

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1

Разложим число 3375 на множители: $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Число может содержать либо цифру: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1,

либо 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1. (в таком случае $3 \cdot 3 = 9$, т.е. цифр не

Рассчитаем число чисел в первом случае, по формуле перестановок с повторениями: $p_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 560$ вар.

Во втором случае: $p_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ вар.

Значит, всего $p_1 + p_2 = 560 + 1120 = 1680$ вар.

Ответ: 1680 чисел.

~ 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 11x) - \sin 11x + \sin 3x - \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 11x - 11x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 11x + 11x}{2} + 2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2} \cos \frac{3x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2} = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 (\sin(\frac{\pi}{4} - 11x) + \sin(3x - \frac{\pi}{4})) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 11x + 3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 11x - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$2 \sqrt{2} \sin(\frac{4x}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x (\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{2} - 7x) - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan 7x = -1 \\ 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 7x - 7x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 7x + 7x}{2} + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) \cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \sin 4x = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(1): 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) = 0 \\ \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Вывод. И совокупн.:

$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\log x} = y^{2 \log x} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \right. \quad (1)$$

$$\text{ДДЗ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1): x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$0/4 = (y+2)^2 - 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 - 3y^2 - 12y = -2y^2 - 8y + 4 = -2(y^2 + 4y - 2) = -2(y+2)^2 + 12 = 12 - 2(y+2)^2$$

$$\text{значит, } \begin{cases} x = y+2+2(y-1) \\ x = y+2-2(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

Рассм. случай, если $x = 3y$ и подставим во 2-е уравнение (2):

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\log 3y} = y^{2 \log 3y} \Rightarrow \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\log 3y} = y^{2 \log 3y + 2 \log y} \Rightarrow \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\log 3y} = y^{2 \log 3y} \cdot y^{2 \log y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\log 3y} = y^{2 \log y} \Rightarrow y^{\frac{4 \log 3y}{\log 3y}} = 3^{\frac{\log 3y}{\log 3y}} \cdot y^{2 \log y} \Rightarrow y^{4 \log 3y} = 3^{\log 3y} \cdot y^{2 \log y} \Rightarrow y^{2 \log 3y} = 3^{\log 3y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log 3y = \log 3y \Rightarrow 2 \log 3y = \log 3y \cdot \log 3y \Rightarrow 2 \frac{\log 3y}{\log 3y} = \frac{\log 3y}{\log 3y} \cdot \frac{\log 3y}{\log 3y} \Rightarrow$$

$$2 = \frac{\log 3y}{\log 3y} \Rightarrow \log 3y = \log 3y \Rightarrow y^2 = 3y \Rightarrow y(y-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 9 \text{, т.е. } (9; 3) \text{ - реш. системы.}$$

Рассм. случай, если $x = 4-y$ и подставим в уравнение (2):

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\log (4-y)} = y^{2 \log (4-y)} \Rightarrow \left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\log (4-y)} = y^{2 \log (4-y)} \Rightarrow y^{5 \log (4-y)} = (4-y)^{\log (4-y)} \cdot y^{2 \log (4-y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{\frac{5 \log (4-y)}{\log (4-y)}} = (4-y)^{\frac{\log (4-y)}{\log (4-y)}} \cdot y^{\frac{2 \log (4-y)}{\log (4-y)}} \Rightarrow y^5 = (4-y) \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$\log y 10 \text{ считать, тогда } y^{3 \log (4-y)} = (4-y)^{\log (4-y)} \cdot y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3\log_2(4-y) - 2 = \log_2(y-y)^2 \log_2(4-y)$$

$$3\log_2(4-y) - 2 = \log_2^2(4-y)$$

$$\log_2^2(4-y) - 3\log_2(4-y) + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \log_2(4-y) = 1 \\ \log_2(4-y) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4-y \\ 4-y = y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$0 = 1 + 16 = 17$
 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

или $y = 2$ $x = 2$

или $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$; $x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{8-\sqrt{17}+1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

Значит, $(2; 2)$ и $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2})$ - решения системы.

