МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Значит, данное восьмизначное число может состоять или из цифр 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, или из 9, 3, 7, 7, 7, 7, 1, 1.

Кол-во чисел, состоящих из первого набора цифр, равно:

$$\frac{8!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3!} = 5\cdot 7\cdot 8 = 280$$ (мы размещаем по 8 местам 4 числа („1" и 3 из „3"), а потом делим на 3!, т.к. цифра „3" в наборе повторяется 3 раза); остальные места занимают „7"); или же размещаем 8 чисел по 8 местам, делим на 4! и 3! из-за повторений).

Кол-во чисел, состоящих из второго набора цифр, равно:

~~$\frac{8!}{2!\,4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1680$ (аналогично первому)~~

$$\frac{8!}{2!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 4\cdot 30\cdot 7 = 840$$ (аналогично первому).

Всего вариантов: $840 + 280 = 1120$.

Ответ: 1120.

№3.

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\left(-\dfrac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

~~Прологарифм~~ ОДЗ: $\begin{cases} y<0 \\ x>0 \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения (они положительны):

$$\ln\left(\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln\left(x^{2\ln(xy^2)}\right)$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\ln(-y) \cdot \ln\left(\frac{x^7}{-y}\right) = 2\ln(x^2y^2)\ \ln(x)$

$\ln(-y)(7\ln x - \ln(-y)) = \ln(x)(2\ln(x) + 4\ln(-y))$

Пусть $\ln(-y) = a$, $\ln(x) = b$, то

$a(7b - a) = b(2b + 4a)$.

$7ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$.

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$.

$(a - 2b)(a - b) = 0$.

Значит, $a = 2b$, $a = b$.

$\left[\begin{array}{l} \ln(-y) = 2\ln(x) \\ \ln(-y) = \ln(x) \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = -y. \end{array}\right.$

П.о.) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -x^2 \\ x = -y \end{array}\right. \\ x > 0,\ y \neq 0 \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x^2. \\ x > 0 \\ x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x \\ x > 0 \\ x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0\ (\ast 3) \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases}$

(3) $x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$.

$x = 3$ - корень.

$(x - 3)(x^2 + x - 4) = 0$.

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -x \end{cases} \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$(3; -9)$, $(2; -2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(3; -9)$, $(2; -2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-9+\sqrt{17}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \ (2) \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \ (1) \end{cases}$$

(1) − Это ур-ние 4-х окружностей с центрами в точках $(8;15)$, $(-8;-15)$, $(8;-15)$, $(-8;15)$ и радиусом $R=\sqrt{a}$.

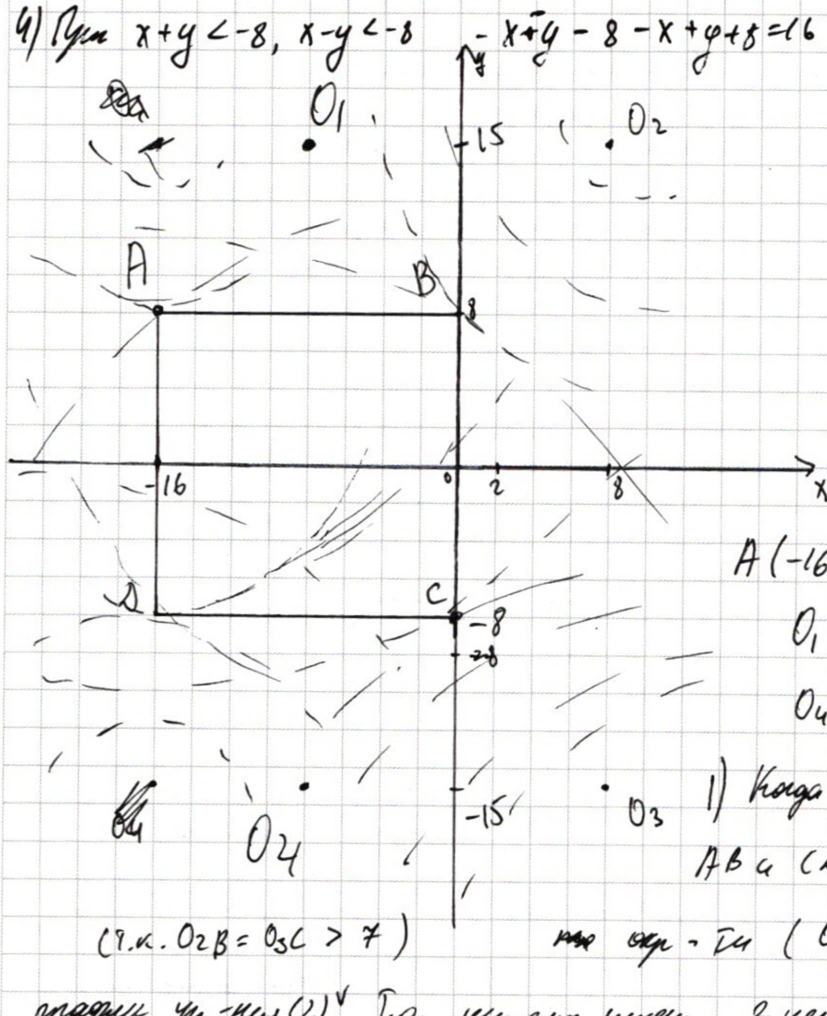
(2) $|x+y+8|+|x-y+8|=16$. Заметим, что при $a<0$ ур-ние не имеет решений, а значит, и система.

