

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$, откуда следует, что все эти числа состоят из ровно 3 семерок, либо 3 тройки, либо 1 тройка и 1 девятка, а остальные единицы. Рассмотрим случай с 3 тройками. Количество способов расставить три семерки $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ по 8 разрядам, после чего останется 5 разрядов куда нужно поставить 3 тройки и количество способов это сделать $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$, остальные места занимают единицами $\Rightarrow$ в случае с 3 тройками $56 \cdot 10 = 560$ восьмизначных чисел. В случае с 1 тройкой и 1 девяткой, сначала расставим 3 семерки по 8 разрядам $C_8^3 = 56$ способами, затем 5 способов выбрать место для тройки, и способов для девятки, а остальные займем единицами, итого во втором случае ровно $56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ чисел, отличающихся от первого, значит всего $560 + 1120 = 1680$ восьмизначных чисел с произведением цифр 9261. Ответ: 1680

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\left(\sin 9x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 9x \sin \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 5x \sin \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x \right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - 2 \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \left(\sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

~~Итак, имеем три семейства корней~~ ~~при нахождении их~~ ~~ра~~! Заметим, что

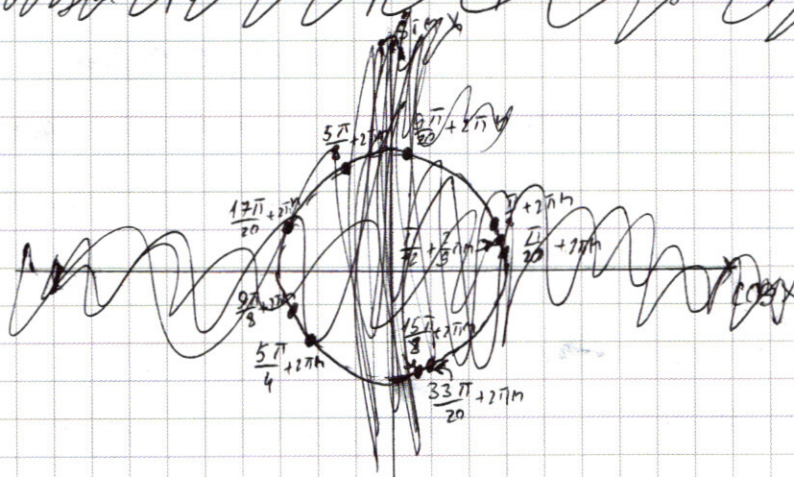
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

встречается 5 раз

на числовой ~~линии~~ ~~крупе~~ ~~крупе~~:

$$\frac{\pi}{20} + 2\pi m, \frac{9\pi}{20} + 2\pi m, \frac{17\pi}{20} + 2\pi m,$$

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi m, \frac{33\pi}{20} + 2\pi m$$



$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \text{ встречается 4 раза: } \frac{\pi}{8} + 2\pi m, \frac{5\pi}{8} + 2\pi m, \frac{9\pi}{8} + 2\pi m, \frac{13\pi}{8} + 2\pi m$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi n \text{ встречается 9 раз: } \frac{\pi}{12} + 2\pi m, \frac{11\pi}{36} + 2\pi m, \frac{19\pi}{36} + 2\pi m, \frac{3\pi}{4} + 2\pi m,$$

$$\frac{35\pi}{36} + 2\pi m, \frac{43\pi}{36} + 2\pi m, \frac{51\pi}{36} + 2\pi m, \frac{59\pi}{36} + 2\pi m, \frac{67\pi}{36} + 2\pi m, \text{ заметим}$$

что кратных корней нет $\Rightarrow$ все три серии идут в ответ

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi m, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi n; m, k, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\underline{x > 0 \quad y > 0}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-2 \ln x}$$

$$y^{3 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$\ln(y^{3 \ln x}) = \ln(x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y})$$

$$3 \ln x \cdot \ln y = \ln x \cdot 2 \ln x + \ln y \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0 \quad | : \ln^2 x \quad \text{или} \quad \ln^2 x = 0$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 3\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right) + 2 = 0, \quad t = \frac{\ln y}{\ln x} = \log_x y$$

$$x = 1, \text{ при } \ln^2 x = 0,$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\ln^2 y = 0, \quad y = 1,$$

$$t = 1, \quad t = 2, \quad \log_x y = 1, \quad \log_x y = 2$$

что дает

$$x = y$$

$$\text{или } y = x^2, \quad x > 0, y > 0$$

входит в $x = y$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x > 0, y > 0$$