Ответ: $(3; 3); (2; 2)$ и $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2})$

~ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 - \text{уравнение с центром } (0; 3) \text{ и радиусом } 3, \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \quad (a), a > 0 \end{cases}$$

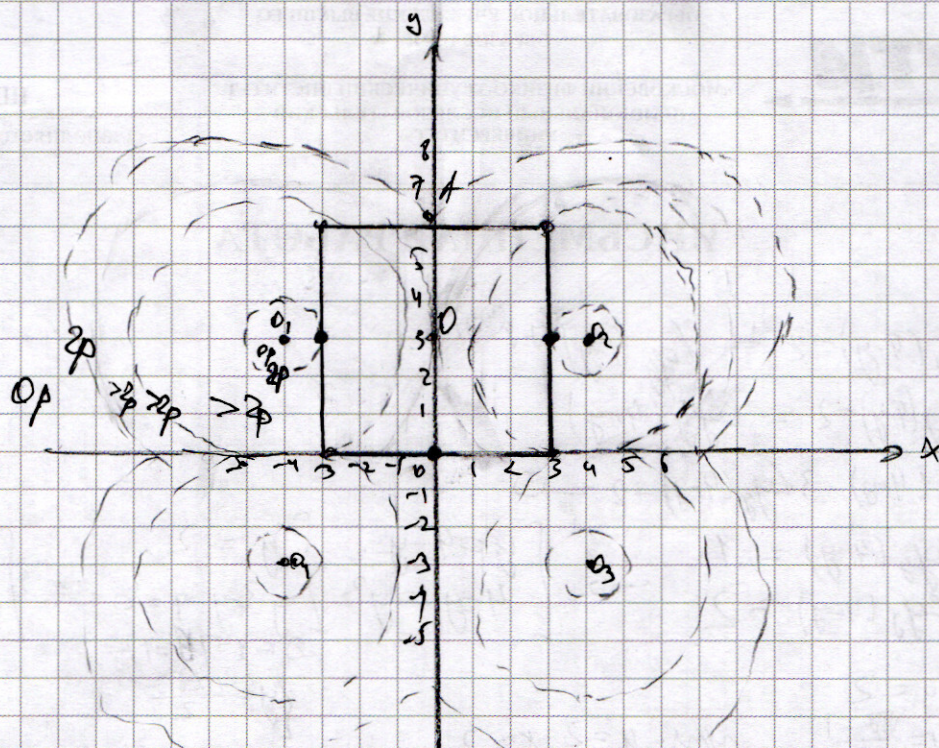
(1): если $x \geq 0$ и $y \geq 0$: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ - уравнение окружности с центром $(4; 3)$ и $R = \sqrt{a}$

(2) если $x \geq 0$ и $y < 0$: $(x-4)^2 + (y+3)^2 = a$ - уравнение окружности с центром $(4; -3)$ и $R = \sqrt{a}$

если $x < 0$ и $y \geq 0$: $(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$ - уравнение окружности с центром $(-4; 3)$ и $R = \sqrt{a}$

если $x < 0$ и $y < 0$: $(x+4)^2 + (y+3)^2 = a$ - уравнение окружности с центром $(-4; -3)$ и $R = \sqrt{a}$

Найдем точки пересечения в первом случае системы координат.



Значит, система имеет 2 решения, если окружность касается дуги единичной окружности, или проходит через точку $(0; b)$

1) если касания, то $R = 1 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 1$ ($a = -1$, не подходит)

2) если проходит через $(0; b)$, то $A(0; b)$; $O(0; 0)$, тогда по теореме Пифагора в $\triangle AOD_1$: $AO_1^2 = AO^2 + OD_1^2 = 3^2 + 4^2 = R^2 = a$
 $\Rightarrow a = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Значит $\begin{cases} a = 1 \\ a = 25 \end{cases}$

Ответ: 1; 25

~7

Реш. ф-та: $y = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ — показательная ф-та

