# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

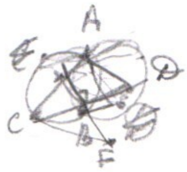
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$

4. [5 баллов] Сфера с центром $O$ вписана в трёхгранный угол с вершиной $S$ и касается его граней в точках $K$, $L$, $M$ (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол $KSO$ и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью $KLM$, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой $SO$, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, при которых система



$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF = BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$(\sqrt{17} - 1)^2 = 17 - 2\sqrt{17} + 1 = 18 - 2\sqrt{17}$

$3+5+5+5+x = 18+x$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{y^{2\lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$y^{5\lg x - 2\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3\lg x - 2\lg y} = x^{\lg x}$$

$x = 10^{\lg x}$

$x^{\lg x} = 10^{\lg^2 x}$

$y = 10^{\lg y}$

$$10^{\lg y(3\lg x - 2\lg y)} = 10^{\lg^2 x}$$

$$3\lg y \lg x - 2\lg^2 y - \lg^2 x = 0$$

$\lg x = a$

$\lg y = b$

$$3ab - 2b^2 - a^2 = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b + b}{2} = 2b$$

$$a = b$$

$\lg x = 2\lg y \Rightarrow \lg x = \lg y^2 \quad x = y^2$

$\lg x = \lg y \Rightarrow x = y$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

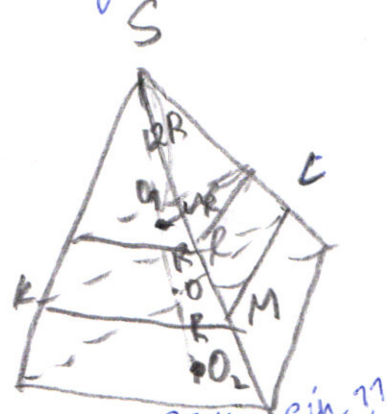
$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$y = 2$

$27 - 18 - 21 + 12 = 0$

$y = 3$

$$\frac{S O_1}{S O_2} = 2$$



$\cos 14x = \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2}\cos 11x \cdot \cos 3x + \sqrt{2}\sin 3x \sin 11x$

$ab = c - d - \sqrt{2}cd$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) $|y-3-x|+|y-3+x|=6$

1) $\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \geq 3-x \end{cases}$

$y-3-x+y-3+x=6$

$\boxed{y=6}$

2) $\begin{cases} y \geq 3+x \\ y < 3-x \end{cases}$

$y-3-x-y+3-x=6$

$-2x=6$

$\boxed{x=-3}$

3) $\begin{cases} y < 3+x \\ y \geq 3-x \end{cases}$

$-y+3+x+y-3+x=6$

$2x=6$

$\boxed{x=3}$

4) $\begin{cases} y < 3+x \\ y < 3-x \end{cases}$

$-y+3+x-y+3-x=6$

$-2y=0$

$\boxed{y=0}$

(2): $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

1) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ $(x-4)^2+(y-3)^2=a$

окр. с $O(4;3)$ и $R=\sqrt{a}$

2) $\begin{cases} x<0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ $(x+4)^2+(y-3)^2=a$

окр. с $O(-4;3)$ и $R=\sqrt{a}$

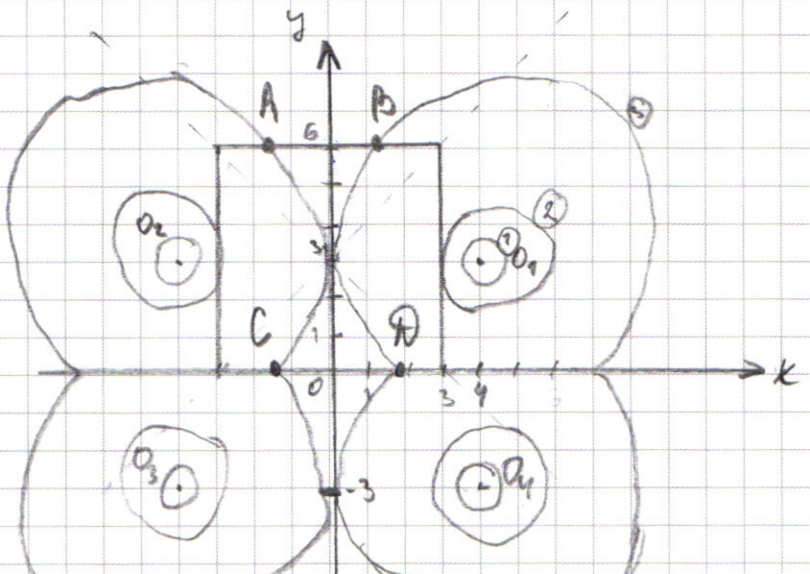
3) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y<0 \end{cases}$ $(x-4)^2+(y+3)^2=a$