$$\begin{cases} x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0, y = x \\ x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0, y = x^2 \end{cases}$$

$$x > 0$$

$$x > 0$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 4x = 0, y = x \\ x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0, y = x^2 \end{cases}$$

$$x > 0$$

13. К. $x \neq 0$

$$\begin{cases} x=2, y=2 \\ x^3-x^2-6x+8=0, y=x^2 \\ x>0 \end{cases}$$

при $x=y$

$x=2$ проверим в $x^3-x^2-6x+8=0$

$$(x-2)(x^2+x-4)=0$$

$$y=x^2$$

$$x>0, y>0$$

$$(x-2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)=0$$

$$y=x^2$$

$$x>0, y>0$$

$$\begin{cases} x=2, x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \text{ а } x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

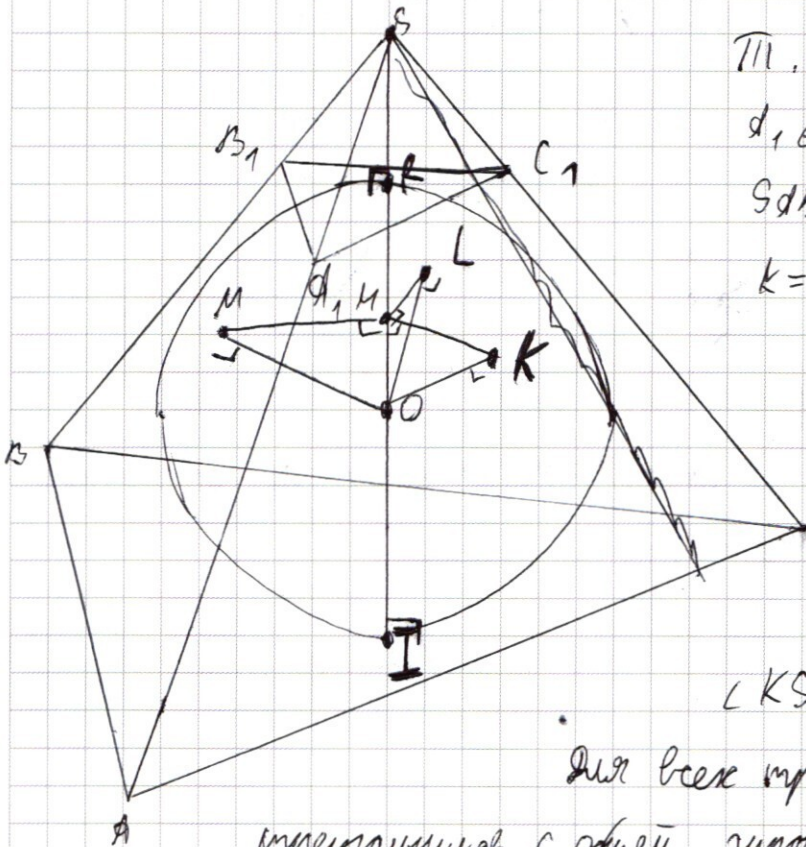
$$y=4, y=\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{17}+17}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; 2) (2; 4) \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-6x+8 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & \\ \hline x^2-6x & \\ x^2-2x & \\ \hline -4x+8 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x-2 \\ x^2+x-4 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Т.к. $SO \perp (d_1 B_1 C_1)$, $SO \perp (d_1 BC)$,

$d_1 \in Sd$, $B_1 \in SB$, $C_1 \in SC$

$SdBC \in Sd, B_1, C_1$; коэф. подобия

$k = \sqrt{\frac{S_{dBC}}{S_{d_1 B_1 C_1}}} = 4$, Пусть $SR = 2a$, тогда

$SI = 8a \Rightarrow RI = 6a \Rightarrow OR = OI = OK =$

$= OM = 3a$, $SO = SR + OR = 5a$

$\triangle SKO$ - прямоугольный, т.к.

$OK \perp (BSC) \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$.

Для всех трёх равных прямоугольных

треугольников с общей гипотенузой точка падения

высоты из прямого угла одна - $H \Rightarrow MH \perp OS$, $KH \perp OS \Rightarrow$

$(KLM) \perp SO$, откуда следует, что тетраэдр полученный

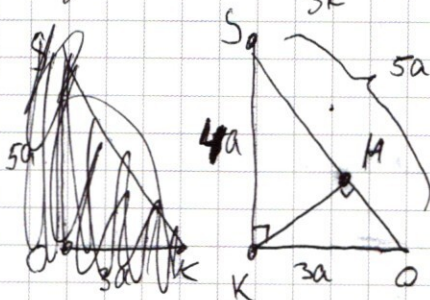
из точки S и сечения (KLM) подобен Sd, B_1, C_1 , с коэф.