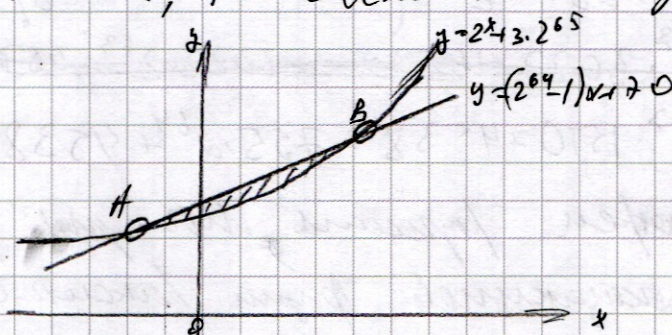
ф-та: $y = (2^{64} - 1)x + 70$ — линейная ф-та

Графики данных ф-т совпадают с помощью линейных срезов и ставится элементарная ф-та $y = 2^x$ и $y = \frac{x}{\text{const}}$ соответственно.

Но! Так же можно решить эту показательную

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

решим лишь 6 задач, то схематично изображим
график функции:



где зафиксированные отрезки будут длиннее реш-
шим нашей системы

$$\text{при } x=6: \begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{65} = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} \\ 70 + (2^{64} - 1)x = 70 + 2^{64} \cdot 6 - 6 = 64 + 2^{65} \cdot 3 = 2^6 + 2^{65} \cdot 3 \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

$$x=6 \text{ - корень системы } \begin{cases} y = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y = 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{при } x=70: \begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{65} = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{65} (32 + 3) = 2^{65} \cdot 35 \\ 70 + (2^{64} - 1)x = 70 - 70 + 2^{64} \cdot 70 = 2^{65} \cdot 35 \end{cases}$$

$x=70$ - корень системы (1).

Значит $x=6$ и $x=70$ - абсциссы точек A и B, так. других
точек пересечения быть не можем, т.е. $A(6; y_1); B(70; y_2)$

Рассмотрим теперь участок реш. при $x=7$:

$$\begin{aligned} (2^{64} - 1)k + 70 - 2^k + 3 \cdot 2^{65} &= 2^{64}k - k + 70 - 2^k + 3 \cdot 2^{65} = 70 - 2^k + 2^{64}(6+k) \\ (2^{64} - 1)7 + 70 - 2^7 + 3 \cdot 2^{65} &= 2^{64} \cdot 7 + 3 \cdot 2^{65} + 70 - 2^7 - 7 \end{aligned}$$

$$\text{при } x=8: 2^{64} \cdot 8 + 3 \cdot 2^{65} + 70 - 2^8 - 8$$

$$\text{при } x=9: 2^{64} \cdot 9 + 3 \cdot 2^{65} + 70 - 2^9 - 9 \quad +$$

$$\vdots$$

$$\text{при } x=69: 2^{64} \cdot 69 + 3 \cdot 2^{65} + 70 - 2^{69} - 69$$

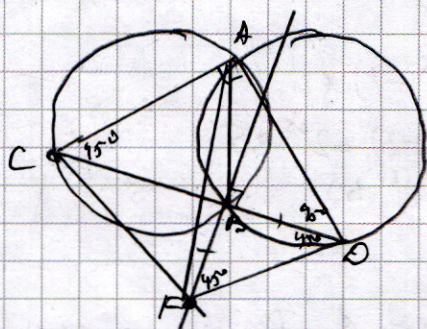
$$\Sigma = 2^{64} (7+8+9+\dots+69) + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 + 70 \cdot 63 - (2^7+2^8+\dots+2^{69}) - (7+8+9+\dots+69)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{64} \cdot \frac{7+69}{2} \cdot 63 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 + 70 \cdot 63 - \frac{2^7(2^{63}-1)}{2-1} - \frac{7+69}{2} \cdot 63 = \\
 & \text{(применив к многочл. ф-л. или арифметическ. и геом. прогрессиям)} \\
 &= 63 \cdot 38 \cdot 2^{64} - 189 \cdot 2^{65} + 70 \cdot 63 = 2^{70} + 2^7 - 63 \cdot 38 = \\
 &= 2^{63} \cdot 63 \cdot 38 - 189 \cdot 2^{65} = 2^{70} + 128 + 4410 = 2^{63}(63 \cdot 38 - 189 \cdot 4 - 2^7) + \\
 &+ 4538 = 2^{63}(2394 - 756 - 128) + 4538 = \cancel{2^{63}(1510 - 128) + 4538} = \\
 &= \cancel{2^{63} \cdot 3022 + 4538} = \cancel{3022 \cdot 2^{63} + 4538} = 2^{63}(1638 - 128) + 4538 = \\
 &= 2^{63} \cdot 1510 + 4538 = 755 \cdot 2^{64} + 4538
 \end{aligned}$$