окр. с $O(4;-3)$ и $R=\sqrt{a}$

4) $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$ $(x+4)^2+(y+3)^2=a$

окр. с $O(-4;-3)$ и $R=\sqrt{a}$

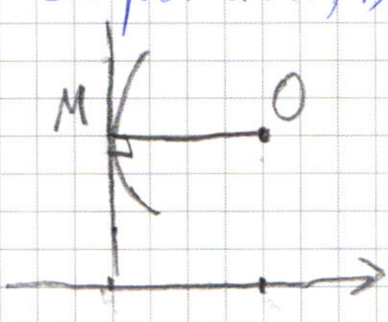
$\boxed{a\geq 0}$ (иначе $\varnothing$)




При $a<0$ $\varnothing$

при $a=0$ четыре точки, к-е не лежат на квадрате $\varnothing$

① при $a\in(0;1)$ четыре окр-ти, не имеющие общих точек с квадратом




~~сильно~~

$OM=\sqrt{(4-3)^2+(0-0)^2}=1=R \Rightarrow a=1$

② при $\boxed{a=1}$ окр-ти $O_1$ и $O_2$ кас-ся квадрата, 2 реш.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ при $R \in (1;4)$ ($a \in (1;16)$) каждая из окр-ей $O_1$ и $O_2$ пер-т квадрат в $2^{ух}$ точках $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 4 реш.

при дальнейшем увеличении $a$ ситуация аналогична до момента, пока т. A и т. B не сольются в одну т. $(0;6)$, а точки C и D в одну т. $(0;0)$.

Чтобы найти $a$, при к-х это произойдет, подставим координаты обозначенных точек в ур-е окр-ти $O_1$:

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$ прох. ч/з $(0;6)$

$4^2+3^2=a$

~~a=10~~

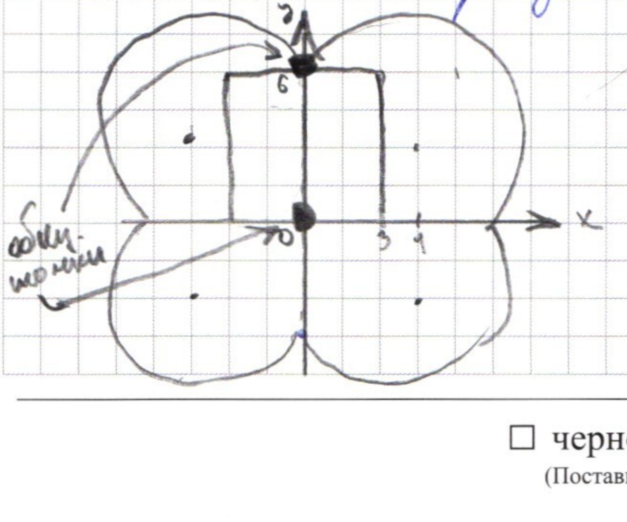
$\boxed{a=25}$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$ прох ч/з $(0;0)$

$4^2+3^2=a$

$\boxed{a=25}$

Таким образом, при $\boxed{a=25}$ 2 реш.:




при дальнейшем увеличении $a$ решений не будет (т.к. окружности будут велики и общих точек с квадратом не будет).

$\boxed{\text{Ответ: } a \in \{1; 25\}.}$

Задание №3.

$$\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1)\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 & (2)\end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0\\ x>0\\ \frac{y^5}{x}>0\\ xy>0\\ y>0\end{cases} \iff \begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$

1) : $\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy} \quad \Big| \cdot\left(\frac{x^{\lg x}}{y^{2\lg xy}}\right)$ т.к. $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$

$$\frac{y^{5\lg x}}{y^{2\lg xy}} = x^{\lg x}$$

$$y^{5\lg x-2\lg x-2\lg y} = x^{\lg x}$$

$$y^{3\lg x-2\lg y} = x^{\lg x}$$

Заметим, что $y=10^{\lg y}$, $x=10^{\lg x}$

$$10^{\lg y(3\lg x-2\lg y)} = 10^{\lg^2 x}$$

$$3\lg x\cdot\lg y-2\lg^2 y=\lg^2 x$$

$$\lg^2 x-\lg x\cdot\lg y+2\lg^2 y-2\lg x\cdot\lg y=0$$

$$\lg x(\lg x-\lg y)+2\lg y(\lg y-\lg x)=0$$

$$(\lg x-\lg y)(\lg x-2\lg y)=0$$

$\lg x=\lg y$ $\qquad\qquad$ $\lg x=\lg y^2$

$\boxed{x=y}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{x=y^2}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) подставим $x=y$ в (2):