подобия $k_1 = \frac{SH}{SR}$, $kH = \frac{4a - 3a}{5a} = \frac{1}{5}a$, $SH = \sqrt{(4a)^2 - (\frac{1}{5}a)^2} = \frac{16}{5}a \Rightarrow k_1 = \frac{\frac{16}{5}a}{2a} =$

$\frac{8}{5} \Rightarrow$ площадь искомого сечения

$S_x = (\frac{8}{5})^2 S_{d, B_1, C_1} = \frac{64}{25}$

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5} = \angle KSO$, $S_x = \frac{64}{25}$



N5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$|x+(y+5)| + |(y+5)-x| = 10$$

при $y+5 > x, y+5 > -x$

$$y+5 = 5$$

$$y = 0$$

при $y+5 \geq x, y+5 \leq -x$

$$x = -5$$

при $y+5 < x, y+5 < -x$

$$y+5 = -5$$

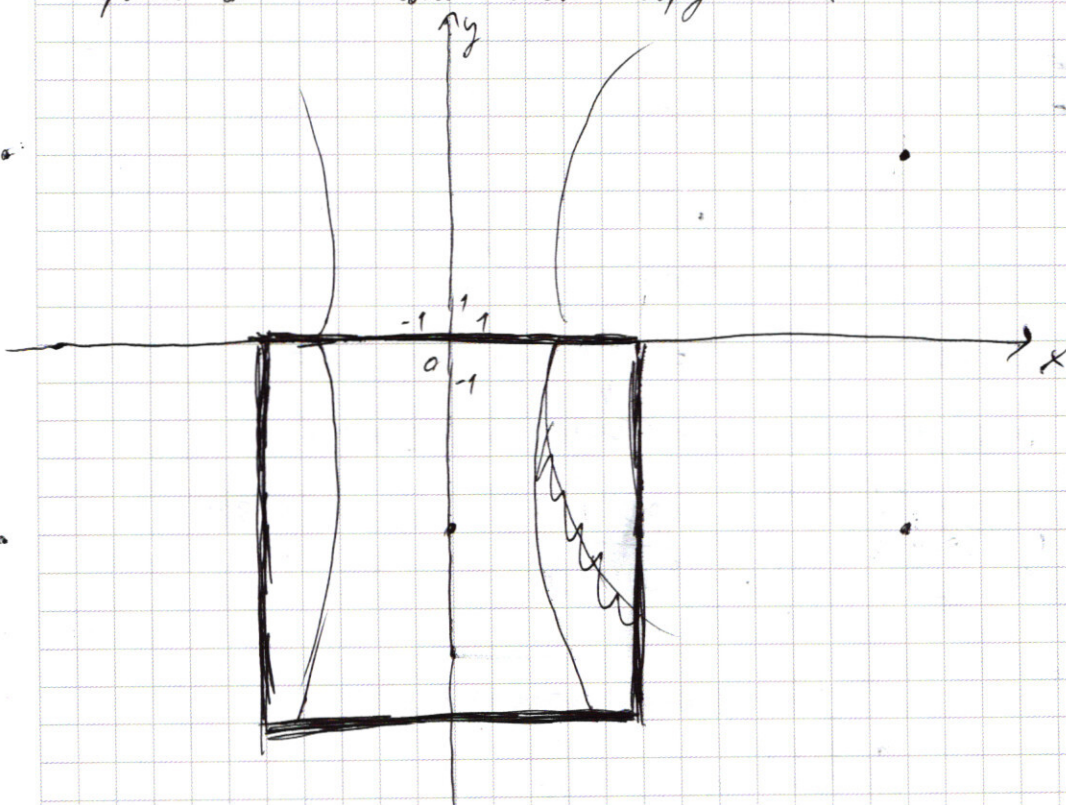
$$y = -10$$

при $y+5 \leq x, y+5 \geq -x$

$$x = 5$$

(центры (12; 5))

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ — окружность с радиусом $\sqrt{a}$ в первой четверти и три окружности в остальных четвертях симметричные первой относительно осей координат.



