK} \cdot R^2 \quad \text{OK} \cdot R$
 $\text{OK} \geq \frac{3}{5} R \quad \text{и } S_2 \quad \frac{5}{5} R - \frac{3}{5} R = \text{SO} - \text{OK} \geq \frac{16}{15} R$

Поэтому все вопросы КК, СК и ЛК относятся к этим
модулям, то есть ISO и UML 112

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{UR}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SR}} = \frac{2}{\frac{16}{15}R} = \frac{5}{8}. \text{ Тогда коэффициент равен}$$

В-усл, применяя в первом и втором

$$\frac{S_{\text{Kunk}}}{S_{\text{ArBeGr}}} \approx \frac{P}{k_1} \approx \frac{64}{25} \quad S_{\text{Kunk}} \approx \frac{64}{25} \cdot 1 = \frac{64}{25}$$

Durch: $\angle KSD = \arcsin \frac{3}{5}$; $\sin \alpha = \frac{60}{25}$

16

а) Поскольку радиусы OA и OB равны, то $\triangle AOB$ равнобедренный. Так как $\angle AOB = 100^\circ$, то $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$. Так как $OC \perp AB$, то $\angle AOC = \angle BOC = 50^\circ$. Так как $OC \perp AB$, то $\angle AOC = \angle BOC = 50^\circ$. Так как $OC \perp AB$, то $\angle AOC = \angle BOC = 50^\circ$.

