

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow$ цифры восьмизначного числа: три тройки, три пятёрки и две единицы.

Матрицу с расстановками 5 в числе. М.к. не важны порядок и само место, а важно число 3, то кол-во расстановок: C_8^3 . Теперь осталось 5 мест. Буду расставлять единицы: C_5^2 расстановок и тройки идут на оставшиеся места. Для каждой расстановки из пятёрок подходит все рас-
будет C_5^2 кол-во расстановок единиц $\Rightarrow$
всего расстановок (т.е. чисел.) $C_5^2 \cdot C_8^3 = \frac{5! \cdot 8!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5!} =$
 $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560.$

Ответ: 560 чисел.

№2.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x &= \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ -2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) &= \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) \\ (\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 7x &= -\cos 7x \\ \tan 7x &= -1 \quad \cos 7x \neq 0 \end{aligned}$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k$$

$$\begin{aligned} \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x &= 0 \\ \sin 4x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x \end{aligned}$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} k, \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2 \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^2 \lg x = y^2 \lg xy \\ y^2 \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x \\ y^2 \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x \\ y^2 \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x \\ x^2 \lg y - 2xy \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x \\ x^2 \lg y - 2xy \lg x = y^2 \lg xy \cdot x \lg x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ & x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0 \\ & D_1 = (2y+4)^2 + 12y^2 - 12y = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 12y = 16y^2 + 4y + 16 \\ & -12y = (4y^2 - 2y + 1) = (2y-1)^2 \\ & x = y+2 \pm 2(y-1) \quad \begin{cases} x = 3y+3 \\ x = -y+3 \end{cases} \end{aligned}$$

55.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

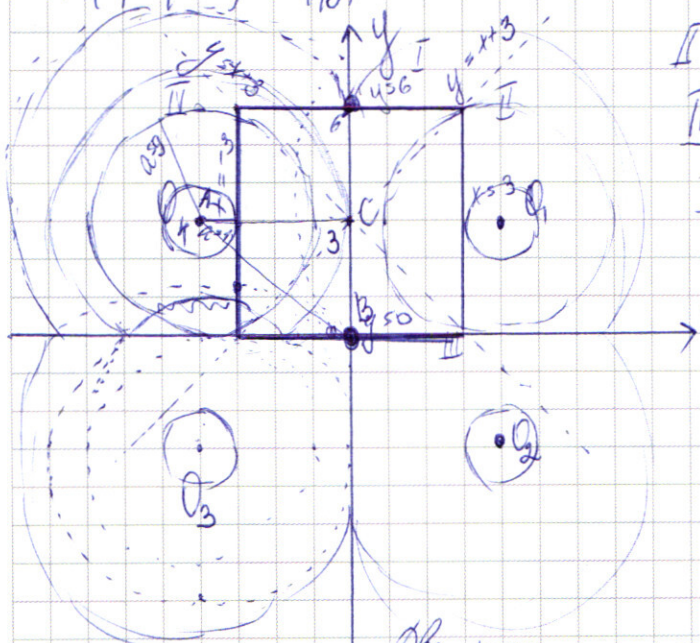
$$\textcircled{1} y = x+3, y = -x+3 - \text{нули модулей}$$

$$\text{I: } y-3-x+y-3+x \leq 6 \quad \begin{matrix} dy=12; y \leq 6. \end{matrix}$$

$$\text{II: } -y+3+x+y-3+x \leq 6 \quad \begin{matrix} dx=6, x \leq 3 \end{matrix}$$

$$\text{III: } -y+3+x-y+3-x \leq 6 \quad \begin{matrix} dy=0; y \geq 0. \end{matrix}$$

$$\text{IV: } y-3-x+y-3-x \leq 6 \quad \begin{matrix} dx=6, x \geq -3. \end{matrix}$$



$$\textcircled{2} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a - \text{четыре окружности, находящиеся в каждой из четырех частей оси координат (все в разных)} \quad \begin{matrix} x \geq 0, y \geq 0 - \text{центр } (4; 3) \quad R = \sqrt{a} \\ x \geq 0, y < 0 - \text{центр } (4; -3) \quad R = \sqrt{a} \\ x < 0, y \geq 0 - \text{центр } (-4; 3) \quad R = \sqrt{a} \\ x < 0, y < 0 - \text{центр } (-4; -3) \quad R = \sqrt{a} \end{matrix}$$

