

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Заметим, что $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, получаемся что
даже раскладывая на простые множители числа
всего 6 цифр, значит нам необходимо как
мин 2 ед. в числ. Рассмотрим различные
варианты:

1) Число будет состоять из трех цифр:
3 3 3 7 7 7 11, то есть кол-во чисел такого
вида равно $\frac{8!}{3!3!2!}$, 8! - это общее кол-во спол
3! т.к. 3 тройки
3! т.к. 3 семёрки
2! т.к. 2 единицы

2) 9 3 7 7 7 1 11 то есть чисел такого
вида $\frac{8!}{3!3!}$ 8! - общее кол-во
3! т.к. три 7
3! т.к. три 1

Всего вариантов нет, так другие произведе-
ния чисел будут больше 10.

$$\frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{2} + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 1680$$

Ответ: 1680.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \\ \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ \cos 9x + \sin 9x - \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) & \\ \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) & \quad (-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x \\ \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) &= 2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \\ 2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) &= \cos 4x \end{aligned}$$

$$\cos 4x = \cos(-4x) = \sin(\frac{\pi}{2} + 4x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{4}) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{3\pi}{4} - 2x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{aligned} & \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ & \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ & \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 2\ln x) \ln y$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2$$

$$a = b$$

$$a =$$

$$x^2 - x = 4$$

$$y - 4 =$$

$$g = 1 + 16 = 17$$

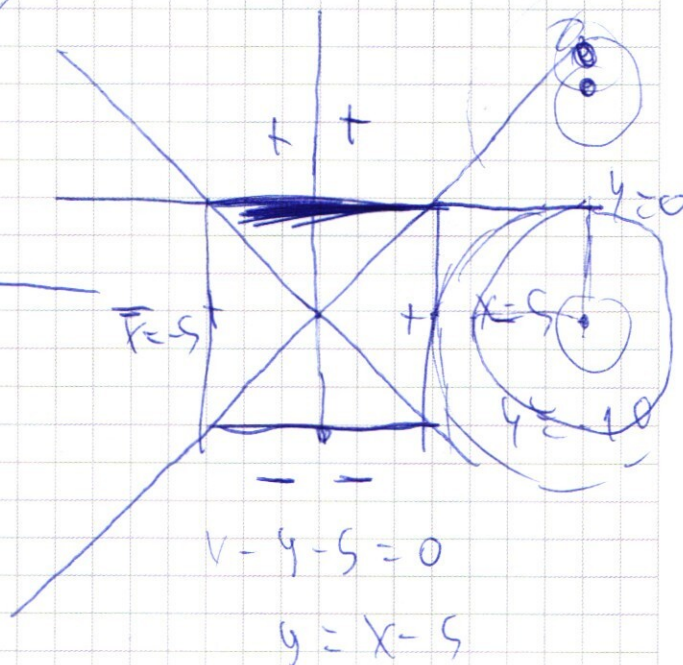
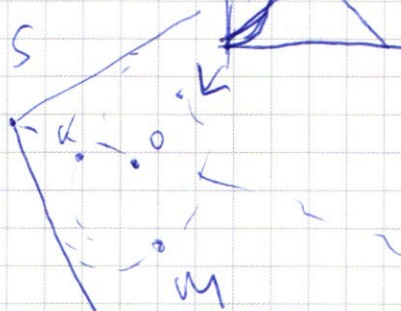
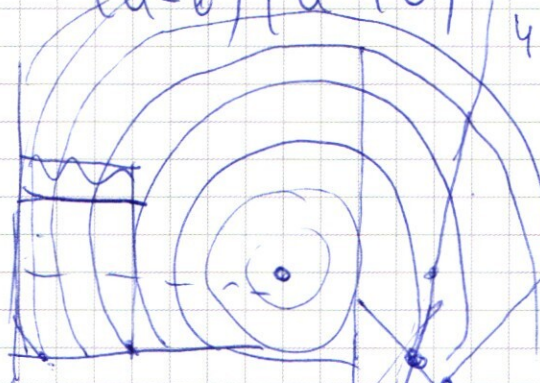
$$(a-b)(a-2b)$$

$$y^2 + (y-5)^2 = 14$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(y-5) = 10$$

$$|x+y+5| + |x-y-5| = 0$$



$$2y + 10 = 10$$

$$y = 0$$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-x - y - 5 + x + y + 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$- \ln y = u$$

$$u =$$

$$A: \begin{cases} (x^2 y^4)^{\sqrt[3]{3}} - \ln x - y \ln(y/x^2) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 - y(x+4) + 2x(4-x) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

