

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 +$$

1 случай: число содержит 4 "5"; 3 "3" и 1 "1"
таких чисел по зав. учк:

$$\frac{8!}{4!3!}$$

(напр. 55553331)

2 случай: число содержит 4 "5"; 1 "3"; 2 "9" и 1 "1"

$$\frac{8!}{4!2!}$$

(напр. 55559311)

других случаев быть не может, поскольку
цифры десятичной СС ≤ 10 , а $3 \cdot 5 > 10$
 $5 \cdot 5 > 10$

$$\text{Итого } \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 1120$$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(2x+5x) + \cos(5x-2x) = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin(2x+5x) + \sin(5x-2x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\left(\sin 5x - \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\cos 5x - \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{\cos^2 2x}{2}$$

$$(\sin 5x - \cos 5x)(\sin 5x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0$$

$$1. \sin 5x = \cos 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \Delta \sin 5x + \cos 5x = 2 \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x \quad - \text{галочка III, имп. 3.}$$

$$\cos \left(5x - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos 2x$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = 2x + \pi + 2\pi d, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi d}{3}, d \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Итого: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi d}{3}, d \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)/x \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$85 + x(3^{81} - 1) > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x < 85 - x + 3^{81}(x - 4)$$

рав-во достигается при $x=4$ и $x=85$,
но обе стороны уравнения стоят
мон. возрастающие функции.

$\Downarrow$

при $x \in [5; 84]$ рав-во выполняется

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 80$ значений x удов. нерав-ву

$$y \in [3^x + 4 \cdot 3^{81}; 85 + (3^{81} - 1)/x]$$

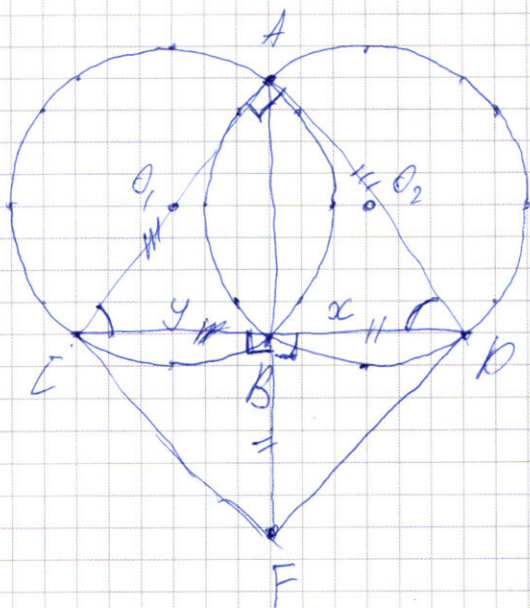
$\Downarrow$

существует $(85 + (3^{81} - 1)/x - 3^x - 4 \cdot 3^{81})/y$

$y(x) = 85 + (3^{81} - 5)x - 3^x$ — к-во y для x
каждого x
всего пар $(x; y)$:

$$\begin{aligned} y(5) + y(6) + \dots + y(84) &= 80 \cdot 85 + (3^{81} - 5) \frac{5+84}{2} \cdot 80 - \\ &- 3^5 - 3^6 - \dots - 3^{84} = 80 \left((3^{81} - 5) \frac{(5+84)}{2} + 85 \right) - \\ &- 3^5 (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{79}) \end{aligned}$$

№6.



$$r_1 = r_2 = 13$$

$$\angle C = \angle D = \angle AKB$$

(м.к. ок-тк равны)

$$\Delta ABC - \text{пр/б}$$

$$CB = BD$$

~~AB - высота $\Rightarrow ABC - \text{пр/б}$ м/к, вписанный угол~~

2 (продолжение)

$$AC = 2r = 26$$

$$\sin\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\alpha = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 5\alpha + \frac{\pi}{4} = 2\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi a, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi a}{3}, a \in \mathbb{Z} \\ 5\alpha + \frac{\pi}{4} = \left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \pi + 2\pi b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi b}{7}, b \in \mathbb{Z}$$

$$5\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\pi b, b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi a}{5}, a \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi a}{3}, a \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi b}{7}, b \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y} = (-x) \lg_{10}(-xy)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \Rightarrow (y - (x+4)) / (y + \frac{x}{2}) = 0$$

$$I \quad 2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$\Delta = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} = \begin{cases} x+4 \\ -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$II \quad y = -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{4x^2}{y}\right) \lg -\frac{x}{2} = (-x) \lg_{10} \left| \frac{x^2}{2} \right|$$

