

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 + \underbrace{5+5}_{10} + \underbrace{5+5}_{10} + \underbrace{6+6}_{12} = 23 + 12 = 35! : 2 \approx 17 - 18$$

$$\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{6} \times \cancel{7} \times \cancel{8} \times \cancel{9}$$

①  $abcde fgh$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261$$

$$\begin{aligned} 9261 &= 3 \cdot 3087 = 3^3 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = \\ &= 3^3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3 \end{aligned}$$

$$1) 9 + 2 + 6 + 1 = 12 + 6 = 18$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 26 \phantom{00} \\ \underline{24} \phantom{00} \\ 21 \phantom{00} \\ \underline{21} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{3} \phantom{00} \\ 087 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \\ 87 \phantom{00} \\ \underline{87} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ \times 441 \\ 21 \\ \hline 441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$

ABB

ABB  
ABB  
BAB  
BAB  
BBA  
BBA

A-1  
B-2

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$\frac{3!}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ 30 \phantom{00} \overline{) 1029} \overline{) 3} \\ \underline{30} \phantom{00} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 27 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{27} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 63 \phantom{00} \times 7 \\ \underline{63} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 6} \\ 34 \\ \times 32 \\ \times 7 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} 3 - 0 + 1 &= 4 \\ 3 - 0 + 1 &= 4 \end{aligned}$$

~~16~~

$$9261 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Цифрок-3

Символ-3, Длина-8

Единиц-2

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 10 \cdot 8 \cdot 7 =$$

$$= 2240$$

A-3  
B-4

BAAA  
ABAA  
AABA  
AAAB

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\frac{4!}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = 8$$

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

A-4  
B-1

BAAAA  
ABAAA  
AABAA  
AAABA  
AAAAA

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 = \\ &= 16 \cdot 35 = 560 \end{aligned}$$



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$t = 5x, y = 4x$$

$$\sin(t+y) + \cos(t+y) + \sin t - \cos t - \sqrt{2} \cos y = 0$$

$$\cancel{\sin t \cos y} + \cancel{\cos t \sin y} + \cancel{\cos t \cos y} - \cancel{\sin t \sin y} - \cos t + \sin t - \sqrt{2} \cos y = 0$$

$$2 \sin \frac{(t+y)}{2} \cos \left( \frac{y}{2} \right) - 2 \sin \left( \frac{2t+y}{2} \right) \sin \left( \frac{y}{2} \right) + \sin t - \cos t = 0$$

$$2 \sin \left( t + \frac{y}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{y}{2} \right) - \sin \left( \frac{y}{2} \right) \right) + \sin t - \cos t - \sqrt{2} \cos y = 0$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left( \frac{y}{x^7} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{обз: } 1^\circ x > 0$$

$$2^\circ \frac{y}{x^7} > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\boxed{x, y > 0}$$

$$y^2 - 4y + 4 - 2(x^2 - 4x + 4) + 4 - xy$$

$$\begin{aligned} e^{\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x)} &= e^{\ln y \cdot \ln \left( \frac{y}{x^7} \right)} \\ -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) &= \ln y \ln \left( \frac{y}{x^7} \right) \end{aligned}$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (x+4)^2 - 4 \cdot 2x^2 - 4 \cdot 8x = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 4 \cdot 8x = \\ &= 9x^2 - 3 \cdot 4 \cdot 2x + 16 = (3x-4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{+(x+4) \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} \frac{x+4+3x-4}{2} = \frac{4x}{2} = 2x \\ \frac{x+4-3x+4}{2} = 4-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ y = 2x &\Rightarrow (x^6)^{-\ln x} = x \ln \left( \frac{1}{x^7} \right) \\ x^{-6 \ln x} &= x \ln(x^{-6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} &= (2x)^{\ln \left( \frac{2x}{x^7} \right)}, & 1^\circ y = 2x & \\ (2 \cdot x^6)^{-\ln x} &= (2x)^{\ln(2 \cdot (x^{-6}))} & & \\ (2x^2)^{-4 \ln x} &= (2x)^{\ln(2x^{-6})} & & \end{aligned}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2x^2)^{-4 \ln x} = (2x^2)^{-6 \ln(2x)} \quad (2x^2)^{-4 \ln x} = (2x)^{\ln(2x^{-6})}$$