1) При $x+y>-8$, $x-y>-8$ $x+y+8+x-y+8=16 \Rightarrow x=0$.

2) При $x+y>-8$, $x-y<-8$ $x+y+8-x+y-8=16 \Rightarrow y=8$.

3) При $x+y<-8$, $x-y>-8$ $-x-y-8+x-y+8=16 \Rightarrow y=-8$.

4) При $x+y<-8$, $x-y<-8$ $-x-y-8-x+y+8=16 \Rightarrow x=-16$.



Графики этих уравнений симметричны относительно Ox. Значит, при любом a система имеет чётное число решений. Введём обозначения: $A(-16;8)$, $B(0;8)$, $C(0;-8)$, $D(-16;-8)$, $O_1(-8;15)$, $O_2(8;15)$, $O_3(8;-15)$, $O_4(-8;-15)$.

1) Когда окр-ти $(O_1;R)$, $(O_4;R)$ кас-ся AB и CD соответственно (при $R=7$), (т.к. $O_2B=O_3C>7$) то окр-ти $(O_2;R)$, $(O_3;R)$ не пересекают график ур-ния (2). Т.о. система имеет 2 решения.

2) Когда окр-ти $(O_2;R)$, $(O_3;R)$ проходят через D, ~~D~~ они больше не пересекают $ABCD$, как и окр-ти $(O_1;R)$, $(O_4;R)$. Система имеет

2 решения. Это происходит при $R = O_2D = \sqrt{(8+16)^2+(15+8)^2} = \sqrt{24^2+23^2}$,

т.е. при $a = 24^2+23^2$.

При других значениях a система или не имеет решений, или их больше 2.

Т.о., $a=49$, $a=1105$

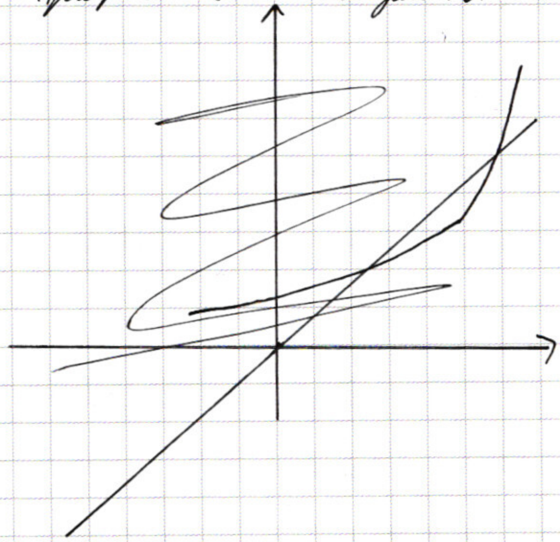
Ответ: $a=49$, $a=1105$.

№7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4\cdot 3^{28} \\ y \le 93 + 3(3^{27}-1)x \end{cases}$$

Рассмотрим ф-ции $f(x) = 3^x + 4\cdot 3^{28}$ и $g(x) = 93 + 3(3^{27}-1)x$.

График $f(x)$ – показательная ф-ция, $g(x)$ – ~~пр~~ линейная ф-ция.



~~Найдём точки о~~

Значит, графики ф-ций имеют не более 2 общих точек. Найдём их:

$$3^x + 4\cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27}-1)x$$

$$3^x - 93 = 3^{28}x - 3x - 4\cdot 3^{28} \quad |+12$$

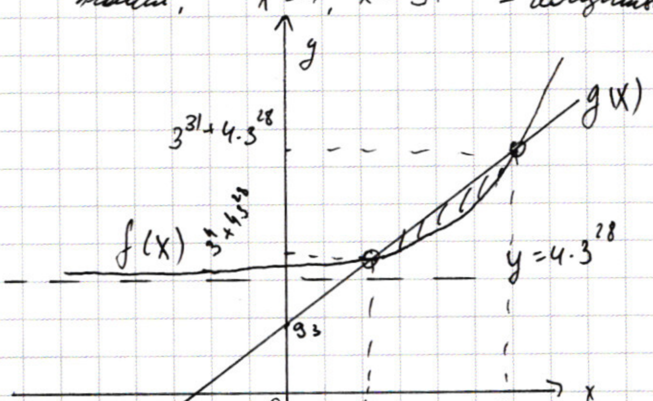
$$3^x - 81 = 3^{28}(x-4) - 3(x-4) \quad |:3.$$

$$3^3(3^{x-4}-1) = (x-4)(3^{27}-1).$$

При $x=4$ $\quad 3^3(3^0-1) = 0\cdot(3^{27}-1)$ (верно)

При $x=31$ $\quad 3^3(3^{27}-1) = 27(3^{27}-1)$ (верно).

Значит, $x=4$, $x=31$ – абсциссы точек пересечения.



Т.о., все решения системы заключены в заштрихованной области, $4 < x < 31$, т.е. явл. решениями нер-ва $g(x) - f(x) > 0$.

$$93 + 3(3^{27}-1)x - 3^x - 4\cdot 3^{28} > 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $h(x) = f(x) - g(x)$. Ф-ция опр. и дифф. на R.