Вместо учета ОДЗ
будет проверка
правильности
приведения
при этом не будет
ошибки

$$\lg -\frac{x}{2} \cdot \lg_{10} 4x^2 = \lg \lg \frac{x^2}{2}$$

$$(\lg(-x) - \lg 2) (2 \lg_{10} 2 + 2) = 2(\lg(-x) - \lg 2)$$

$$(t - \lg 2) \left(\frac{2 \lg 2}{t} + 2 \right) = 2t - \lg 2$$

$$2 \lg 2 + 2t - \frac{2 \lg 2}{t} - 2 \lg 2 = 2t - \lg 2$$

$$\frac{2 \lg 2}{t} = \lg 2$$

$$t = 2 \lg 2 = \lg(-x) \Rightarrow x = -4 \quad y = -2$$

$$4 \lg 2 = 4 \lg 8 \Rightarrow (-4; 2) - \text{корень}$$

$$2. x+y=y$$

$$y>0$$

$$x<0$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+y)^2} \right)^{\lg(x+y)} = (-x)^{\lg|-x(x+y)|} \text{ пологно } x$$

$$\lg(x+y) (\lg_{-x}(x^4) - \lg_{-x}(x+y)^2) = \lg|-x(x+y)|$$

$$\lg(x+y) (4 - 2\lg_{-x}(x+y)) = \lg(-x) + \lg(x+y)$$

$$\lg(x+y) \left(3 - 2\frac{\lg(x+y)}{\lg(-x)} \right) = \lg(-x)$$

$$b \left(3 - \frac{2b}{a} \right) = a$$

$$3ab - 2b^2 = a^2$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = 0 \quad | : a^2$$

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{b}{a} + 1 = 0$$

$$a) \frac{b}{a} = 1 \quad b) \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\lg(x+y)$$

$$x_1 = \frac{-y - \sqrt{17}}{2} \text{ не подходит, т.к. } x_1 + y < 0$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{17} - y}{2} \text{ упр. } x < 0, y > 0$$

$$a). \lg(x+y) = \lg(-x) \quad b). \lg(x+y) = \frac{1}{2} \lg(-x)$$

$$x = -2 \quad y = 2$$

$$\left(\frac{16}{4} \right)^{\lg 2} = 2^{\lg 4}$$

$$x = -2; 2 - \text{корень}$$

$$x^2 + 8x + 16 = -x$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -1 \quad y = 3$$

$$x = -4 \quad y = 0 \text{ не подходит } (y \neq 0)$$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 - \text{нет корней}$$

$$\text{Ответ: } (-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15.