$$2x^{\ln(2x)} = e^{-4 \ln(2x^2) \ln x} = e^{\ln(2x) \ln(2x^{-6})}$$

$$-4 \ln x (\ln 2 + \ln x^2) = (\ln 2 + \ln x) \cdot (\ln 2 + \ln x^{-6})$$

$$-4 \ln 2 \ln x - 4 \ln x \cdot 2 \ln x = \ln 2 + \ln x \ln 2 + \ln 2 \cdot (-6 \ln x) - 6 \ln^2 x$$

$$\text{Пусть } \ln 2 = y, \ln x = t$$

$$-4yt - 8t^2 = y^2 + t \cdot y + y \cdot t \cdot (-6) - 6t^2$$

$$2t^2 - ty + y^2 = 0, \Delta = y^2 - 4 \cdot 2y^2 = -7y^2 < 0$$

$$2^0 y = 4 - x$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \left( \frac{4-x}{x^7} \right)}$$

$$e^{\ln(x^2(4-x)^4) \cdot \ln x} = e^{\ln(4-x) \cdot (x^{-7}) \cdot \ln(4-x)}$$

$$-\ln x (\ln x^2 + \ln(4-x)^4) = \ln(4-x) \cdot (\ln(4-x) + \ln x^{-7})$$

$$\text{Пусть } \ln x = t, \ln(4-x) = y$$

$$-t(2t + 4y) = y(y - 7t), -2t^2 - 4yt = y^2 - 7ty$$

$$y^2 - 3ty + 2t^2 = 0, \Delta = 9t^2 - 8t^2 = t^2$$

$$y = \frac{3t \pm t}{2} = \begin{cases} 2t \\ t \end{cases}$$

$$1^0 \ln(4-x) = \ln x$$

$$4 - x = x$$

$$x = 2$$

$$2^0 \ln(4-x) = \ln x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0, \Delta = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2,5$$



$$\sin 9x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) + \sin 5x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{(9x + \frac{\pi}{2} - 9x)}{2} \cdot \cos \frac{(9x - \frac{\pi}{2} + 9x)}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{(5x - \frac{\pi}{2} + 5x)}{2} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

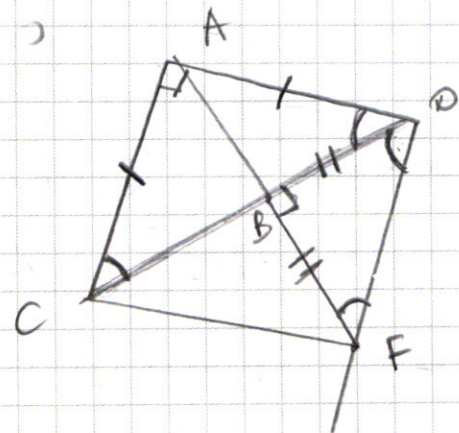
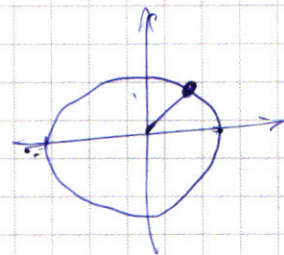
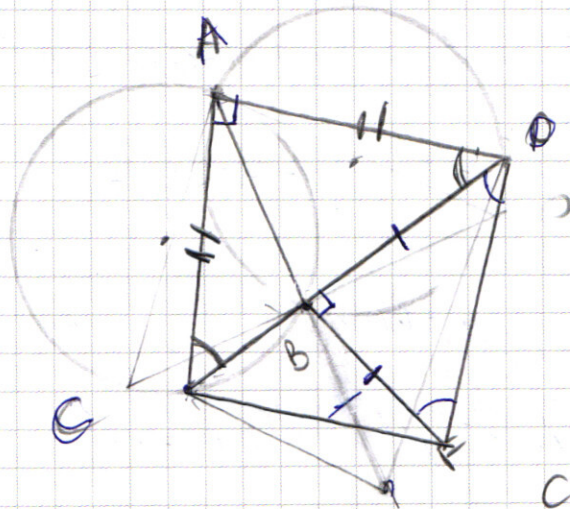
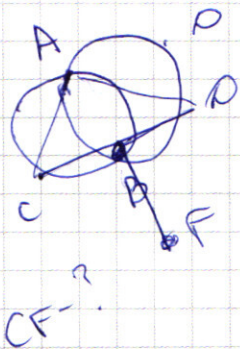
$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 4x}{2}\right) \sin\left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos \dots = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\right) = 0$$