P. 2 замети что $2x+4-x = x+4 \Rightarrow$

$$= y^2 - y(x+4) + 2x(4-x) = (y-2x)(y+x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x \\ y=4-x \end{cases}$$

P. 1 выи ОДЗ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ возьмем $\ln$ с обеих сторон

$$\begin{cases} -\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 2 \ln x) \ln y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln^2 y + 2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=y \\ y=x^2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

A $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ \begin{cases} x=y \\ y=x^2 \\ y=2x \\ y=4-x \end{cases} \end{cases}$ не учт.

$$x=4-x \Rightarrow x=2 > 0 \Rightarrow y=2 \quad (2; 2)$$

$$x^2=4-x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$2x=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow y=4 \quad (2; 4)$$

$$2x=x \Rightarrow x=0 \quad y$$

Ответ: $(2; 2) \quad (2; 4) \quad \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Д1: 14-?

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \\ y=-10 \\ \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases} \\ x=-5 \\ \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \\ x=5 \\ \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ это квадрат с центром в $(0; -5)$
и стороной 10.

(2) Заметим, что

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

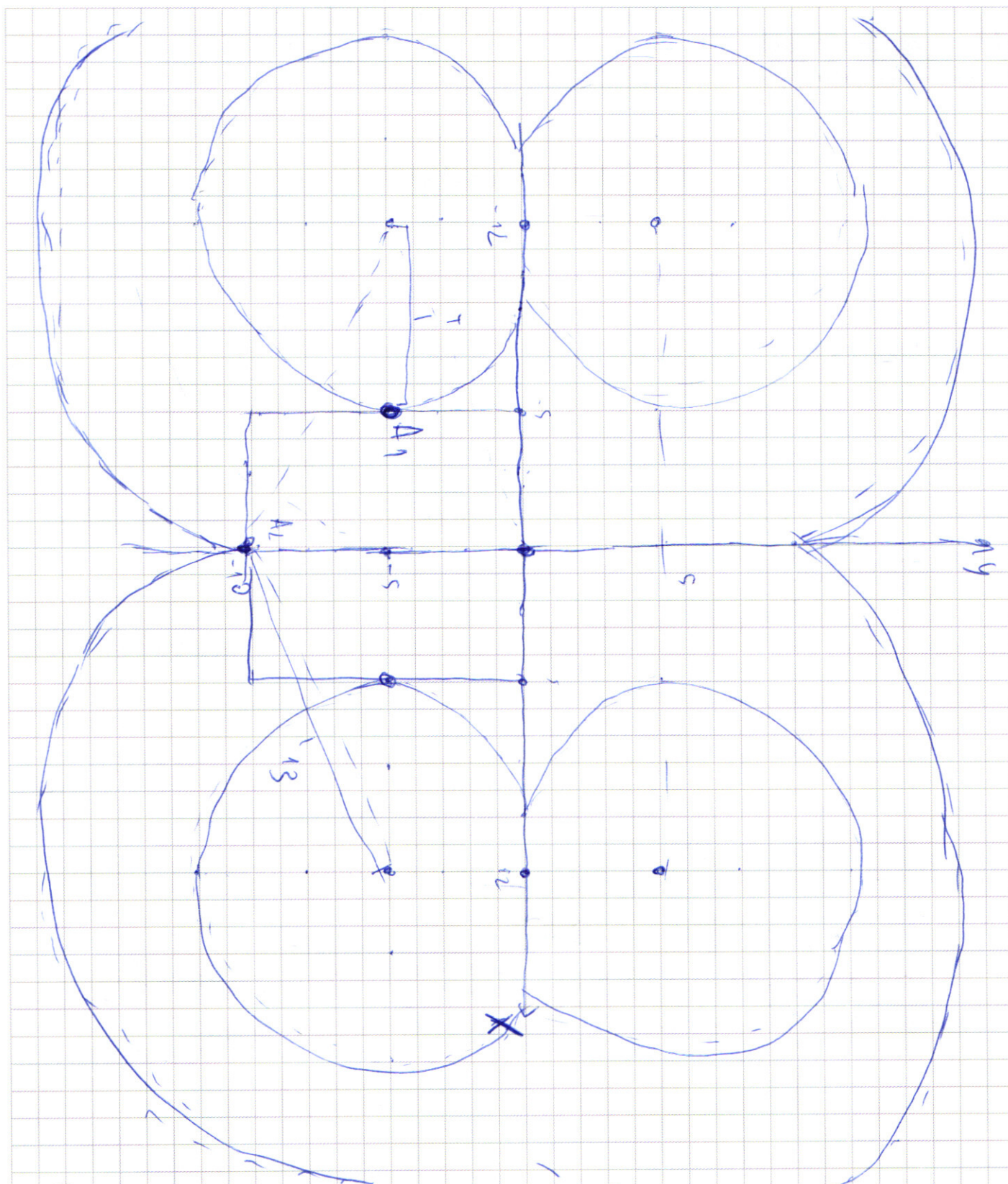
$a < 0$ - нет решений

$a = 0$ - Т. $(12; 5)$

$a > 0$ - окружность с центром $(12; 5)$ и $r = \sqrt{a}$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a - \text{это ч. отобраз. окружн. при } a > 0$$

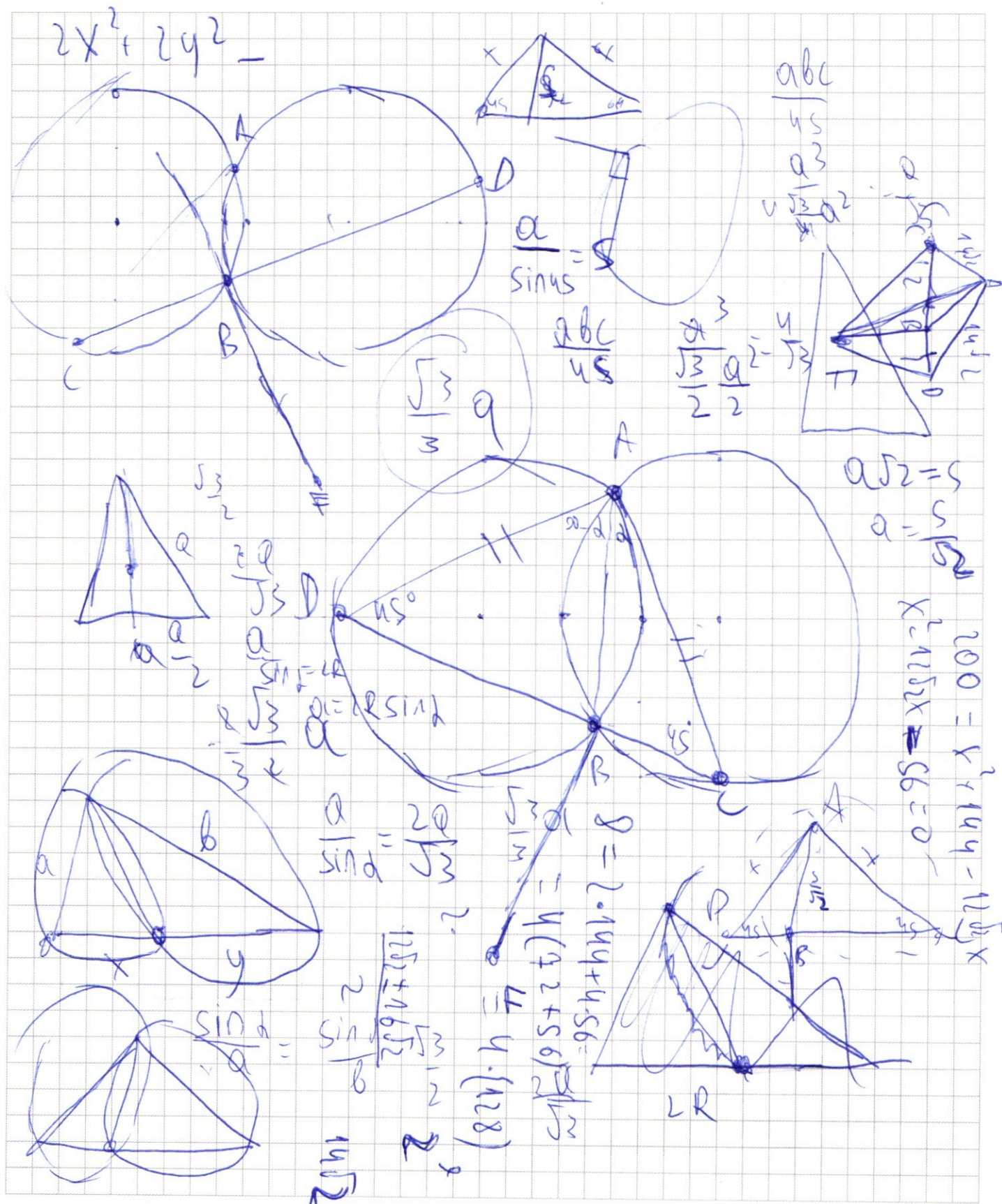
Изобразим эти два графика, кол-во
решений равно кол-ву пересечений.