$y^2-2y^2-4y-3y^2+12y=0$

$-4y^2+8y=0$

$-4y(y-2)=0$

$y=0$ – не подх по ОДЗ

$y=2$ – подх

$y=2 \Rightarrow x=2$ – подх

$\boxed{\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}}$

2) подставим $x=y^2$ в (2):

$y^4-2y^3-4y^2-3y^2+12y=0$

$y(y^3-2y^2-7y+12)=0$

$y=0$ – не подх по ОДЗ

$y^3-2y^2-7y+12=0$

$y^3-3y^2+y^2-3y-4y+12=0$

$y^2(y-3)+y(y-3)-4(y-3)=0$

$(y-3)(y^2+y-4)=0$

$y=3$ – подх

$x=9$ – подх

$\boxed{\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}}$

$y^2+y-4=0$

$D=1+16=17$

$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \text{ – подх} \\ y_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0 \text{ – не подх по ОДЗ} \end{array}\right.$

$y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$ – подх

$\boxed{\begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}}$

Ответ: $(2;2);(9;3);\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

и одну тройку.

Искомое число содержит цифры $\overset{3\text{шт}}{5}, \overset{3\text{шт}}{3}, \overset{2\text{шт}}{1}$ или цифры $\overset{3\text{шт}}{5}, \overset{1\text{шт}}{9}, \overset{1\text{шт}}{3}, \overset{3\text{шт}}{1}$.

Количество чисел, состоящих из первого набора цифр ($\overset{3\text{шт}}{5}, \overset{3\text{шт}}{3}, \overset{2\text{шт}}{1}$) будет равно

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$$

т.к. мы посчитали каждое число, сод. 5 3! раз

т.к. мы посчитали каждое число сод. 3 3! раз

т.к. мы посчитали каждое число, сод. 1 2! раза

Аналогично для второго набора получаем

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!}$$

Тогда всего чисел, удовлетворяющих условию:

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}+\frac{8!}{3!\cdot 3!}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot 7\cdot \cancel{8}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}+\frac{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot 5\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}}=$$

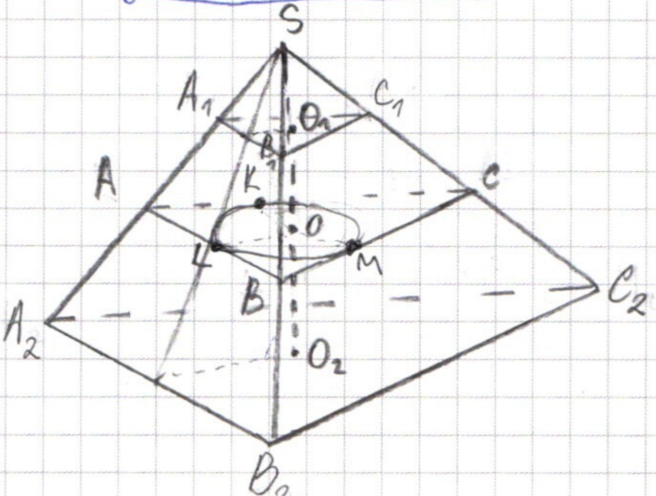
$$=2\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 7+2\cdot 2\cdot 5\cdot 7\cdot 8=16\cdot 5\cdot 7(1+2)=3\cdot 5\cdot 7\cdot 16=1680$$

$\boxed{\text{Ответ: 1680 шт.}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №4.




~~Решение~~

1) Введем обозначения: плоскости, касающиеся сферы и перпендикулярные SO – это $A_1B_1C_1$ (ближе к т. S) и $A_2B_2C_2$ (дальше от т. S), т.к. обе эти плоскости перпендикулярны SO, то $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$, а также SO явл. высотой в треугольной пирамиде $SA_2B_2C_2$. Плоскость (ABC) ~~~~ является плоскостью, содержащей т. K, L, M ($(ABC)=(KLM)$), т.е. она тоже перпендикулярна SO, а значит $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $(ABC) \parallel (A_2B_2C_2)$.

2) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ по двум углам ($\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$ (т.к. образованы ~~~~ прямыми $C_1A_1 \parallel C_2A_2$ (т.к. параллельные плоскости $(A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$ секут плоскость $SA_2C_2$ по пар-ым прямым) и ~~~~ $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (аналогично с $C_1A_1 \parallel C_2A_2$)), $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ (аналогично с $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$). Тогда

Задание №2.