$$1y = 0 \quad (1 \times 1 - 12) + 25 = 0$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$CB = 2R \sin \alpha$$

$$BD = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{CB}{BD} = \tan \alpha, \quad \frac{CB}{BF} =$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AD}{\sin \alpha} =$$

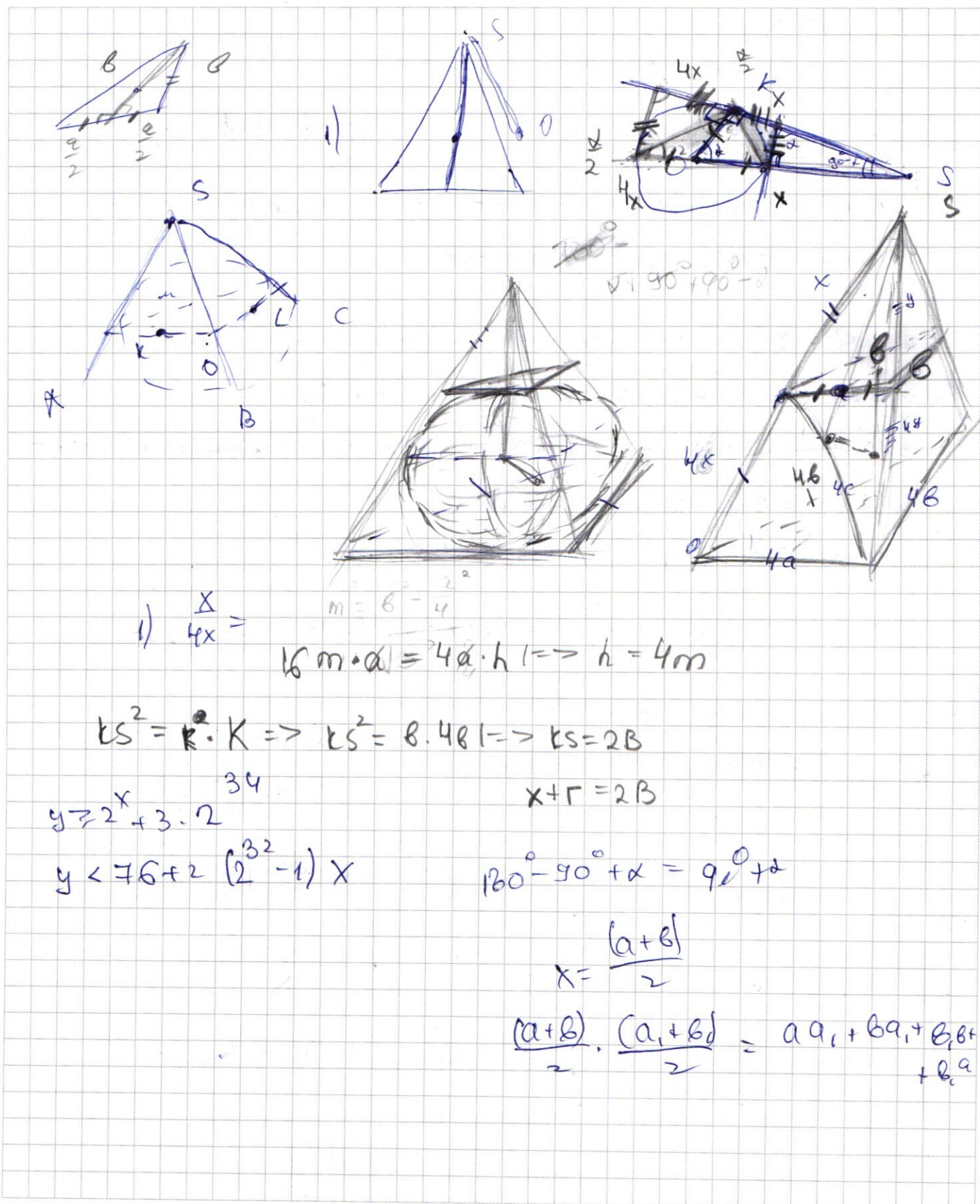
$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$AB = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} R$$