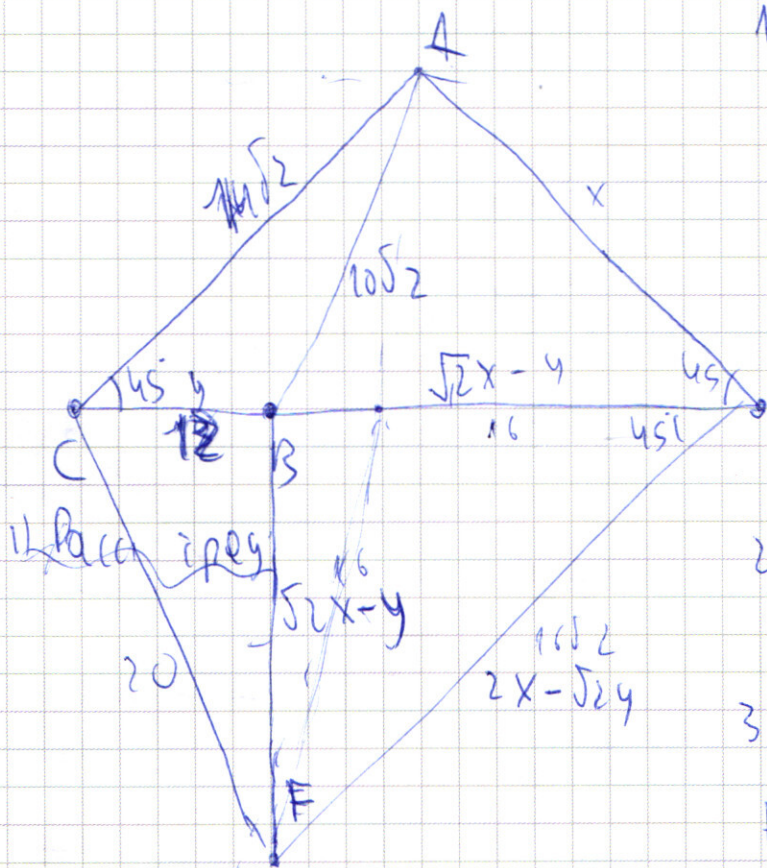
Зам. что рав. грани возможно при $\Gamma = 7$ и $\Gamma = 13$ т. А. т. А₂
 $a = 4x$ $a = 10$ $a = 16$

Ойбе: 99,169

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Nb



1) Para $\supset AC$ ~~B~~

изследванията
свързано е с това
число и опрехност

ΔABC u ΔABD uen $\times$
 mo $AC = AD \Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABD$
 pabwote $\Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ$

$$2) \quad \begin{cases} AC = AD = X \\ CB = Y \end{cases}$$

31 исторический

$$AB = 2R \cdot \sin \angle ACD = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