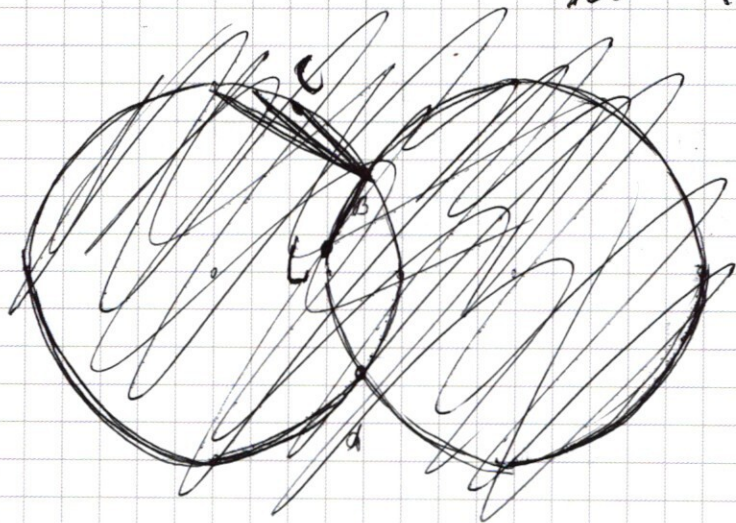
Заметим, что там, где окружности 1 и 2 четверти пересекают квадрат, там же его пересекают окружности 3 и 4 четвертей $\Rightarrow$ на них можно не смотреть. Когда окружность 3-ей четверти

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

пересекает квадрат в двух точках, окружность n -ой четверти может
пересекать квадрат в двух точках, кроме случая, когда они обе
пересекают его в точках $(0,0)$ и $(0,-10)$ в силу симметрии $y \Rightarrow$
или ~~никогда~~ подходит только случай, когда они касаются квадрата
 $\sqrt{a} = 12 - 5 = 7, a = 49$ и случай ~~оказавшийся~~ ^у больше $\sqrt{a} = \sqrt{12^2 + 5^2}, a = 169$,
в остальных случаях из окружностей ни не пересекает квадрат в
двух точках $a \in (49; 169)$ или не пересекает его вовсе $a \in [0; 49) \cup (169;$
 $+ \infty), a \geq 0 \Rightarrow$ Ответ: $49; 169$

Окружности не выходят за

пределы второй четверти, они
обе пересекут $(0,0)$ и $(0,-10)$,
т.к. их ~~абсцисса~~ ^{абсциссы} ~~-8~~
~~ордината~~ ^{ордината} -5 , а
абсцисса -12 и $+12$.