$$\frac{CB}{\sin 45^\circ} = 2R$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1)  $\frac{x}{4x} =$

$m = 8 - 4$

$16m \cdot a = 4x \cdot h \Rightarrow h = 4m$

$LS^2 = K \cdot K \Rightarrow LS^2 = 8 \cdot 48 \Rightarrow LS = 2B$

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$x + \gamma = 2B$

$160^\circ - 90^\circ + x = 90^\circ + x$

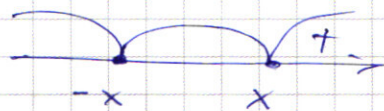
$x = \frac{(a+b)}{2}$

$\frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{(a+b)}{2} = aa_1 + ba_1 + b_1b_1 + b_1a_1$



$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

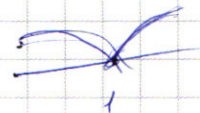
$$|y+5+x| + |y+5-x| = 10$$



$$1^{\circ} \begin{cases} y+5 \geq x \\ y+5+x+y+5-x=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+5 \geq x \\ y=0 \end{cases} \quad x \leq 5$$

$$( |x|-12 )^2 + 25 = a$$

$$|a-144| + |a+25|$$



$$x^2 - 12|x| + 144 + 25 - a = 0, \quad x^2 - 12|x| + 169 - a = 0$$

$$\Delta = 144x^2 - 4 \cdot 169 + 4a > 0$$

$$(x+y+5)^2 - 2|y+5+x| \cdot |y+5-x| + (y+5-x)^2 = 100$$

$$(x+y+5)^2 - 2x(y+5) - 2(y+5)^2 + x^2 + (y+5-x)^2$$

$$(y+5)^2 + 2x(y+5) + x^2 - 2(y+5)^2 + x^2 + (y+5-x)^2 - 2x(y+5) + x^2 = 0$$

$$2(y+5)^2 + 2x^2 - 2((y+5)^2 - x^2) = 0$$

$$(y+5)^2 + x^2 - (y+5)^2 + x^2 = 0 \Rightarrow x=0$$

$$|y+5| + |y+5| = 10 \Rightarrow |y+5| = 5 \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -10 \end{cases}$$

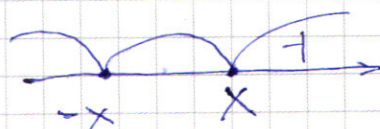
$$x^2 - 12|x| + 144 + y^2 - 10|y| + 25 = a$$