4) 3 am Tropen Koin

$$200 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \quad (*)$$

$$s) B_0 = \sqrt{2} X - Y \Rightarrow BF = \sqrt{2} X \cdot Y \Rightarrow CF = 2X^2 -$$

$$\underline{\underline{00 = 2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}x - y) \cdot x}}$$

$$S1 \quad GF = 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy = 2 - (x) = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GF = 20$$

01 Tonen $y = 12 \Rightarrow 4341 - x = 1452$

7) So, magnitude of $ADP = 10$, $AF = \sqrt{16^2 \cdot 2 + 14^2 \cdot 2} =$
 $= \sqrt{2 \cdot (256 + 196)} =$
 $= 2 \sqrt{128 + 98} = 2 \sqrt{226}$

$$b) S_{AFC} = \sqrt{(526 + 752 - 10)(752 + 10 - 526)(10 + 526 - 752)(10 + 752 + 526)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим что $\sqrt{4}$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} & A \\ y < 46 + 2(2^{34} - 1) \cdot 6 & B \end{cases}$$

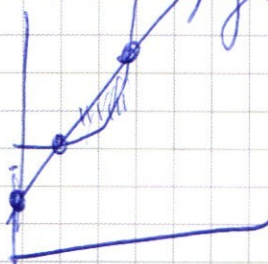
Заметим что при всех $x < 6$ $A > B$
 При $x = 6$ $A = B$

при $38 > x > 6$ $B > A$

при $x \geq 38$ $A = B$

при $x > 38$ $A > B$

Или подход к тому, $38 > x > 6$, других
 подход к функции можно увидеть это
 видно из эскиза графика



При каждом x из проме

Живых игроков равно $B - A = f(x)$

$$46 + 2^{33} \cdot x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}$$

при $x = 4$ $B - A = 2^{35} - 66$

при $x = 8$ $B - A = 2^{34} - 196$

Или же можно
 $f(7) + f(8) + f(9) + \dots$
 $\dots f(38)$

$$f(x+1) - f(x) = 2^{33} - 2 - 2^x$$

Значит можно переписать как

$$2^{35} - 66 + f(7) + f(8) + \dots + f(37) = 2^{35} - 66 +$$

$$X=7 \quad 2^7 + 3 \cdot 2^{34} \quad 62 + 14 \cdot 2^{33}$$

$$62 + 14 \cdot 2^{33} - 128 - 6 \cdot 2^{33} = 8 \cdot 2^{33} - 66$$

$$X=8 \quad 2^8 + 3 \cdot 2^{34} \quad 60 + 2^{36}$$

$$60 + 2^{36} - 256 - 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{34} - 126$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{33}$$