Рассмотрим фигуру, которую мы получили, что поможет нам показать, что фигура является.

Значит фигура имеет вид $755 \cdot 2^{64} + 4538$ пара, удовлетв. решению.

Ответ: $(755 \cdot 2^{64} + 4538)$ пар



$$a) 1) \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{BC}{BD}, \text{ т.к.}$$

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= \frac{AC \cdot AB \cdot BC}{4R} \\
 S_{ABD} &= \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4R} \quad \left\{ \begin{aligned} S_{ABC} &\sim AC \cdot BC \\ S_{ABD} &\sim AD \cdot BD \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\text{тогда } \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BC}{AD \cdot BD} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = 1 \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle ACD - \text{равн.}, \text{ т.к. } \angle ACD = 45^\circ$$

$$2) \text{ По т. син: } \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R = 10 \Rightarrow AB = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

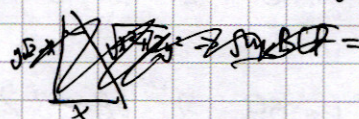
3) $\triangle BFD$ - равн. и прямоугольный $\Rightarrow \angle FBD = 45^\circ = \angle BFD \Rightarrow \triangle ADF$ - прямоугольный с $\angle D = 90^\circ$. $BD = x$; $AD = y$, тогда по т. Пиф. в $\triangle BFD$:

$$FD = x\sqrt{2}; \text{ в } \triangle AFD: AF = \sqrt{y^2 + 2x^2}$$

$$\text{в } \triangle ACD: CD = y\sqrt{2} \Rightarrow BC = y\sqrt{2} - x, \text{ тогда по т. Пиф. в}$$

$$\triangle CBF: CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{2y^2 + x^2 - 2\sqrt{2}xy + x^2} = \sqrt{2y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy}$$

$$\text{в } \triangle BCF: \tan \angle BCF = \frac{x}{BC} = \frac{x}{y\sqrt{2} - x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

1) 555333 11
2) 55593111

$$= \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\Rightarrow 560 + 1120 = 1680$$

~2

$$\cos 11x - \cos 3x = \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) - \sin 11x + \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) \cos \frac{\pi}{4} + 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \frac{11x - 3x}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{11x}{2} - \cos 14x$$

$$2 \sin(4x) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = \cos 14x$$

$$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 \Rightarrow \tan 7x = -1 \Rightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x = 0 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2} \frac{7x - 7x}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \frac{7x + 4x}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \frac{7x}{2} - 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{4x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{4x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi n \\ \frac{\pi}{8} - \frac{4x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi n \\ \frac{4x}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - \pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{5\pi}{4} + \frac{2}{12}\pi n \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \end{cases}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 = y^{2\lg x} \quad \sim 3 \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$0/4 = (y+2)^2 - 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 - 3y^2 - 12y = -2y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 + 2y + 1) = 4(y+1)^2$$

$$x = \frac{y+2 \pm 2(y+1)}{2} = 3y \quad (1)$$

$$x = \frac{y+2 - 2(y+1)}{2} = 4-y \quad (2)$$

$$(1): \left(\frac{y}{3y}\right)^5 = y^{2\lg 3y} = y^{2\lg 3 + 2\lg y}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^5 = y^{2\lg 3y} = y^{2\lg 3 + 2\lg y} = y^{2\lg 3} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg y}$$