$$x^2 - 12|x| + 169 + y^2 - 10|y| - a = 0$$

$$1) a = 12^2 + 5^2 = 13^2$$

$$2) a = 12^2 + 5^2 = 13^2$$

$$2(y+5)^2 + 2x^2 - 2(y+5)^2 + x^2$$

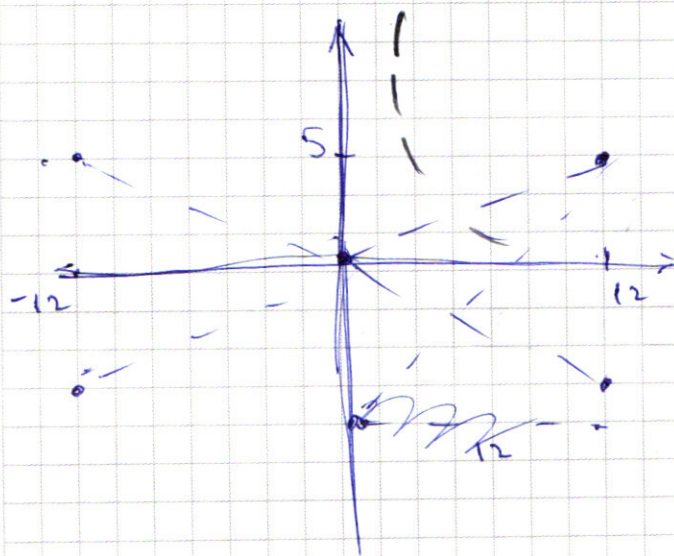


$$(y+5)^2 + x^2 \pm ((y+5)^2 - x^2) = 50$$

$$x = \pm 5$$

$$y = -10, 0$$

$$10+y$$





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N°1) 1)  $9261 = 3 \cdot 3087 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3$

2) П.К. пр-ние цифр в-мизнач. числа  $> 0$ , то  
в числе нет цифр 0

3) Из канон. разлож-я числа 9261 следует, что  
искомые в-мизнач. числа сост. из трех 3, трех 7  
и две 1

4) П.е. мы переставляем 8 элементов из 3  
разных видов

5) получаем (число) в-мизнач. чисел, пр-ние  
цифр к-х равна 9261:

$$n = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 56 \cdot 10 = 560$$

Ответ: количество  $n = 560$

(N°2)  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\sin 9x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - 9x \right) + \sin 5x - \sin \left( \frac{\pi}{2} - 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x + \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) + 2 \sin \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$2 \sin \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \right) = 0$$



$$1^0 \sin\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} //$$

$$2^0 \cos\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{13x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{13x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} - \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{13x-\frac{\pi}{4}}{2}\right] : 2\right) \cdot \sin\left(\left[\frac{\pi}{2} - \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{13x-\frac{\pi}{4}}{2}\right] : 2\right) = 0$$

I суч.

$$\left[\frac{\pi}{2} + \frac{13x-\frac{\pi}{4}-5x+\frac{\pi}{4}}{2}\right] : 2 = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + 4x = \pi + 2\pi m \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2} //$$

$$\text{II суч.} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{4} - 5x - 13x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) : 2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 9x = 2\pi k \Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{9} //$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{9}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2} \quad k, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{N}^{\circ} 3 \quad \nabla y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$\Delta = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 4 \cdot 8x = 9x^2 - 3 \cdot 8x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{-(x+4) \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ 4-x \end{cases}$$

$$1^0 y = 2x \Rightarrow (x^2 (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$$

$$(2^4 x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2 \cdot x^{-6})}$$

$$e^{-\ln(2^4 \cdot x^6) \cdot \ln x} = e^{\ln 2x \cdot \ln(2x^{-6})}$$

$$-\ln x (\ln 2^4 + \ln x^6) = (\ln 2 + \ln x)(\ln 2 + \ln x^{-6})$$

$$-4 \ln x \ln 2 - 6 \ln^2 x = \ln^2 2 + \ln x \ln 2 - 6 \ln x \ln 2 - \ln^2 x \cdot 6 \quad | : \ln 2$$