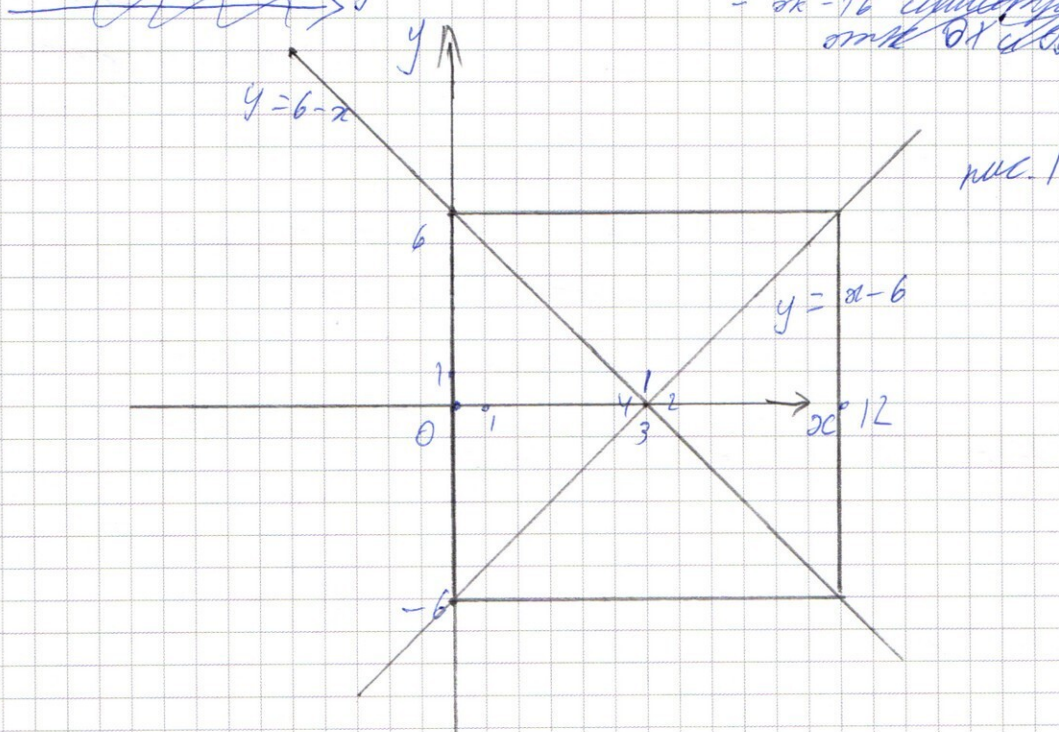
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \text{фигуры}$$

1. $\Delta (1)$: ~~$x-6$~~ $y = x-6$

$y = 6-x$

2. $\Delta (2)$: ~~$x-6$~~ $r = |a|$

$|a| = |x-6| \quad |y| = |-y|$
- $x-6$ - это $x-6$ или $6-x$



1. $- +$: $y+6-x + x-6+y = 12 \Rightarrow y = 6$

2. $++$: $2x-12 = 12 \Rightarrow x = 12$

рис. 1.

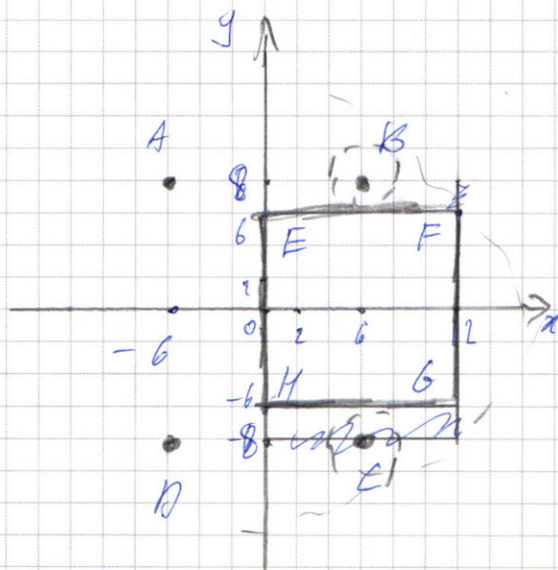
3. $+ -$: $-2y = 12 \Rightarrow y = -6$

4. $- -$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$2 \text{ а в) } : (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a$$

уравнение - 4 окружности $r = \sqrt{a}$

с центрами $(-6; -8)$ $(6; 8)$ $(-6; 8)$ $(6; -8)$



ок изменяет a ,
я некую радиусы
ок - ей

при $a = 4$, ок - т
С и В касаются
(2 точки)
квадрата, да
вдоль до касания
ок - ей. Аналогично
решений будет 4

$$AE = DH = CH = EB = \sqrt{6^2 + (8-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

при $a = 40$ корни ~~тоже~~ будут 4 (тоже)