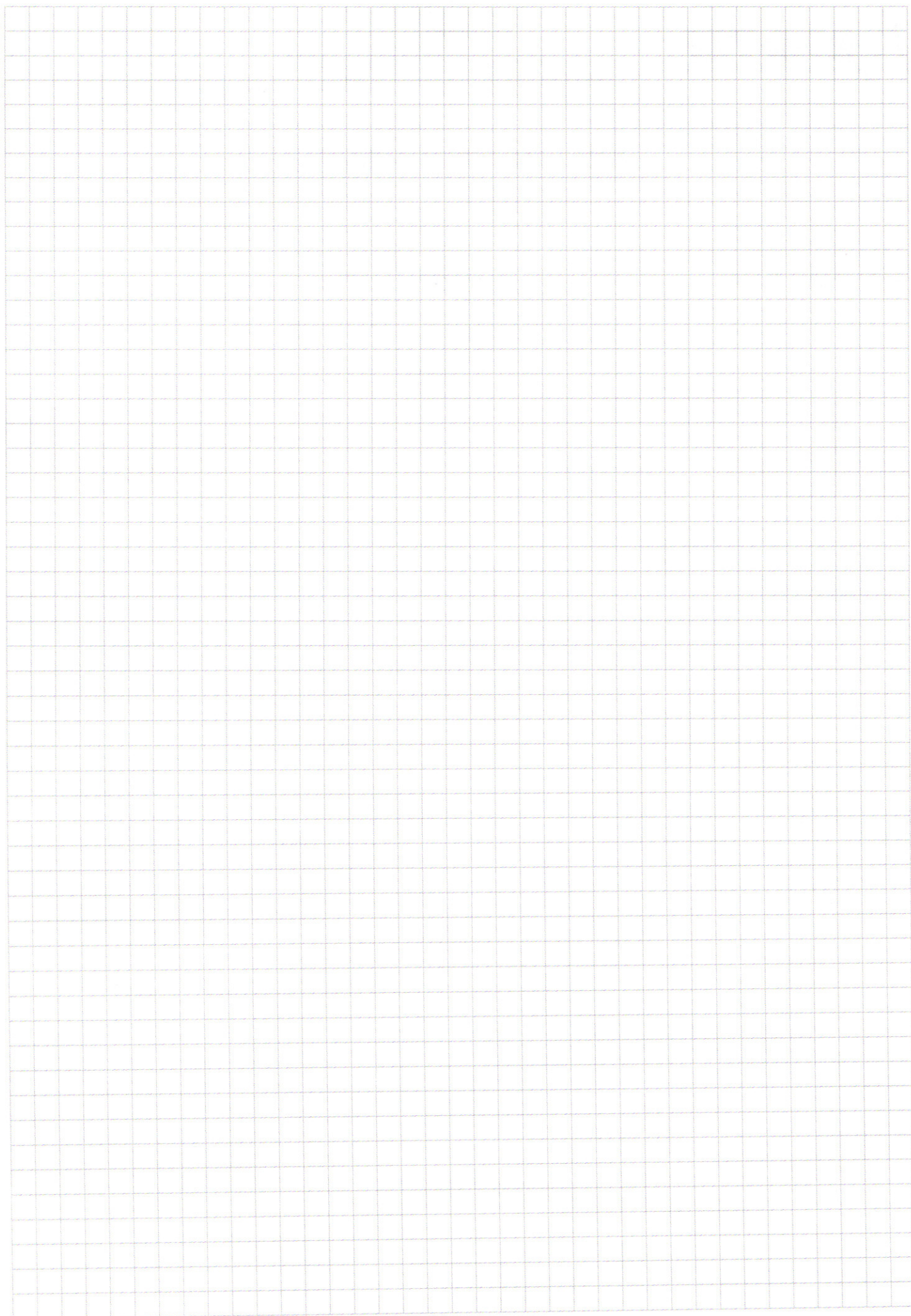


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y < 76 + 2(2^{3x} - 1)2^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y < 2^2 \cdot 10 + x \cdot 2^{3x} - 2x \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

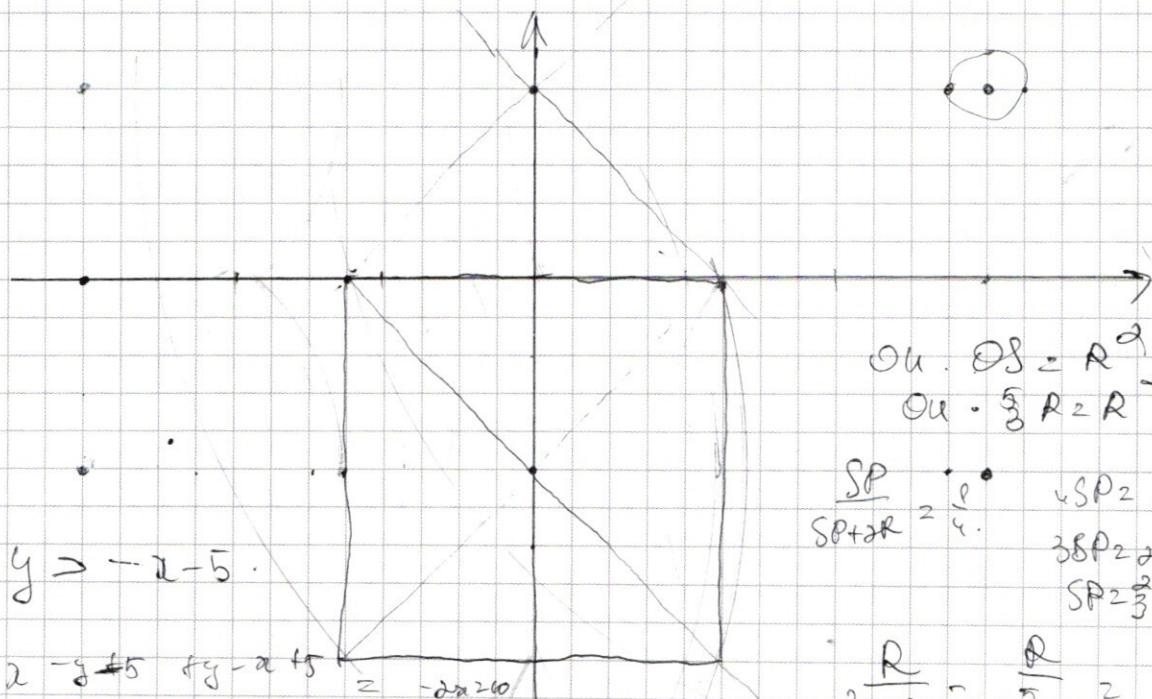
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+5| + |y-x+5| \geq 10$
 $(|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a$

№5

$-x-y-5$
 $-y-x+5$
 $-2y$
 $-10=10$
 $y = -10$



$OU \cdot OS = R^2$
 $OU = \frac{1}{3} R^2 = R^2$

$\frac{SP}{SP+2R} = \frac{1}{4}$
 $4SP = SP+2R$
 $3SP = 2R$
 $SP = \frac{2}{3} R$

$\frac{R}{\frac{2}{3}R+R} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$

$\sqrt{25} + 25 = \sqrt{71}$
 $(|5|-2)^2 + (|-10|$

$\frac{2}{3} + \frac{10}{5} = \frac{10+9}{15}$
 $\frac{12}{15} + \frac{18}{15} = \frac{30}{15} = 2$

$\frac{25}{15} - \frac{2}{15} = \frac{16}{15}$

№6

$\frac{a}{u_1, u_2, u_3} = \frac{b}{\sin \alpha}$
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$