$$46 - 2x + (x-6) \cdot 2^{33} - 2^x = 0$$

$$46 - 2x + (x-6) \cdot 2^{33} - 2^x = 0$$

$$(x-6) = 2^k \quad 27+k = 2^k$$

$$33+k = x \quad k=5$$

$$x=9$$

$$46 + 2^{33} \cdot 9 - 18 - 2^9 - 3 \cdot 2^{34} \quad x=38$$

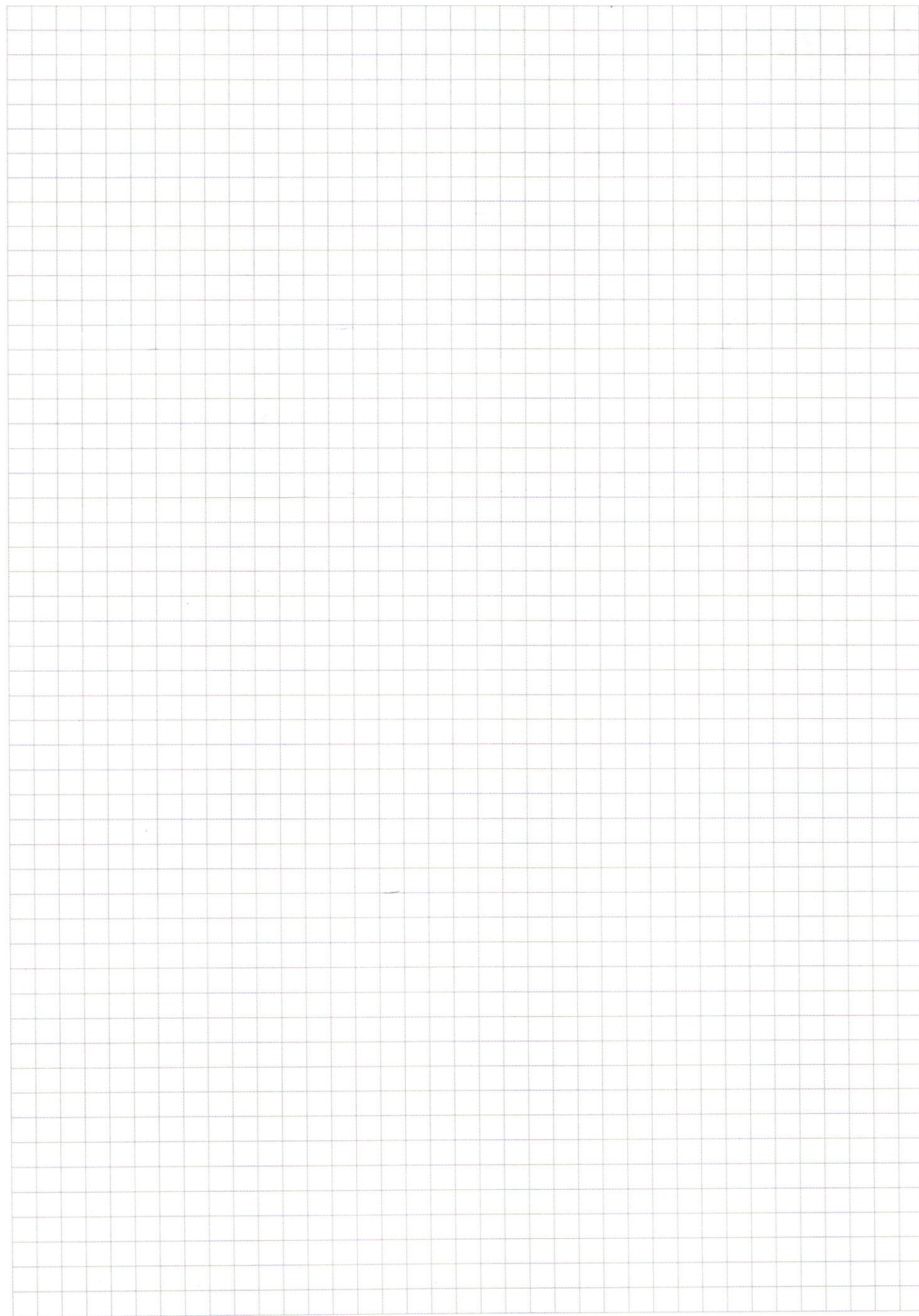
$$46 - 18 - 512 + 2^{33} \cdot 9 - 6 \cdot 2^{33} =$$

$$3 \cdot 2^{33} - 454$$

$$46 - 530 - -454$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & f(2) + f(8) + f(9) \dots f(38) = \\
 & = 46 \cdot 32 + (2^{33} - 2) \left(\frac{4 + 38}{2} \cdot 32 \right) - 2^7 (2^{32} - 1) - 3 \cdot 2^{34} = \\
 & = 46 \cdot 32 + (2^{33} - 2) (45 \cdot 16) - 2^{30} + 2^7 - 3 \cdot 2^{34}
 \end{aligned}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

0261 = 3 · 3087 = 3 · 3087 = 3 · 3 · 1029 = 3 · 3 · 3 · 343 =

$3087 \div 3 = 1029$
 $1029 \div 3 = 343$
 $343 \div 7 = 49$
 $49 \div 7 = 7$
 $7 \div 7 = 1$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3^3 \cdot 7^4$

$8! = 40320$
 $3! \cdot 3! \cdot 2! = 6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$
 $40320 / 72 = 560$

$560 = 2^5 \cdot 7$

$2 \ln x + 3 \ln y$

$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x$

$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x$

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} = \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

$2 \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$

$\cos(4x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 4x$

$2 \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$

$\sqrt{2} \sin 4x \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin 2x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2 \quad 4x = 2 \cdot 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$4x = \frac{7}{2} \cdot 2 - \frac{\pi}{2}$$