$$3^{\lg 3y} = \frac{y^{2\lg 3 + 2\lg y}}{y^{2\lg y}} = y^{2\lg 3}$$

$$3^{\lg 3y} = y^{2\lg 3}$$

$$\lg 3y \lg 3 = 2\lg 3$$

$$\lg 3 = 2\lg 3y$$

$$\frac{\lg y}{\lg 3y} = \frac{2}{\lg 3y} \rightarrow \lg_3 3y = 2\lg_3 y$$

$$1 + \lg_3 y = 2\lg_3 y$$

$$\lg_3 y = 1 \rightarrow y = 3 \quad x = 9$$

$$(2): \left(\frac{y}{4-y}\right)^5 = y^{2\lg y + 2\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)}$$

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg y}$$

$$y^{\lg 4-y} = (4-y)^{\lg 4-y} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{2\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg 4-y}$$

$$y^{\lg \frac{(4-y)^2}{y^2}} = (4-y)^{\lg \frac{4-y}{y}}$$

$$\lg \frac{(4-y)^2}{y^2} \lg \frac{4-y}{y} = \lg \frac{(4-y)^3}{y^2}$$

$$\frac{\lg \frac{(4-y)^2}{y^2}}{\lg 10} = \frac{\lg \frac{(4-y)^3}{y^2}}{\lg 10} \rightarrow \lg_y(4-y) = \lg_y \left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)$$

$$\frac{(4-y)^3}{y^2} = \frac{64 - 3 \cdot 16y + 3 \cdot 4y^2 - y^3}{y^2} = \frac{64}{y^2} - \frac{48}{y} + 12 - y = \frac{64 - 48y + 12y^2 - y^3}{y^2}$$

$$y^2 = (4-y)^{3 - \lg_y(4-y)} = (4-y)^{\lg_y \frac{y^3}{4-y}}$$

$$2 = \lg_y \frac{y^3}{4-y} \cdot \lg_y 4-y$$

$$\frac{\lg y^2}{\lg 4-y} = \frac{\lg \frac{y^3}{4-y}}{\lg \frac{y^3}{4-y}} = \frac{\lg y^3 - \lg 4-y}{\lg y^3 - \lg 4-y}$$

$$2 - \lg_y y^3 = 1 \rightarrow \lg_y y = 3 \rightarrow \lg_y y = 1 \rightarrow 4-y = y \quad 2y = 4 \quad y = 2$$

$$\text{Answer: } (9; 3) \cup (2; 2)$$

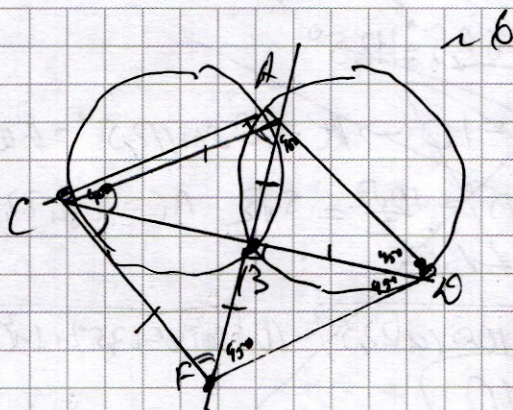
$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 32 \\ \hline 126 \\ 1260 \\ \hline 2016 \end{array} \quad \begin{array}{r} 189 \\ \times 9 \\ \hline 1701 \end{array}$$

$$16^{\lg 2} = 4^{\lg 4} = 4^{2\lg 2} = 16^{\lg 2}$$

$$y^{\frac{3\lg 4-y}{\lg 10}} = (4-y)^{\frac{\lg 4-y}{\lg 10}}$$

$$\begin{array}{r} 2394 \\ 756 \\ \hline 3150 \\ - 128 \\ \hline 3022 \end{array}$$

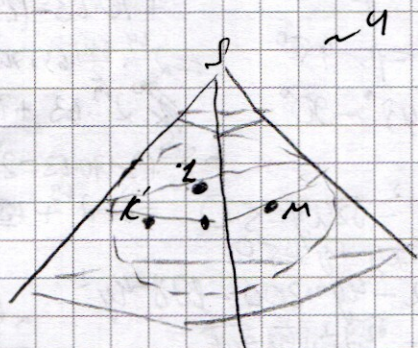
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