$$-4 \ln x = \ln 2 + \ln x - 6 \ln x \Rightarrow \ln x = \ln 2 \Rightarrow x = 2, y = 4 //$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 2^{\circ} \quad y = 4-x &\Rightarrow (x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) \cdot x^{-7}} \\
 e^{-\ln x \cdot \ln(x^2(4-x)^4)} &= e^{\ln(4-x) \cdot \ln((4-x) \cdot x^{-7})} \\
 -\ln x (\ln x^2 + \ln(4-x)^4) &= \ln(4-x) \cdot (\ln(4-x) + \ln x^{-7}) \\
 -2\ln^2 x - 4\ln x \cdot \ln(4-x) &= \ln^2(4-x) - 7\ln x \cdot \ln(4-x) \\
 2\ln^2 x - 3\ln x \cdot \ln(4-x) + \ln^2(4-x) &= 0 \\
 0 = 9\ln^2(4-x) - 8\ln^2(4-x) &= \ln^2(4-x) \\
 \ln x = \frac{+3\ln(4-x) \pm \ln(4-x)}{4} &= \begin{cases} \ln(4-x) \\ \frac{\ln(4-x)}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

I случай:  $\ln x = \ln(4-x) \Rightarrow x = 4-x \Rightarrow x = 2, y = 2 //$

II случай:  $2\ln x = \ln(4-x) \Rightarrow x^2 = 4-x$

$$x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0, D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ОДЗ:  $(\ln x) \neq 0, x > 0$   $2^{\circ} \frac{y}{x^7} > 0$ , но  $x > 0 \Rightarrow y > 0$ , поэтому

$x$  и  $y > 0$ , т.е. вынесем степени (четной)

в логарифме модуль раскр. с плюсом.

из ОДЗ  $\Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \notin \text{ОДЗ}$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0 \Rightarrow y = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

Ответ:  $(2, 2), \left( \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$



№5

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x+y+5)^2 + 2|x+y+5||y+5-x| + (y+5-x)^2 = 100$$

$$2(y+5)^2 + 2x^2 + 2|x+y+5||y+5-x| = 100$$

$$(y+5)^2 + x^2 + |x+y+5||y+5-x| = 50$$

$$1^\circ y+5 \geq x$$

$$(y+5)^2 + x^2 + (y+5)^2 - x^2 = 50$$

$$(y+5)^2 = 25 \Rightarrow y+5 = \pm 5 \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -10 \end{cases}$$

I сл.

$$(y+5)^2 + x^2 + (y+5)^2 - x^2 = 50$$

$$(y+5)^2 = 25 \Rightarrow y+5 = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -10 \end{cases}$$

II сл.

$$(y+5)^2 + x^2 - (y+5)^2 + x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm 5$$

№4

1) Представим, что сфера впис. в тетра. (SABC), тогда по усл.  $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$ ,

но эти тр. находятся в парал.

л-тах  $\Rightarrow$  они подобны

$$K = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

2)  $KS \cap A_1B_1 = M$  и

$O_1$  - центр впис. окр.  $\Delta A_1B_1C_1$

тогда  $\Rightarrow SO$  проходит  $\frac{4}{3} O_1$ ,  $SO \perp (A_1B_1C_1)$

$OM \perp A_1B_1$  (по т. о 3-х перп.)

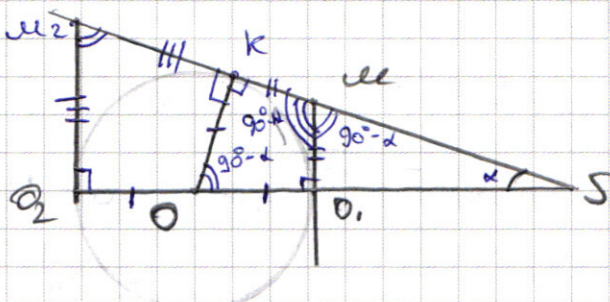
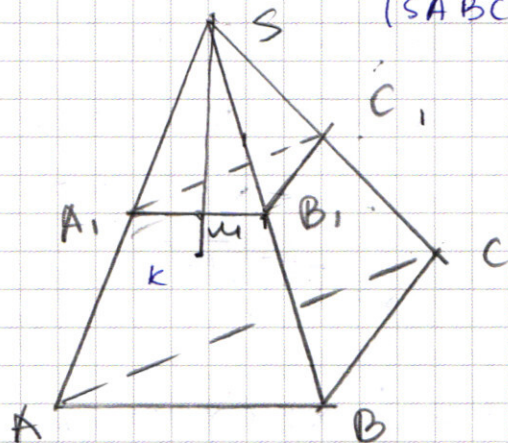
$O_1M \perp SO \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$  - р.б.