~~$$2 \cdot \sin(\frac{7}{2} \cdot 2 - \frac{\pi}{8} \pi) \cdot \cos 2 = \sin 2 \cdot 2$$~~

~~$$2 \sin 2x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)$$~~

$$2 \sin 2x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{x^{-2} \ln x}{x^{-2} \ln x} = \frac{y \ln y}{y \ln x}$$

$$\sin 4x + \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} - 4x$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \frac{y}{x^3}$$

$$\begin{array}{r} 30 \cdot 21 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

$$1680$$

$$\begin{array}{l} y^2 - y(x+y) + 2x(y-x) \\ (y-2x)(y+x-y) = 0 \end{array}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln(\frac{y}{x^3}) \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}$$

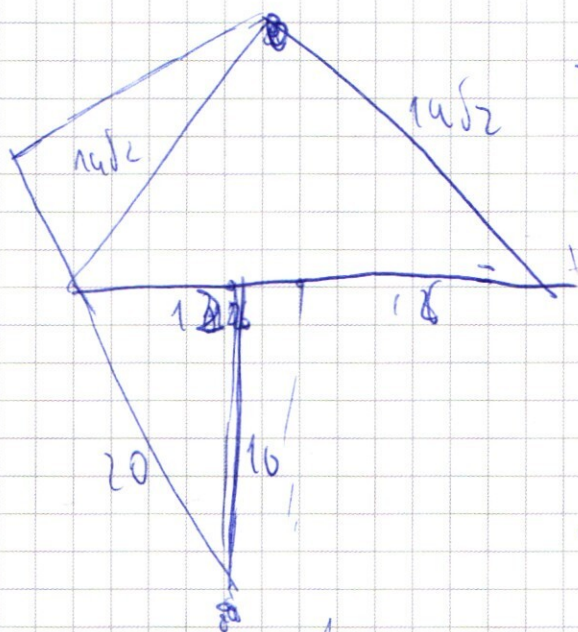
$$\frac{x^{-2 \ln x}}{x^{-2 \ln x}} = y \ln(\frac{y}{x^3}) + \ln x^4$$

$$\frac{1}{x^{-2 \ln x}} = y \ln(\frac{y}{x^3})$$

$$-\ln x^2 \cdot \ln x = \ln(\frac{y}{x^3}) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$144 + 392 - 2 \cdot 52 \cdot 1452 - 12 =$$

$$+ \begin{array}{r} 11 \\ 196 \\ \times 2 \\ \hline 392 \\ + 144 \\ \hline 536 \end{array}$$

$$- 536 - 2 \cdot 14 \cdot 12$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ + 560 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 12 \\ \hline 96 \\ + 480 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$200 = 144 + y^2$$

$$200 = 144 + y^2 - 125y$$

$$y^2 - 125y = 56 = 0$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 128 \\ + 92 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$200 = 144 + 392 - 336$$

$$y = 144 \cdot 2 + y - 56 =$$

$$= 4(72 + 56) =$$

$$= 4 \cdot 128 = 512$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}$$

$$\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{2}a} =$$

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\sqrt{226 + 752 + 10}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 12 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\sqrt{y} = 1652$$

$$1152 + 1652$$

$$1452$$

$$1252 \cdot 1452$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times 2 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y \leq 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)X$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)X$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)X$$

$$2 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2$$

$$2^{33} + 2 - 2^{34}$$

$$x = 3$$

$$\frac{76 - 2X - 2^x}{12 - 2X} = 0$$

$$4 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{34} - 4$$

$$8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{32} = a$$

$$2^{33}(x+1) - 2(x+1) - 2 - 2^{x+1} - 2^{33}x + 2x + 2^x$$

$$2^{33} - 2 - 2^x$$

$$Q(12 - 2x) > 76 - 2x - 2^x$$

$$8 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 3 \cdot 2^{33} - 6$$

$$\frac{2x + 2^x - 76}{2x - 10}$$

$$2^x + 12a < 76 + 2ax - 2x$$

$$0: X = 6$$

$$x = 10$$

$$64 + 12a < 76 + 12a - 12$$

$$x = 7$$

$$y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 7 \cdot 2^{33} - 14$$

$$1024 + 12a < 76 + 20a - 20$$

$$2a$$