$h'(x) = 3(3^{27}-1) - (3^x)' = 3(3^{27}-1) - \ln 3 \cdot 3^x = 0.$

$3^x = \frac{3^{28}-3}{\ln 3}$, $x = \log_3 \frac{3^{28}-3}{\ln 3}$ ~~- т. максимума~~ - т. минимума.

$h\left(\log_3 \frac{3^{28}-3}{\ln 3}\right) = 93 + 3(3^{27}-1)\log_3 \frac{3^{28}-3}{\ln 3} - 3\,\frac{3^{28}-3}{\ln 3} - 4^{38}$

№2.

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$

$\frac{1}{2} \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0.$

$\frac{1}{2}\cos 5x\,(\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0.$

$(\cos 2x + \sin 2x)\left(\frac{1}{2}\cos 5x + \sqrt{2}\cdot\cos 2x - \sqrt{2}\cdot \sin 2x\right) = 0.$

~~$\cos 2x = -\sin$~~ $\left[\begin{array}{l} \sin(2x+\frac{\pi}{4}) = 0 \\ \frac{1}{2}\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{4} = \pi n, \ n\in Z. \\ \frac{1}{2}\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z. \\ \frac{1}{2}\cos 5x + \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x) = 0 \ (1). \end{array}\right.$

(1) $\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x + 2\sqrt{2}\cdot\cos 2x - 2\sqrt{2}\cdot \sin 2x = 0.$

$\cos 2x(\cos 3x + 2\sqrt{2}) - \sin 2x(\sin 3x + 2\sqrt{2}) = 0.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln\left(\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)\cdot\ln(-y) = \ln x \cdot 2\ln(xy^2).$$

$$\cancel{\ln(-y)}(7\ln(x) - \ln(-y))\ln(-y) = 2\ln x\cdot(\ln x + 2\ln(-y)).$$

$$\ln(x) = a, \quad \ln(-y) = b.$$

$$(7a - b)\,b = 2a(a+2b).$$

$$\cancel{7a^2 - ba = 2a^2 + 4ab}.\quad 7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab.$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0.$$

$$\cancel{\sin\alpha\ \sin\beta}\quad \sin\alpha \pm \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 5x\cdot\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\cdot\cos 5x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0.$$

$$\frac{1}{2}\cos 5x\ (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2}(\cancel{\cos 4x \cos}\ \cos 5x\cdot\cos x + \sin 5x\cdot\sin x) = 0.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 5x\ (2\cos^2 x - 1 + 2\sin x\cdot\cos x) + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 5x\ (\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x - \sin^2 x) + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 1 = \sqrt{2}.\quad \cos x = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$(\cos 2x + \sin 2x)$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 5x + \sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \cancel{\cos}\sin 2x)(\cos 2x - \cancel{\cos}\sin 2x) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\sin 2x\\ \frac{1}{2}\cos 5x + \sqrt{2}\cdot(\cos x - \sin x) = 0.\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$

$\frac{1}{2} \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \cos 5x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$

$\frac{1}{2} \cos 5x \, (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cdot (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0.$

$(\cos 2x + \sin 2x)\left(\frac{1}{2} \cos 5x + \sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \sqrt{2}\right) = 0.$

$-\frac{1}{2} \le \cos 5x \le +\frac{1}{2}$ $\qquad -\sqrt{2} \le \sin 2x \le \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos 2x \le \sqrt{2}$

$-\frac{1}{2} - \sqrt{2} \le \sqrt{2}\cos 2x + \cos 5x \cdot \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

$\frac{1}{2} (\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x) + \sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \sqrt{2} = 0.$

$\cos 2x \left(\frac{\cos 3x}{2} + \sqrt{2}\right) - \sin 2x \left(\frac{\sin 3x}{2} + \sqrt{2}\right) = 0.$

$\cancel{\cos 2x \left(\frac{\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x}{2} + \sqrt{2}\right) - \sin 2x} \,($

$\frac{1}{2} \left(\cos^2 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x - \sin 2x \cdot \cos x \cdot \sin 2x - \sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x\right) =$

$= \frac{1}{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cdot \cos x - \sin x$

$\cos 2x\, \cancel{(\cos 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot si}$

$\cos 2x\, (\cancel{\cos 2x \cos x - \sin x \cdot \sin 2x})$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$

$\frac{1}{2} \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0.$

$\frac{1}{2} \cdot (\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0.$

$\frac{1}{2} (\cos^2 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \cdot \cos 2x =$

$= \cos x \, (\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 2\sin x \, (\sin 2x \cdot \cos 2x) = $

$= \cos x \, (\cos 4x) - \sin x \cdot \sin 4x)$

$\frac{1}{2} (\cos 4x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin 4x + 2\sqrt{2} \cos 2x - 2\sqrt{2} \sin 2x) =$