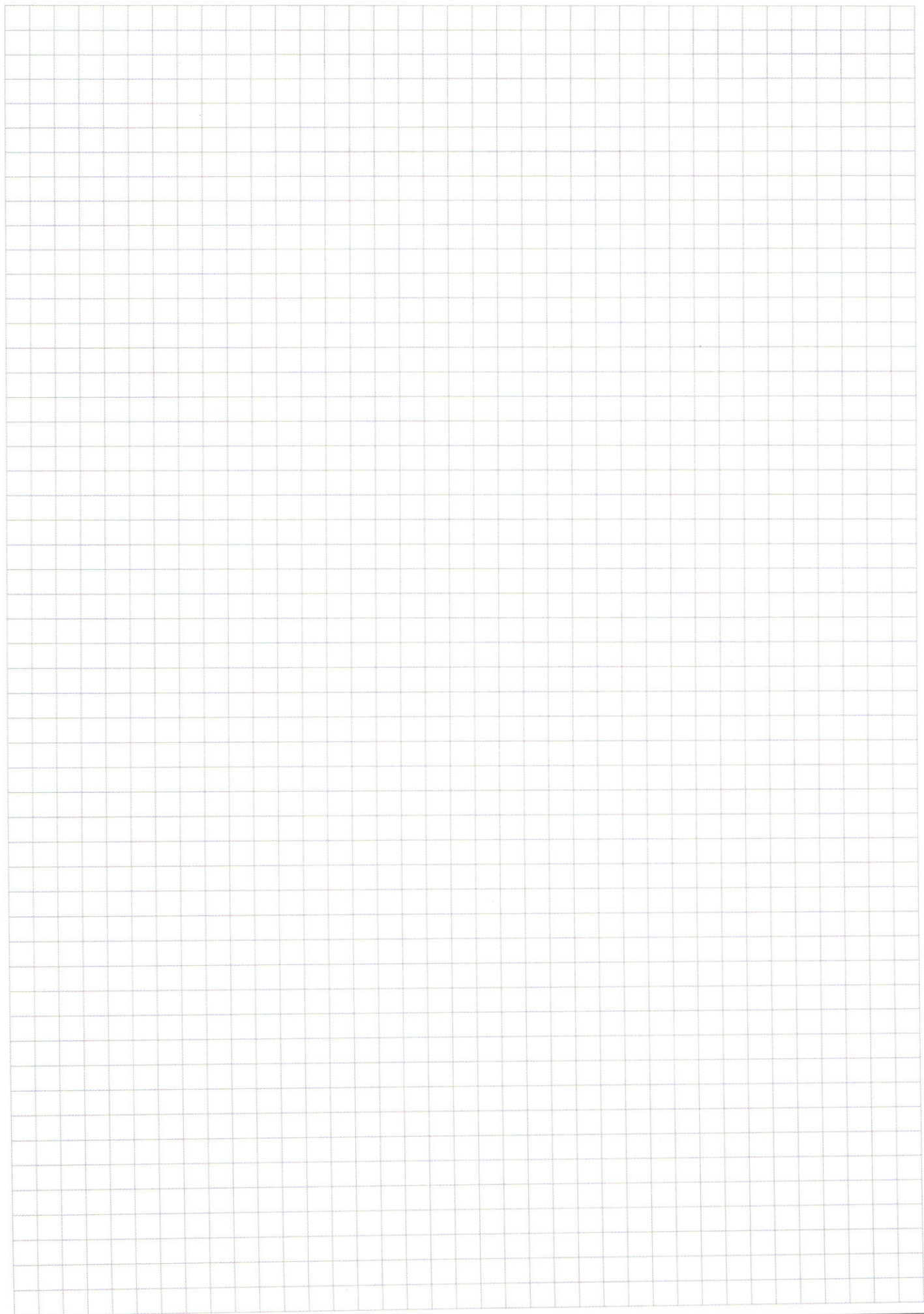
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

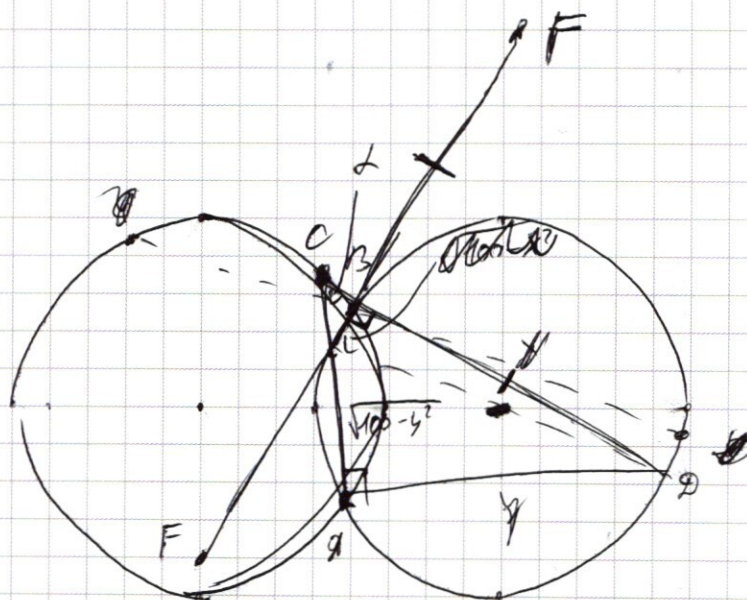
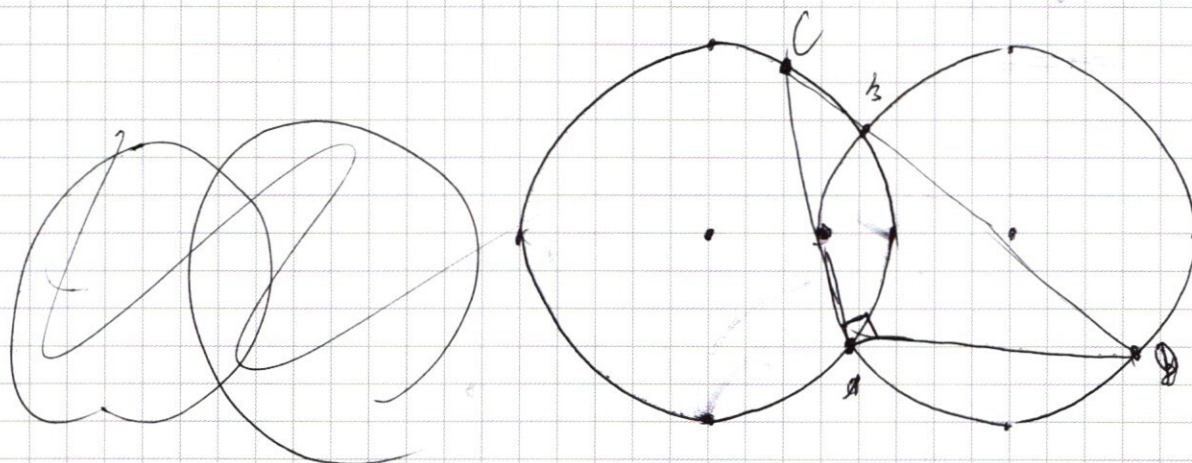
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AB = 20 \sin \angle$$