Две точки пересек. будут только при $a \geq 1$ и $a \leq 25$ (по теор. Паскаля) $a \geq 1$ и $a \leq 25$ будут четыре т. пересек. при $a \in (0; 1)$ - 0 точек пересек., и при $a > 25$ - 0 точек пересек.

Ответ: $a \leq 1, a \leq 25$.

56.

Дано:
окр. $(O_1; R_1)$
окр. $(O_2; R_2)$

Решение:

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

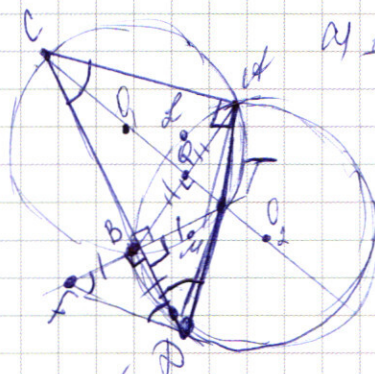


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

окр($O_1; R$), окр($O_2; R$) = A, B
 $C \in$ окр($O_1; R$)
 $D \in$ окр($O_2; R$)
 $B \in CD, \angle CDD = 90^\circ$
 $BN \perp CD, F \in BN, BF = BA$

Найти: CF

б) $BC = 6$, Найти: $S_{\triangle ACF}$



1. т.к. $\angle CDD = 90^\circ$ то $CD \perp$ окр($O_2; R$) = T ,
 при этом $T \in CO_2$,
 (CT - диаметр).
 2. т.к. $BN \perp CD$ и $BA = BF$
 Н.м. на окружности
 то т.к. BN - диаметр CO_2 ,
 то т.к. BN совпадает с CT .

3. $\angle ACF = \angle BCF$ т.к. окр. у окружностей равные
 радиусы $\Rightarrow$ окружности одинаковы и равным хордам соответствуют
 равные дуги. $\Rightarrow \angle ACB = \angle CDB = (180 - 90) : 2 = 45^\circ$.

4. $\triangle FBD$ - равноб. $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle FDB = 45^\circ = \angle TDB$ ($\angle ADC$),

значит B в TD DB - и высота и биссектр. $\Rightarrow$ она и
 медиана $\Rightarrow BT = BF$ и $\triangle CFB = \triangle CTB$ (по 2 катетам) $\Rightarrow$
 $CF = CT$, но CT - диаметр окружности ($O_1; R$) $\Rightarrow CF = 10$.

Ответ: 10.

б) 1. $CB = CD$ (т.к. $\triangle CBQ = \triangle CDQ$ (по $\triangle CBQ = \triangle CDQ$ т.к. $\angle CQB = 90^\circ = \angle CQD$,
 CQ - общая, $DQ = BQ$ (хорда, перпендикулярна диаметру))
 значит $BC = CD = 6$.

2. $\triangle CBF$, $\angle B = 90^\circ$, $CB = 6$, $CF = 10$ (из п. а) $\Rightarrow \angle BCF = \arccos \frac{6}{10} = \arccos \frac{3}{5}$

3. $\triangle ACF$, $AC = 6$, $CF = 10$; $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 45^\circ + \arccos \frac{3}{5} \Rightarrow$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \arccos \frac{3}{5}) = 30 \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) = 3 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$$

Ответ: $12\sqrt{2}$.