2 корня будет и тогда $6 \in$ ок - т A , а

$$DF = AG = \sqrt{12^2 + 18^2} = 6\sqrt{2^2 + 3^2} = 6\sqrt{13}$$

$$a = 468$$

$$\begin{array}{r} + 36 \\ 13 \\ \hline 108 \\ 36 \\ \hline 468 \end{array}$$

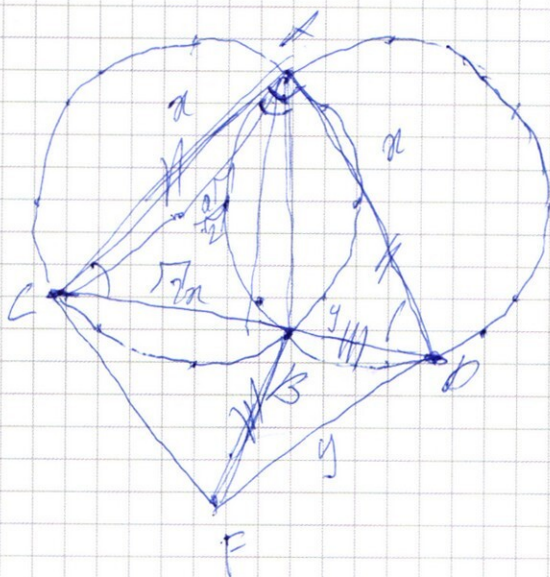
Ответ: $a = 40$

$$a = 468$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(98 + 18\sqrt{17})^2}{18 + \dots}$$

$$(x+4)^2 \text{ or } 3 \lg \sqrt{x} = (-x) \lg x \sqrt{x}$$



$$(2x-y)^2 + y^2 = CP^2$$

$$2x + y$$



$$\frac{x}{2}$$

$$x^2 + 8x + 16 = -x$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

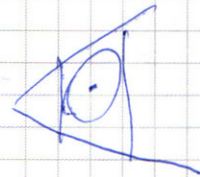
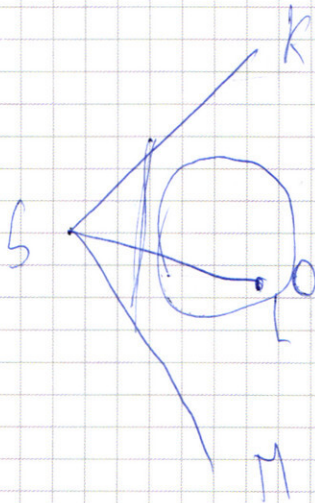
$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} =$$

$$\left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$81 + 98 - 18\sqrt{17} = -18 + 2\sqrt{17}$$

$$(\sqrt{17} - 1)^2 = 18 + 2\sqrt{17} \quad 18 - 2\sqrt{17}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5\alpha \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos^2 5\alpha + \sqrt{2} \sin^2 5\alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 2\alpha$$

$$2ac - \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 = 2bc$$

$$\sqrt{2}b^2 - 2bc = \sqrt{2}a^2 - 2ac$$

$$b^2 - \sqrt{2}bc = a^2 - \sqrt{2}ac$$

$$\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{b}{4} = 2a$$

$$b^2 - \sqrt{2}bc + \frac{c^2}{2} = a^2 - \sqrt{2}ac + \frac{c^2}{2}$$

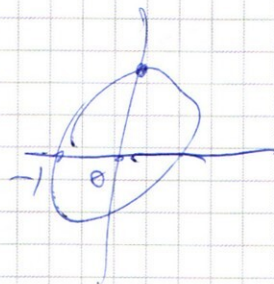
$$\left(b - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(a - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$(b - a)(b + a - \sqrt{2}c) = 0$$

$$\sin 5\alpha + \cos 5\alpha = 0$$

$$5 \cos 5\alpha - 5 \sin 5\alpha = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{3\pi}{2} = + \sin \alpha$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(\pi) =$$

$$5\pi - 3\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$3\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

35

5; 6

5; 7

5 6 7

$$y \geq 3^x + 4$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)/x \end{cases} \Rightarrow 3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)/x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)/x$$

$$x + 3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81} \cdot x + \dots$$

$$x > 4$$

$$3^x < 85 + 3^{81}/(x-4) - x$$

$$x = 85$$

$$x \in (4; 85) \quad x \in [5; 84]$$

$$3^{85} < 85 - 85 + 3^{85}$$

$$[5; 6)$$

$$y(4) + y(6) = 85 \cdot 2 + (3^{81} - 5)/(6-4) [5; 7)$$

$$-3^9 - 3^6$$

$$1 \quad 4 \quad 13 \quad 40 \quad 121 \quad 3^5 + 3^6 = 4 \cdot 3^5$$

$$3^5 + 3^6 + 3^7 =$$

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 125 \overline{) 16875} \\ \underline{437} \\ 375 \\ \underline{625} \end{array}$$