$$d\theta = CD \sin \angle$$

$$p_L = CL \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2407 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$|x+b| + |b-x| = 10$$

при $b > \cancel{x}$ $b > -x$

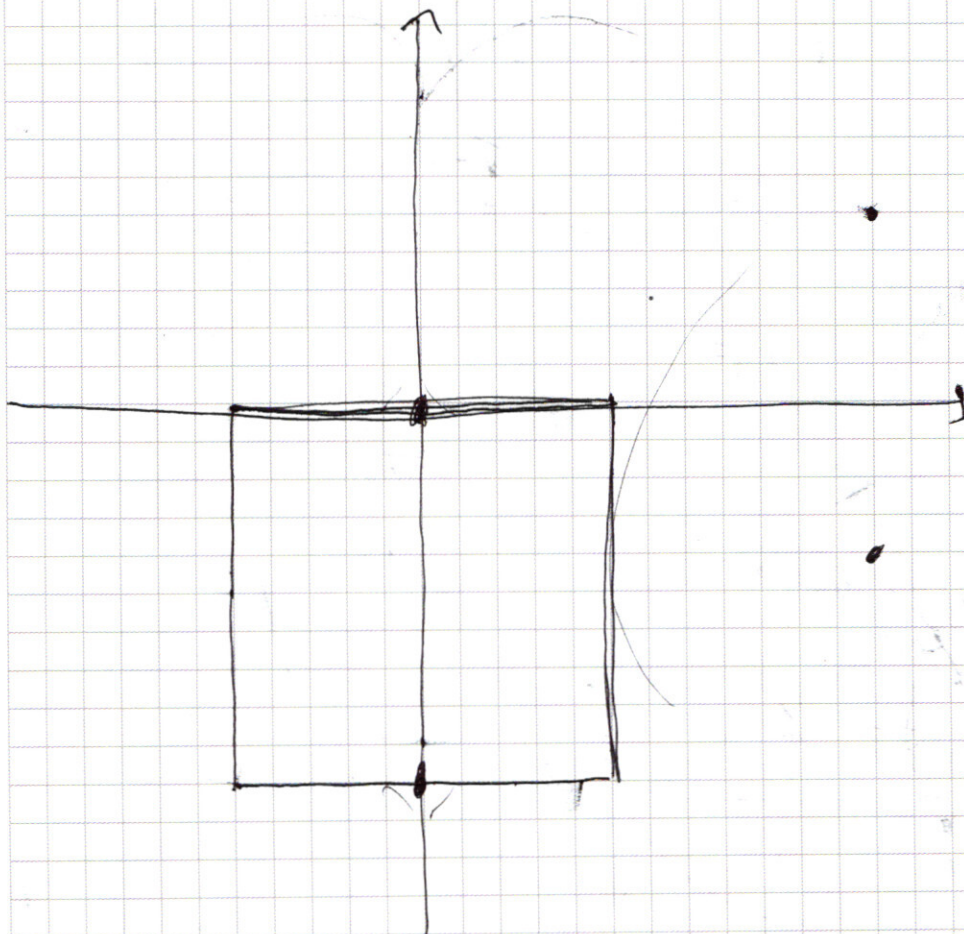
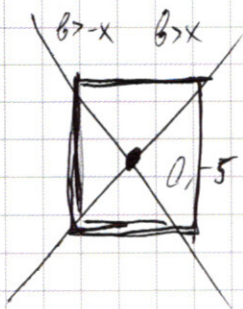
$$b = 5$$