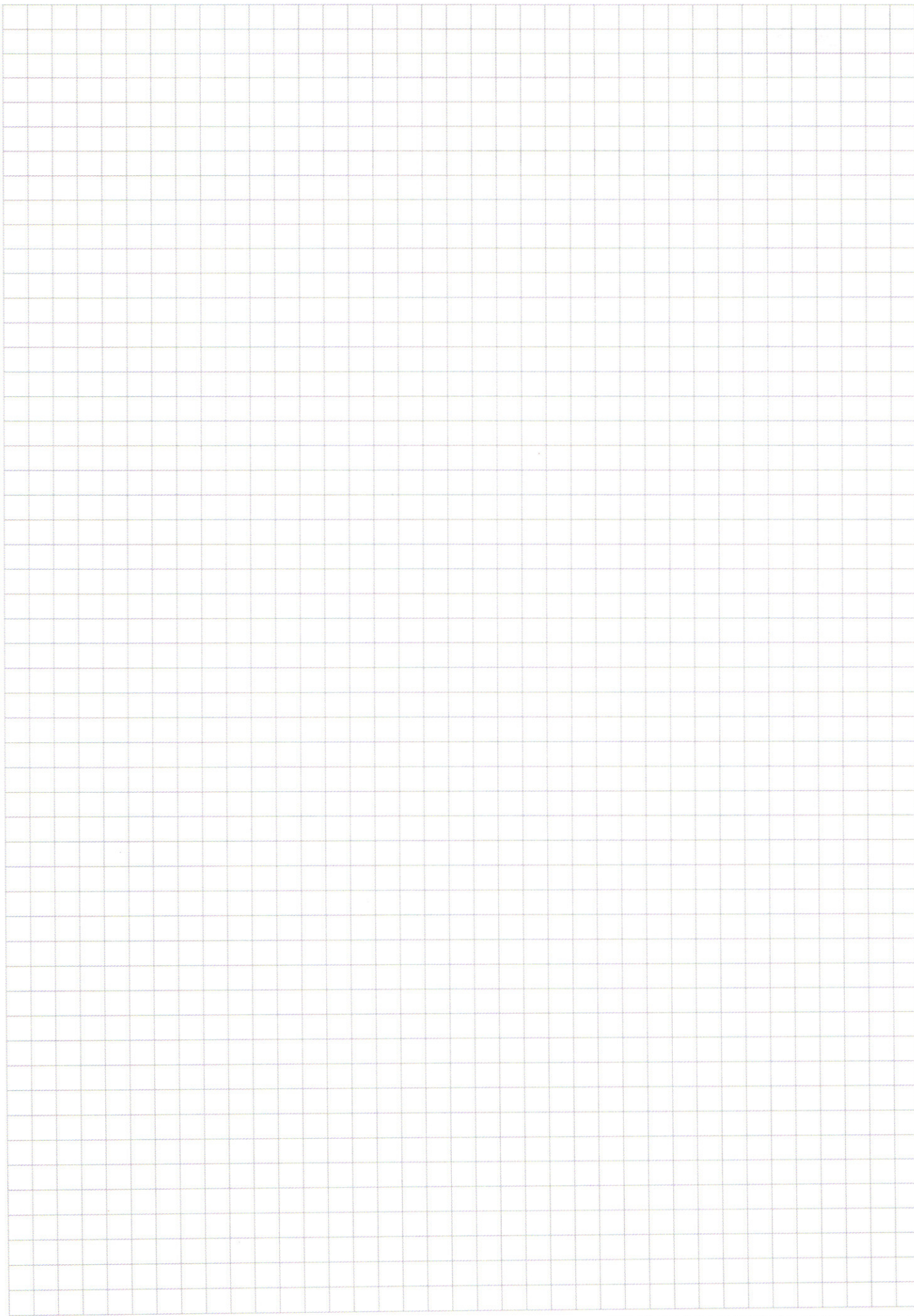
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= y^{5-2y} \\ x &= y^{5-2y} \\ y &= x^{3y+1} \\ 3y+1 &= y^{5-2y} \end{aligned}$$
$$\left(\frac{y}{x}\right)^{5-2y} = y^{5-2y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