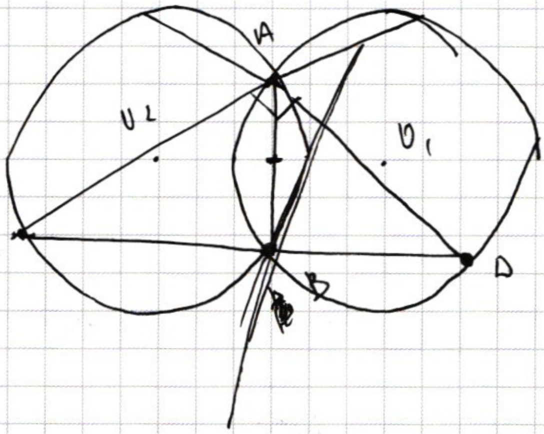
$= \frac{1}{2} (2\cos^2 2x - 1) \cos x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

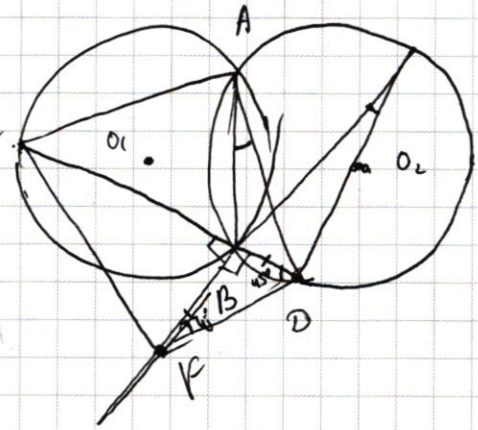
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

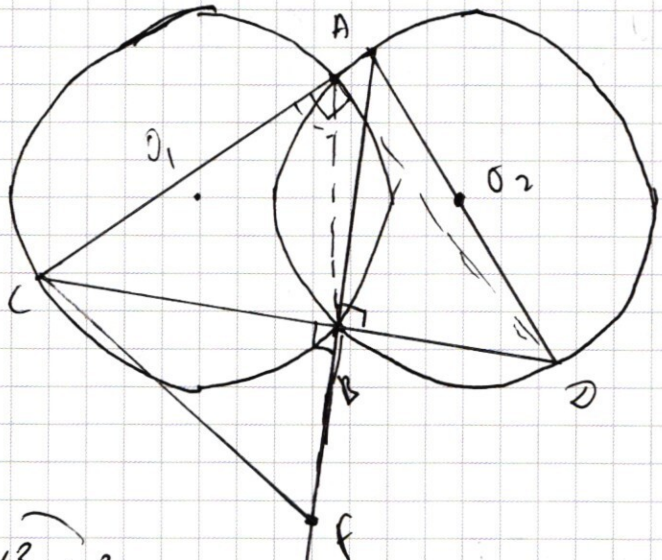
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC^2 + AD^2 = CD^2$.



$\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$.





$x^2 = -y$.

$y = -x^2$.

$7x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$.

$x = 0$ – корни.

$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$.

$x = 2$. $8 - 8 - 14 + 12$

$x = -2$ $-8 - 8 + 14 + 12$

$x = 3$ $27 - 18 - 21 + 12 =$

$= 39 - 39 = 0$.

$\boxed{x = 3 \text{ – корень}}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 - 7x + 12 & x - 3 \\
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + x - 4 \\
\quad x^2 - 7x & \\
\quad \underline{x^2 - 3x} & \\
\quad\quad -4x + 12 & \\
\quad\quad \underline{-4x + 12} & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$x^2 + x - 4 = 0$.

$D = 1 + 16 = 17$.

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

т.к. $x > 0$, то $\boxed{x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}$.

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$ №3.

$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{(\ln(-y))}} = x^{2\ln(xy^2)}$

$(-y)^{\ln(-y)} = 0$, то $y=-1$. $\ln(-y) = 0$, $\Rightarrow y = -1$.

$x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln(x)} \cdot x^{2\ln(y^2)} (-y)^{\ln(-y)}$

$x^{7\ln(-y)} = x^{2\ln(x)} \cdot (x^4)^{\ln(-y)} \cdot (-y)^{\ln(-y)}$

$x^{3\ln(-y)} = x^{2\ln(x)} \cdot (-y)^{\ln(-y)}$

$x^{\ln(-y^3)} \div x^{\ln(x^2)} = (-y)^{\ln(-y)}$. $\downarrow \ln$.

$\ln\left(x^{\ln(-y^3) - \ln(x^2)}\right) = \ln\left((-y)^{\ln -y}\right)$

$(3\ln(-y) - 2\ln(x)) \ln(x) = \ln(-y) \cdot \ln(-y)$.

$\ln(-y) = a$, $\ln(x) = b$.

$(3a - 2b)\, b = a^2$.

$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$.

$a = b$, $a = 2b$.

$\left[\begin{array}{l} \ln(-y) = \ln(x) \\ \ln(-y) = 2\ln(x). \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -y. \\ x^2 = -y \end{array}\right.$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$.

$y=-x$, $y<0$, $x>0$: $x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$.

$x = 0$ - корень.

$-4x^2 + 8x = 0$. $x^2 - 2x = 0$

$\boxed{x = 2}$, $x = 0$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~0~~ 1 2 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ 9.

2401 : 7 = 343

64827 : 9 = 7203

7203 : 3 = 2401

$49 \cdot 16 = 784$

343 : 7 = 49

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$

Состав числа: (1) 9 3 7 7 7 7 1 1

или

(2) 3 3 3 7 7 7 7 1.