$$b = 0$$

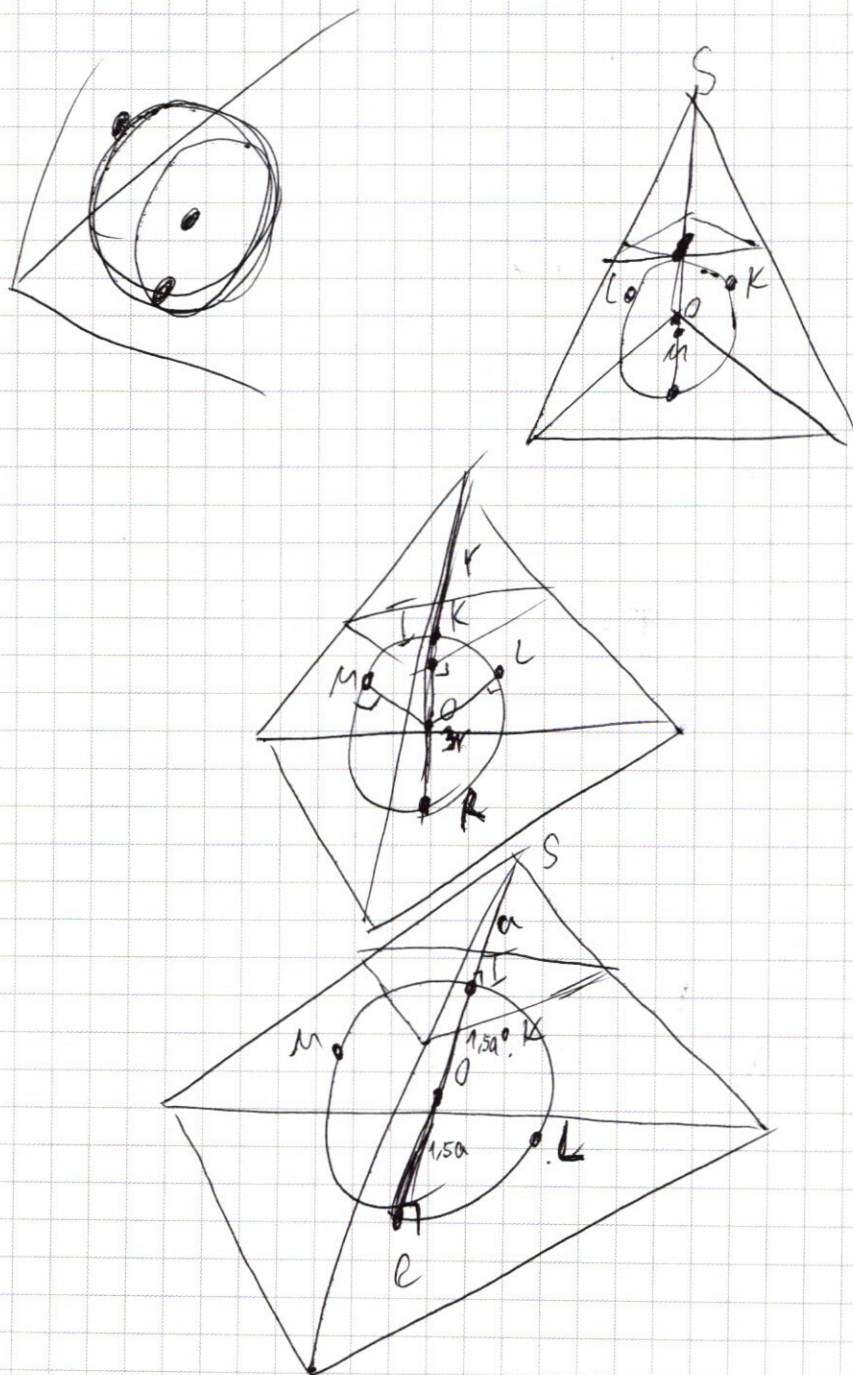
при $b < x$ $b < -x$

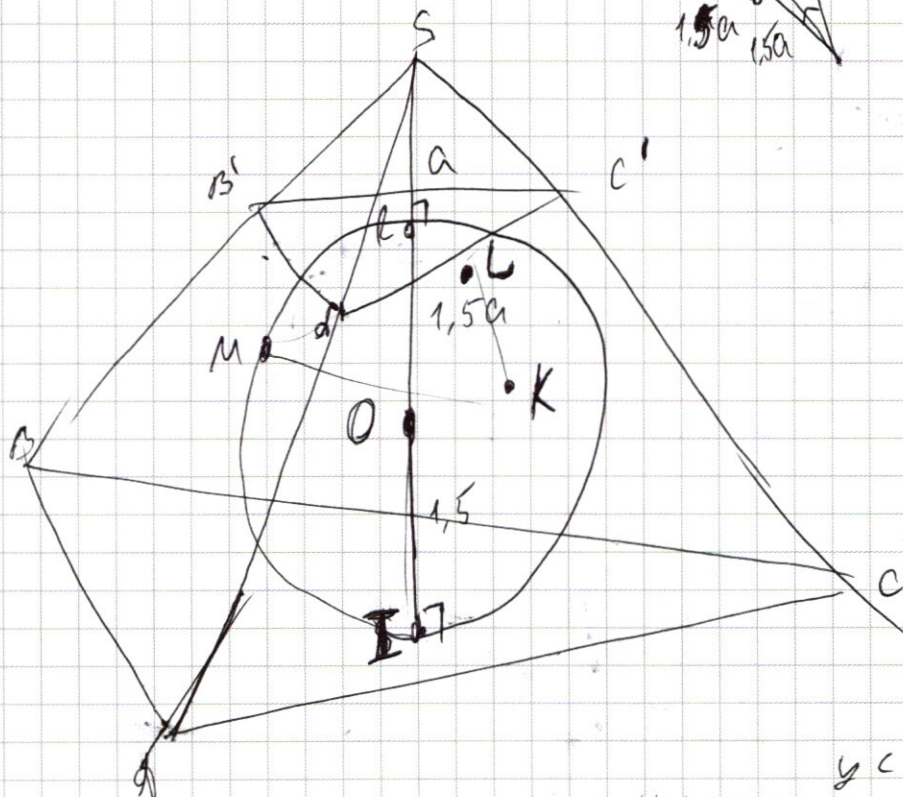
при $b > x$, $b < -\cancel{x}$

$$x = -5$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

при $y \geq x$

при $y < x$

$$\begin{aligned} x+y+5 &\geq 0 & y &\geq x-5 \\ y-x+5 &\geq 0 & y &\leq x+5 \end{aligned}$$

$$76 + 2 \cdot 2^{32} - 1 \cdot X > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33} X - 2^x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 129 = 3^3 \cdot 43$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(7x) \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(4,5x + \frac{\pi}{8}) \cos(4,5x - \frac{\pi}{8}) = 2 \cos(4,5x + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})$$

$$\sin(4,5x + \frac{\pi}{8}) - \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(4,5x + \frac{\pi}{8}) - \sin(\frac{3}{8}\pi - \frac{x}{2}) = 0$$

$$2 \sin(2,5x - \frac{\pi}{8})$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} \cdot y^{\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 27 \\ \hline 301 \\ 86 \\ \hline 1161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ -9 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$1029 = 3 \cdot 343$$

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$C_3^3 \cdot C_3^3$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$$