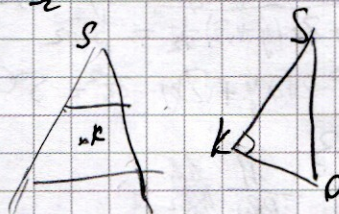
$$\begin{aligned} \# \text{ ab } \frac{AC \cdot D3 \cdot CB}{S_{abc}} &= \frac{A \cdot B \cdot AC \cdot B \cdot D}{S_{abd}} \\ \frac{AC \cdot CB}{A \cdot B} &= \frac{BC}{BD} \\ \frac{AC}{AB} &= 1 \rightarrow H = H \text{ (E)} \\ &\rightarrow 2 \text{ HCN-plos} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x - 3 \\ y \leq 20 - (2^{64} - 1)^4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 70 - 64 \\ 70 - 32 \end{array} \begin{array}{l} x + x \\ 2x \end{array} \begin{array}{l} 2x \\ 2x \end{array} \begin{array}{l} 3.2^{805} \\ 2x \end{array}$$



$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} |y-3| - |x| + |y-3-x| &= 6 \\ (|x|-y)^2 + (|y|-3)^2 &= a \end{aligned}$$

$$y^2 + x^2 - y^2 = x^2$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 & 2y = 12 \\ y \geq x+3 & y = 6 \end{cases}$$

$$y + 3 + x = 6 \quad x = 6 - y - 3 = 3 - y$$

$$2y + 6 = 6 \quad y = 0$$

$$y - 3 - x - y + 3 = 0$$

$$-x = 0$$

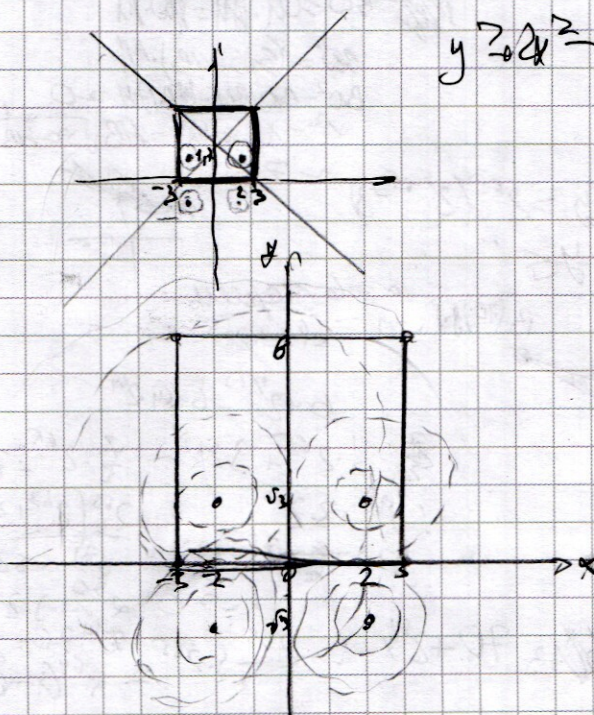
$$x = 0$$

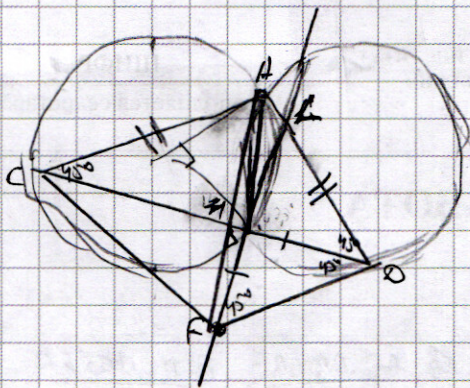
$$\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{25 + (6\sqrt{3})^2}$$