(1): ~~3 3 3~~ $\cancel{C_8^5 = \frac{8!}{3!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 8\cdot 6}{3\cdot 2}} = 7\cdot 8$.

№2.

$A_8^5 = \frac{8!}{3!\,3!} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$.

$A_8^5 = \frac{8!}{3!\cdot 3!} = 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8$.

$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 + 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8 = 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot(6+1) = 4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 8 = 20\cdot 49\cdot 8 =$
$= 160\cdot 49 =$
$= \cancel{7660}$
7840.

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$.

$\cos 7x = \cos(3x+4x) = \cos 3x\cdot\cos 4x - \sin 3x\cdot\sin 4x$.

$\sin 7x = \sin(3x+4x) = \sin 3x\cdot\cos 4x + \sin 4x\cdot\cos 3x$.

~~cos3x · cos4x − sin3x · sin4x + sin4x · cos3x + √2 · 4x + cos4x + cos4x · sin3x =~~

~~= cos3x (cos4x~~.

$\cos 3x\cdot\cos 4x - \sin 3x\cdot\sin 4x + \cos 3x + \sin 3x\cdot\cos 4x + \sin 4x\cdot\cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

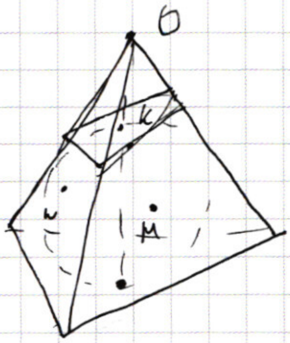
$\cos 3x(\cos 4x + 1)$ ~~−~~ $\sin 3x(\sin 4x + 1)$

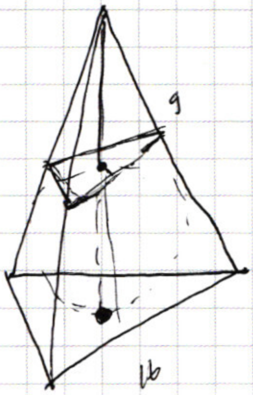
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

№4.





№5. $\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ ((|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a. \end{cases}$ $\sqrt{a}$ $(8;15)$ радиус $\sqrt{a}$.

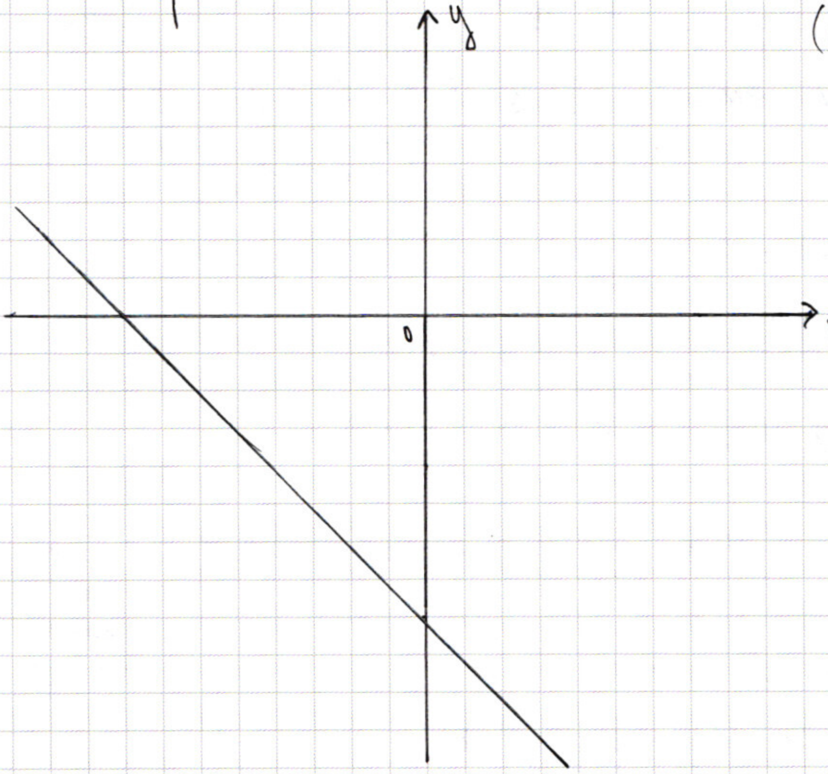
$|x+y+8|+|x-y+8|=16.$

(1) $x+y>-8, \quad x-y>-8.$

$x+y+8+x-y+8=16$

$2x=0, \quad x=0.$

$y>-8-x, \quad y<x+8.$



(2) $x+y<-8, \quad x-y>-8.$

$-x-y-8+x-y+8=16.$

$-2y=16.$

$y=-8.$

$x+y>-8, \quad x-y<-8.$

$x+y+8-x+y-8=16.$

$2y=16.$

$8\cdot 7\cdot 5 =$

№5.

$$\begin{cases} |x+y+8|+|x-y+8|=16 \\ (|x|-8)^2+(|y|-15)^2=a \quad (1) \end{cases}$$

(1) - это ур-ние 4 окр-тей с ц. в точках $(8;15)$, $(-8;15)$, $(8;-15)$, $(-8;-15)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

При $a<0$ ур-ние (1) не имеет решений, а значит, и система данных ур-ний.