$$\frac{3}{36} \quad \frac{8}{36}$$

$$\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$x^{-2 \ln x} y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} y^{-7 \ln x}$$

$$y^{3 \ln x} = y^{\ln y} x^{2 \ln x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = xy - 4$$

$$-xy + 8x - 4y = -(xy - 8x + 4y) = -(\underline{y-8})(\underline{x+4}) + 32$$

$$-xy + ax - by = -(xy - ax + by) = -(x+b)(y-a) + ab$$

или

$$(y-a)^2 - 2(x+b)^2 - xy + ax - by = c$$

$$y^2 - 2ay + a^2 - 2x^2 - 4xb - b^2 - xy + ax - by = c$$

$$y^2 - (2a+b)y - 2x^2 + (a-4b)x - xy + a^2 - b^2 = c$$

$$2a+b=4 \quad 8a+4b=16$$

$$a-4b=8 \quad 9a=24$$

$$a = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$b = \frac{48}{9} - 4 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$c = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\left(-\frac{4}{3}\right)\right)x - \left(2\frac{8}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)y\right) = 0$$

$$y^2 + 8$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x^{2 \ln x}$$

$$3 \ln x \ln y = \ln y^2 + 2 \ln x^2$$

$$\ln y^2 - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t=1 \quad t=2$$

$$t = \frac{\ln y}{\ln x} = \log_x y$$

$$x=y$$

$$\log_x y = 2$$

$$y = x^2$$