3) сечение л-тью  $KLM$

будет находиться /м/ду

$\Delta ABC$  и  $\Delta A_1B_1C_1$  и каждая сторона  $\Delta KLM$  будет лв.

ср. линией для т-ции, обр. сторонами  $\Delta ABC$  и  $\Delta A_1B_1C_1$ ,





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 а)  
1)  $\angle ACO = \angle AOC$   
(т.к. при пересеч. дуг  
равных дуги)  $\Rightarrow AC = AO$ ,  
 $\angle ACO = \angle AOC = 45^\circ$

2)  $BO = BF \Rightarrow \angle BOF = \angle BFO = 45^\circ$

3) по т.к. синусов

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BO}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{CB}{BO} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ т.к.}$$

$$\frac{CB}{BF} = \operatorname{tg} \beta \text{ и } BF = BO \Rightarrow \alpha = \beta$$

4)  $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$

$$\angle BCF = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ACB \pm \angle BCF = 45^\circ$$

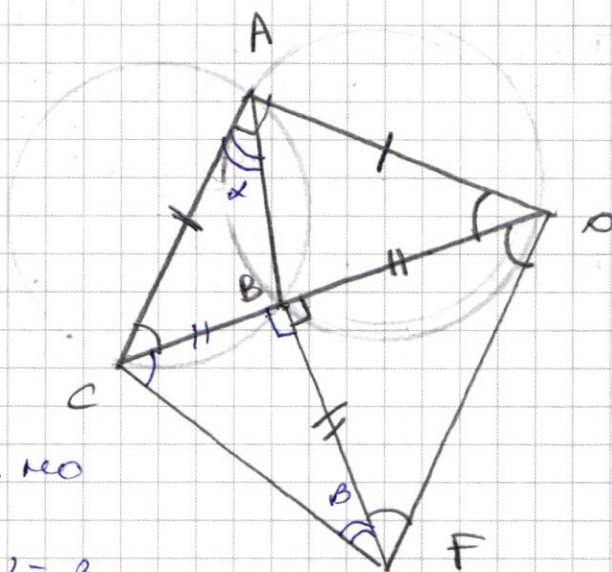
$$\angle ACF = 90^\circ \Rightarrow ACF \text{ — кв.}$$

$$CF = AO = CB = AB$$

$$5) \frac{CB}{\sin 45^\circ} = 2R = \frac{CF}{\sin 45^\circ}$$

$$CF = 2R \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} //$$

$$6) S_{\triangle ACF} = 2 S_{\triangle ACB} = 2 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot AB = 12 \cdot 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 120\sqrt{2} //$$





№ 5

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x+y+5)^2 + 2|x+y+5||y+5-x| + (y+5-x)^2 = 100$$

$$2(y+5)^2 + 2x^2 + 2|x+y+5||y+5-x| = 100$$

$$(y+5)^2 + x^2 + |x+y+5||y+5-x| = 50$$

I cu.

$$(y+5)^2 + x^2 + (y+5)^2 - x^2 = 50$$

$$(y+5)^2 = 25 \Rightarrow y = \begin{cases} 0 \\ -10 \end{cases}$$

II cu.

$$(y+5)^2 + x^2 - (y+5)^2 - x^2 = 50$$

$$x = \pm 5$$