n-ый член 8 член

$$53.5 \cdot 3^3$$

$$+ 625$$

$$27$$

$$\begin{array}{r} 1250 \\ 16875 \end{array}$$

$$54.3^3$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) = 2\cos 5x \cos 2x - \cancel{5\sin 5x \sin 2x}$$

$$\sin(5x+2x) + \sin(5x-2x) = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x \sin 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 5x \sin 5x$$

$$\cos 5x (\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x) = \sin 5x / \cos 2x$$

$$ac - \sqrt{2}ab = bc$$

$$a(c - \frac{\sqrt{2}}{2}b) = b(c + \frac{\sqrt{2}}{2}a)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$x+y$

1 +

1 +

3 ?

4 —

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 5+$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \quad 6 ?$$

7 + -

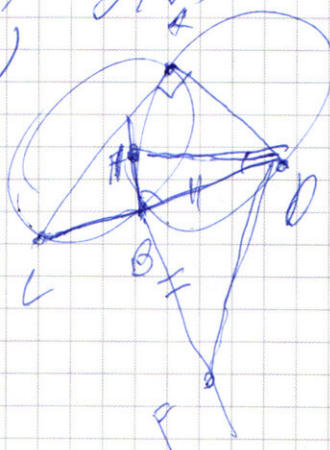
$$y = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{4} = \begin{cases} x+4 \\ -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\lg y \lg_x \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy)$$

$$\lg y (4 - 2\lg_x y) = \lg(-x) + \lg(y)$$

$$\lg y (3 - 2\lg_x y) = \lg(-x)$$

$$6 - x + y + 6 - x - y$$



$$\lg y \lg_x \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy)$$

$$\lg y (4 - 2\lg_x y) = \lg(-x) + \lg y$$

$$\lg y (3 - 2\lg_x y) = \lg(-x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$2y^2 - xy - x^2$~~

$$2y^2 - y(x+8) - 4x - x^2 = 0$$

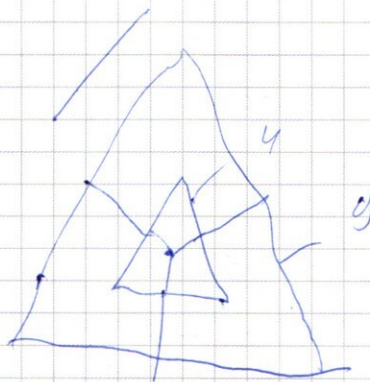
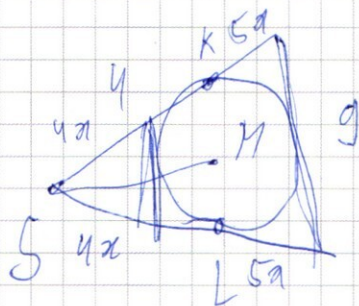
$$\phi = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{3x+2}}{4} = \begin{cases} x+4 \\ -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\lg \lg \lg \frac{x^4}{y^2} = (1-x) \lg(1-xy)$$

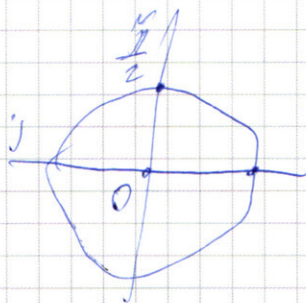
$$\lg^{-\frac{x}{2}} \lg(y) - \lg_{-x} \frac{x^2}{y}$$

$$\lg \frac{x}{2} (2 + 2\lg x^2) = \lg x + \frac{x^2}{2}$$



~~sin~~

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}$$



$$x^2 + 8x + 16 = -x$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$8 \pm \sqrt{17}$$

$$98 \pm 18\sqrt{17} = -18$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$x^2 + 7x + 16 = 0$$

$$D = 49 - 64$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$18 + 2\sqrt{17} = 14 + 2\sqrt{17}$$

$$16 + 2\sqrt{17} =$$