$$9 = 25 + 36 + 3 + 12\sqrt{3} = 228 + 36 + 12\sqrt{3} = 64 + 12\sqrt{3}$$

$$1 \sim 64-125$$





$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R \cdot BD \cdot AD} = \frac{BC \cdot AC}{BD \cdot AD}$$

$$AC = AD$$

$$\frac{180 - 45}{2} = \frac{135}{2} = 67.5$$

$$180 - 67.5 = 112.5$$

$$\frac{AC}{\sin 112.5} = 2R = 10 \rightarrow AC = 10 \sin 112.5 = 10$$

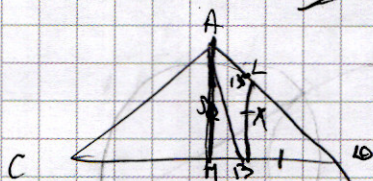
$$BD = 2R \sin 62.5 = 10 \sin 62.5 = 8.75$$

$$AB = 10 \sin 45 = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$BC = 10 \sin 22.5$$

$$CF = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{100 \sin^2(62.5) + 100 \sin^2(22.5)} = 10 \sqrt{\cos^2(50 - 62.5) + \sin^2(22.5)} = 10$$

$$AB = 2R \sin 45 = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$



$$\alpha = 180 - 45 - \beta = 135 - \beta$$

$$\beta = 180 - 45 - (180 - \beta) = \beta - 45$$

$$\alpha + \beta = 135 - \beta + \beta - 45 = 90$$

$$\sqrt{50 + (y - x\sqrt{2})^2} = 2 \sin(62.5)$$

$$\sqrt{x^2 + (y - x\sqrt{2})^2} + 2x(y - x\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}xy - 2x^2 = 50$$

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 50$$

$$x^2 - \sqrt{2}xy - y^2 = 50$$

$$0 = 2 - 4y^2 + 200 - 198 - 4y^2$$

$$y = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{198 - 4y^2}}{2}$$

$$S = 2^{64} (1 + 2 + 3 + \dots + 63) + 70 \cdot 63 - (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63})$$

$$= 2^{64} \cdot \frac{63 \cdot 64}{2} + 70 \cdot 63 - (2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63})$$

$$= 2^{64} \cdot 2016 + 70 \cdot 63 - (2^{64} - 2^2) = 61 \cdot 2^{63} + 4538$$

$$\begin{array}{r} 2^{63} \\ 4 \\ \hline 128 \\ 4538 \end{array}$$

$$\frac{AB}{AH} = \frac{CH}{AH}$$

$$AB^2 = CH \cdot AH = 10 \cdot 10$$

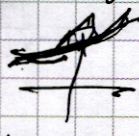
$$AB^2 = (BD - AD) \cdot AH$$

$$BD^2 - 2BD \cdot AH + AD^2 = 0 \quad \text{or} \quad AH = \sqrt{50 - AB^2}$$

$$x^2 - x\sqrt{50 - AB^2} - AB\sqrt{50 - AB^2} = 0$$

$$y > 2^{65} (2^{65} + 3) \sim 7$$

$$y \leq$$



$$63 \cdot 2^{65} = 2^6 + 2^{66} + 2^{65}$$

$$y = 6 \cdot 70 + 13 \cdot 2^{65} - 6 - 64$$

$$28 + 3 \cdot 2^{65} = 28 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{67} - 8 = 62 + 2^{67}$$

$$= 62 + 3 \cdot 2^{65} + 2^{65}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{65} + 3 \cdot 2^{65} = \frac{7}{2} \cdot 2^{65} = 7 \cdot 2^{64}$$

$$2^{65} + 3 \cdot 2^{65} = 4 \cdot 2^{65} = 2^{66}$$

$$20 + 2^{67} - 128 = 2^{67} - 108$$

$$x = 70 \quad 2^{67} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{66} (32 + 3) = 55 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} \cdot 70 = 2^{65} \cdot 35$$

$$= 2^{64} (x - 6) + 70 - 2^x = 2^{64} (x - 6) + 70 - 2^x$$

$$61 \cdot 2^{63} + 4538$$