(2) $|x+y+8|+|x-y+8|=16$.

1) При $x+8>-8$, $x-y>-8$:

$x+y+8+x-y+8=16 \Rightarrow x=0$.

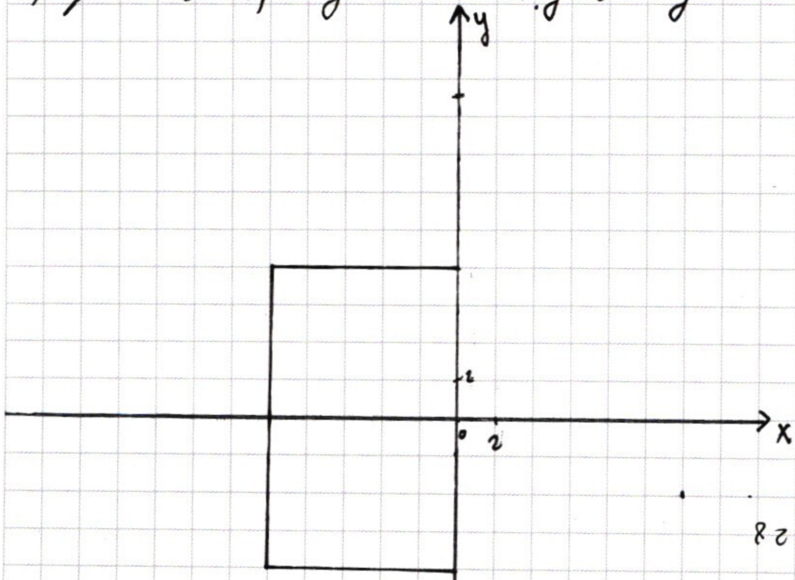
2) При $x+8>-8$, $x-y<-8$:

$x+y+8-x+y-8=16 \Rightarrow y=8$

3) При $x+8<-8$, $x-y>-8$: $-x-y-8+x-y+8=16$

т.е. $y=-8$

4) При $x+8<-8$, $x-y<-8$: $-x-y-8-x+y-8=16 \Rightarrow x=-16$.



$3^{28}(4+27)=31\cdot3^{28}$

$f(3)=3^{31}+4\cdot3^{28}$

$f(4)=3^4+4\cdot3^{28}$

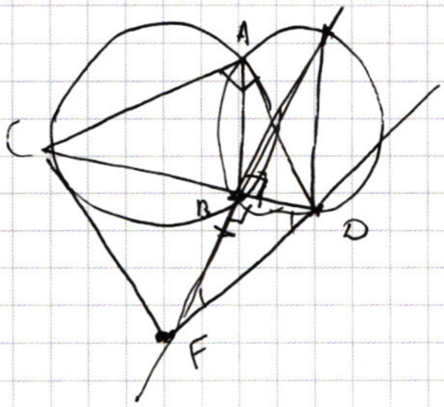
$e^x\ln3=3(3^{x^2}-1)$

$h'(x)=3(3^{x^2}-1)$

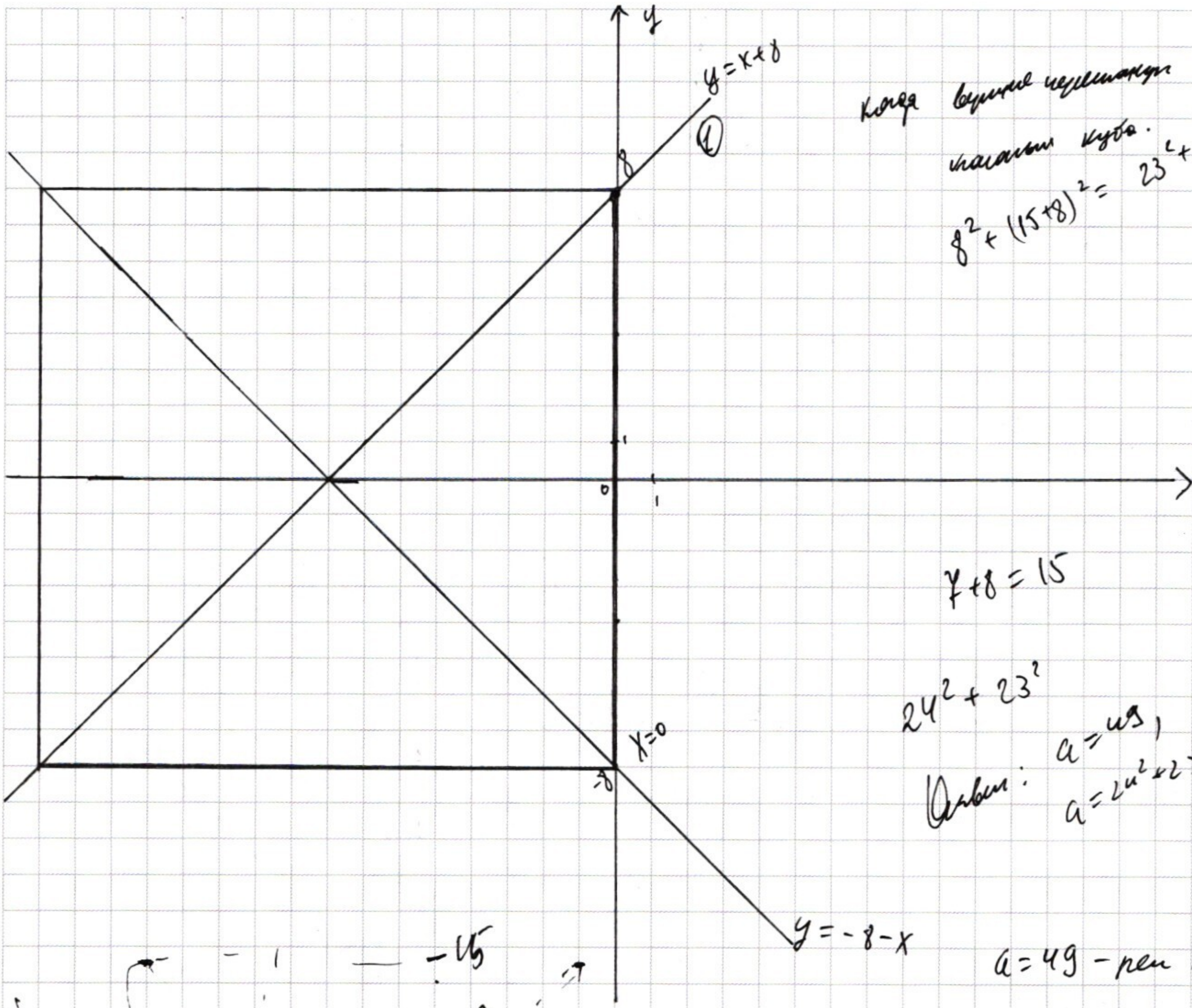
$\times\frac{24}{24}$ $\frac{+\,96}{48}$ 576