$a \sqrt{2} \geq 10$
 $\sqrt{2} \geq \frac{10}{a}$

$\frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$
 $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$\frac{AC}{AP} = \frac{AD}{PD}$
 $\frac{a}{b} = \frac{b+BC}{BC}$
 $\frac{a}{b} = \frac{b+BC}{BC}$

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$\frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$
 $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

$a^2 + b^2 \geq 2a^2 - 2ab + b^2 + b^2$
 $a^2 + b^2 \geq 2a^2 - 2ab + 2b^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = (M1)$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$22 \cdot 343$$

$$3 \cdot 343$$

$$343 = 3 \cdot$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 09 \end{array}$$

$$3$$

$$3432 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$402$$

$$3, 7'' \quad 1) 2 \text{ no } 6'' \quad 2) 9 \text{ u } 3.$$

$$2) 8 \text{ no } 6'' \quad 3) 9 \text{ u } 3.$$

$$3) 8 \text{ no } 6'' \text{ u } 1 \text{ no } 3''$$

$$77733311$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{8! \cdot 3! \cdot 2!} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 56 \\ \hline 280 \\ 560 \\ \hline 584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 12} \\ \underline{12} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = 9 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 8 \cdot 10$$

$$5040$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{3! \cdot 3!} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\sin 92 \sin 52 + 2 \sin 72 \cos 22$$

$$\cos 92 - \cos 52 - 2 \sin 22 \sin 72$$

(M2)

$$\cos 92 - \cos 52 - \sqrt{2} \cos 42 + \sin 92 + \sin 52 = 0$$

$$\cos 92 + \cos 52 \cos 42 - \sin 52 \sin 42$$

$$\sin 92 = \sin 52 \cos 42 + \cos 52 \sin 42$$

$$\cos 92 (\cos 42 - 1) - \sin 52 \sin 42 - \sqrt{2} \cos 42 + \sin 52 \cos 42 + \cos 52 \sin 42 + \sin 52 = 0$$

$$\cos 42 = \cos 22 - \sin 22$$

$$2 \cos 22 \sin 72 (2 \cos 22 - \sin 22) = \sqrt{2} \cos 42$$

$$2\sin 7a (\cos 2a - \sin 2a) = \sqrt{2} (\cos 2a - \sin 2a) (\cos 2a + \sin 2a).$$

$$(\cos 2a - \sin 2a) (2\sin 7a - \sqrt{2} \cos 2a - \sqrt{2} \sin 2a) = 0.$$

$$2\sin 7a - \sqrt{2} \cos 2a - \sqrt{2} \sin 2a = 0. \quad \cos 2a + \sin 2a =$$

$$= 2\sin 7a - 2\sin \left(\frac{7a - 2a - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} \cos 2a + \sqrt{2} \sin 2a}{2} = 2\sin \left(\frac{5a}{2} - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$= 2\sin \left(\frac{5a}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{3a}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \quad \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{5a}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} \quad \frac{5}{4} \cdot \frac{a}{2} = \pi$$

(13)

$$(2^x y)^{\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}.$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$y^2 - 2y - 2x^2 + 8x - 4y = 0.$$

$$D = (x+4)^2 + 8x^2 - 32x =$$

$$2x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 10x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 - (3x-4)}{2} = \frac{-2x+8}{2} = 4-x.$$

$$y_{2,2} = \frac{x}{2} = 2x.$$

$$(y+x-4)(y-2x) = 0.$$

$$\begin{cases} y = -x+4 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(16x^6)^{\ln x} = 2x^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$x^2 \cdot 16x^4 = 16x^6.$$

$$-\ln x \ln(16x^6) = \ln(\frac{2x}{x^2}) \ln 2x.$$

$$-\ln x (4\ln 2 + 6\ln x) = (\ln 2 - 6\ln x)(\ln 2 + \ln x).$$

$$-4\ln x \ln 2 - 6\ln^2 x = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 6\ln x \ln 2 - 6\ln^2 x.$$

$$2\ln x \ln 2 - \ln^2 2 = 0. \quad (\ln 2)(\ln 2 - \ln x) = 0.$$

$$\ln 2 = 2. \quad y = 4.$$

$$x^2(4-x)^4 = y(4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2})}$$

$$y = -x+4.$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2(4-x)^4 = \ln(4-x)(\ln(4-x) - 7\ln x).$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln(4-x)) = \ln(4-x)(\ln(4-x) - 7\ln x).$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 7\ln x \ln(4-x).$$

$$\ln^2(4-x) \quad \ln(4-x) = 2.$$

$$8+1-$$

$$\ln_x(4-x) = 1.$$