(1)

$$+\ \begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\end{array}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{x+y}{2}\\ \beta=\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}}$$

(2)

$$+\ \begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{array}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{x+y}{2}\\ \beta=\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

Пусть $x=\alpha$, $y=\beta+\pi$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\cos 11x-\cos 3x-\sin 11x+\sin 3x=\sqrt{2}\cos 14x$$

$$\cos 11x-\sin 11x-(\sin 3x-\cos 3x)=\sqrt{2}\cos 14x \quad \Big|:\sqrt{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos 11x-\cos\frac{\pi}{4}\sin 11x-\left(\sin 3x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos 3x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-11x\right)-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-11x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\cos 14x$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)\cdot\cos(-4x)=\cos 14x$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{4}{1} = k^2_{под} \Rightarrow k_{под} = 2$$

Тогда подобные треугольные пирамиды $SA_1B_1C_1$ и $SA_2B_2C_2$ содержат высоты, которые относятся друг к другу с коэффициентом $k_{под} = 2$, то есть

$$\boxed{\frac{SO_2}{SO_1} = 2} \quad (1)$$

3) По условию задачи плоскость $(A_1B_1C_1)$ кас. сферы с центром $O$ в т. $O_1$, т.е. $OO_1$ – ~~радиус~~ радиус сферы; обозначим его за $R$. Тогда $OO_1 = R$. Аналогично $OO_2 = R$.

$$O_1O_2 = O_1O + O_2O = R + R = 2R$$

(1): $\frac{SO_2}{SO_1} = 2$; $SO_2 = SO_1 + O_1O_2 = SO_1 + 2R$

$$\frac{SO_1 + 2R}{SO_1} = 2$$

$$SO_1 + 2R = 2SO_1 \Rightarrow \boxed{SO_1 = 2R}$$

4) Т.к. высоты подобных пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ относятся как $\frac{SO_1}{SO} = \frac{2R}{SO_1 + OO_1} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3}$, то

площади оснований этих пирамид будут относится как $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, т. е. $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4} \underbrace{S_{\triangle A_1B_1C_1}}_{1 \text{ по усл.}} = \frac{9}{4}$

5) Рассмотрим $\triangle KSO$: $\angle SOK = 90^\circ$ (т.к. $SO$ – выс.)

тогда $tg\angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$ ($KO = R$ т.к. $KO$ – радиус сферы).

$\angle KSO = arctg\,\frac{1}{3}$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4}$; $\angle KSO = arctg\,\frac{1}{3}$.

Задание №1.

Имеем: $\overline{abcdefgh}$; при этом $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 3375$

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$

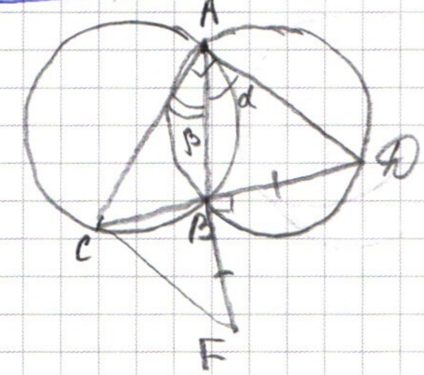
~~[illegible]~~

Т.к. произведение цифр искомого числа делится на $5^3$, то оно должно содержать цифры, делящиеся на 5, то есть цифру (-ы) 5 или 0, ~~но~~ при наличии среди цифр числа хотябы одного нуля произведение его цифр обнуляется, т. е. среди цифр иск. числа есть 5, причем ровно 3 шт. (т.к. каждая пятерка дает делимость на $5^1$, но не на $5^2$, $5^3$ и т. д.).

Аналогично получаем, что число должно содержать цифры 3 или 9, причем либо три тройки, либо одну девятку

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №6.




$\alpha = \angle BAD$
$\beta = \angle CAB$

1) По т. синусов в $\triangle ABD$:

$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow BD = 2R \cdot \sin\alpha$

2) По т. син. в $\triangle ABC$:

$\frac{BC}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow BC = 2R\sin\beta$

3) по т. Пифаг. в $\triangle CBF$ ($\angle B = 90^\circ$):

$CF^2 = BC^2 + BF^2$ ; $BF = BD$ по усл.

$CF^2 = 4R^2\sin^2\beta + 4R^2\sin^2\alpha = 4R^2(\sin^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin^2\alpha) = 4R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = 4R^2 = 100$

т.к. $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \alpha + \beta = 90^\circ$, то $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

~~Ответ: CF = 100~~ $CF^2 = 100 \Rightarrow CF = 10$

$\boxed{\text{Ответ: } CF = 10}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)