$\times\frac{23}{23}$ $\frac{+\,69}{46}$ 529

$\frac{+\,529}{576}$ 1105


A
C
B
D
F

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



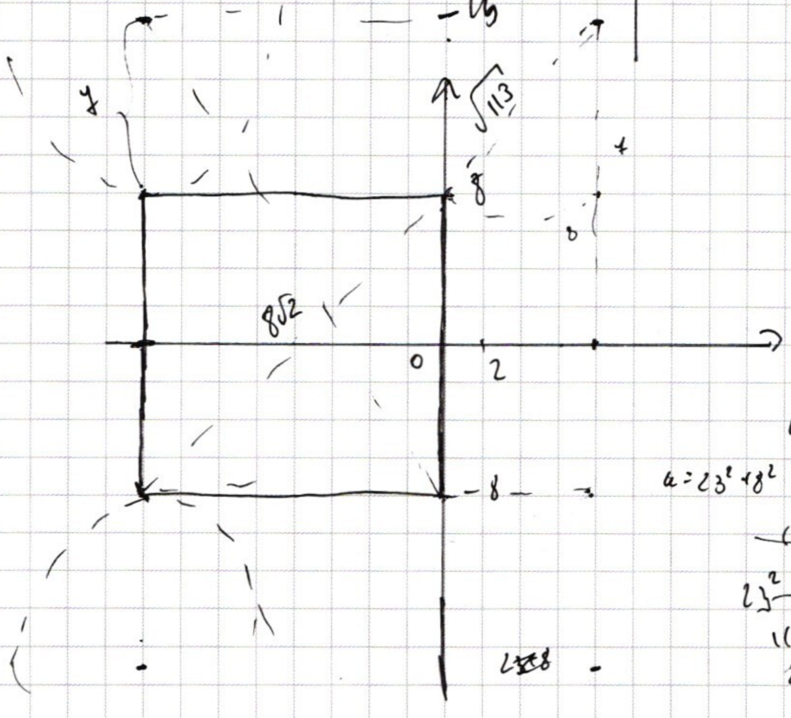
Когда вершины пересекают стороны куба.

$8^2+(15+8)^2 = 23^2+8^2$

$7+8=15$

24^2+23^2

Ответ: $a=49$, $a=24^2+23^2$



$a=49$ – реш.

$a \geq 0$.

$10 < \sqrt{113} < 11$

$\sqrt{64+49} = \sqrt{113}$

симметрия отн. OX.

$\sqrt{a} < 7$ – $\cancel{0}$

$\sqrt{a} = 7$ – ~~одно~~ 2 решение.

$49 < a < 113$ – 4 решения

$a = 23^2+8^2 \to a = 113$ – 6 реш.

~~$113 < a < 23^2$ – 8 решений.~~

~~$23^2 < a < 24^2+23^2$ – 4 решения.~~

$113 < a < 23^2+8^2$ > 2 реш. 18 реш.

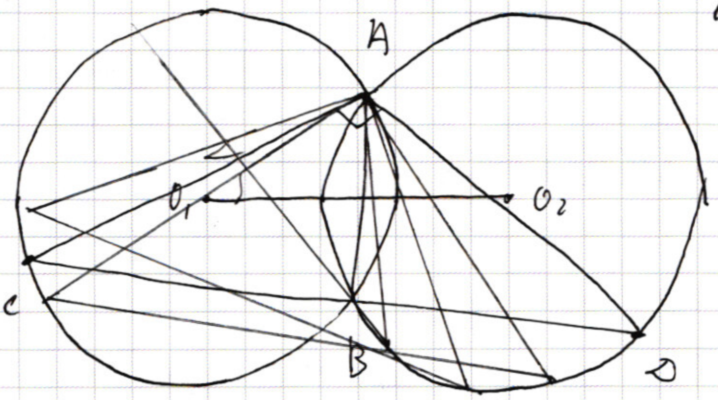
$23^2+8^2 < a < 23+24^2$ 4 реш.

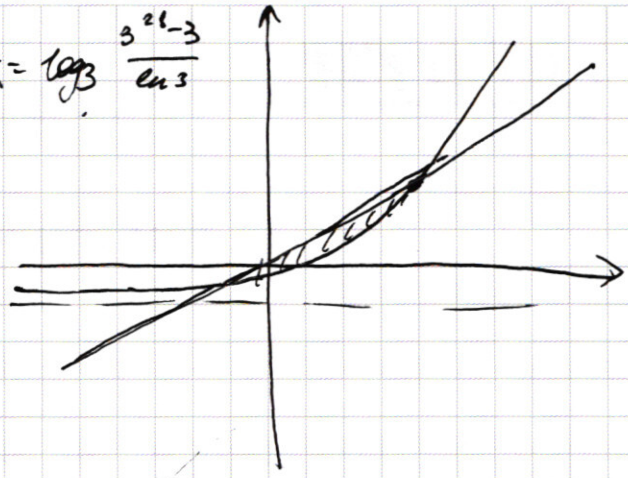
$\boxed{a = 23+24^2 \text{ – 2 реш.}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x = \log_3 \frac{3^{28}-3}{\ln 3}$



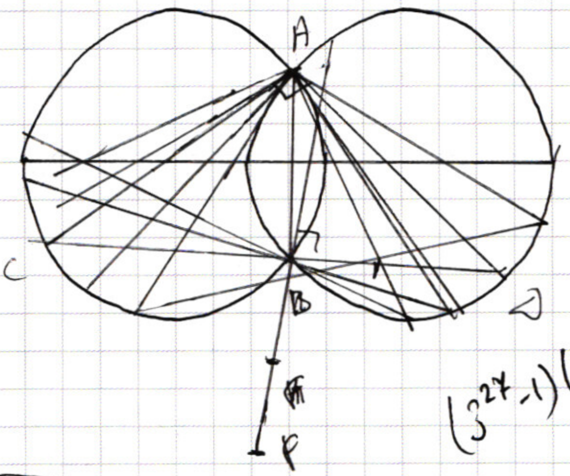


$3^{28} - 3 - \ln 3 \cdot 3^x$

$3^x = e^{\ln 3^x}$

$e^{x\ln 3x} \cdot \ln 3^x$

$4 < x < 31$



$(3^{27}-1)(x-4) < 27\cdot(3^{x-4}-1)$

$(3^{27}-1)\cdot x - 4(3^{27}-1) = 27\cdot 3^{x-4}$ 27

$(3^{27}-1)(x-4) = 27(3^{x-4}-1)$

$f(x) = (3^{27}-1)(x-4) - 27\cdot(3^{x-4}-1)$

$f'(x) = 3^{27} - 1 - 27\cdot \ln 3 \cdot 3^{x-4}$

$x-4 = 27.$

$x = 31$

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28}$

$y \le 93 + 3(3^{27}-1)x$

$93 + 3(3^{27}-1)x \overset{?}{>} 3^x + 4\cdot 3^{28}.$

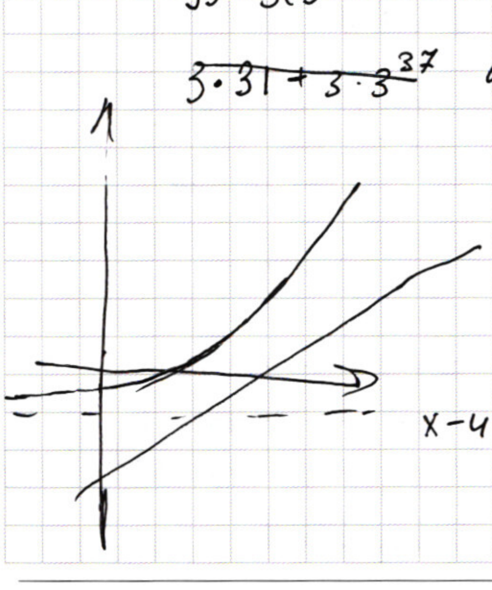
$\cancel{3\cdot 31 + 3\cdot 3^{37}}$ 428 $3^{28}\cdot x - 3x - 4\cdot 3^{28} \overset{?}{>} 3^x - 93.$

$3^{28}(x-4) - 3(x-4) \overset{?}{>} 3^x - 81.$

$(3^{28}-3)(x-4) \overset{?}{>} 3^x - 81.$

$(3^{27}-1)(x-4) \overset{?}{>} 3^{x-1} - 27.$

$(3^{27}-1)(x-4) \overset{?}{>} 27\cdot(3^{x-4}-1)$



$x-4<0$, то

$x=4.$

$0 < 27\cdot(3^1-1)$ (1)