

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Разложим, что $16875 = 3^3 \cdot 5^4$

Разложим 16875 на простые множители: $16875 = 3^3 \cdot 5^4$.

Заметим, что 16875 в 10 -ой системе счисления не является возмозможным числом, содержащим цифру 0 (т.к. тогда произведение его цифр равно 0). Из всех десятичных цифр только 0 и 5 делятся на 5 , а т.к. произведение цифр в искомым числах делится на 5^4 и среди них нет 0 , то все данные числа содержат 5 цифр (не 4 и 5 цифр). Кроме того, произведение цифр делится на 3^3 . При этом среди десятичных цифр на

3 делятся цифры $3, 6$ и 9 , однако $6 = 2 \cdot 3$, т.е. произведение цифр числа, содержащего цифру 6 , делится на 2 , а не делится на 3^3 для искомым чисел это неверно. Значит, в записи искомым чисел содержатся либо 3 цифры 3 , а остальные цифры — единицы, либо 1 цифра 9 , 1 цифра 3 , а остальные цифры — единицы (разумеется, помимо необходимых цифр 5).

Если в числе больше 1 цифра 9 , то не делится хотя бы на $81 = 3^4$, это для искомым чисел неверно. Аналогично, если в нем содержится 2 цифры 3 и 1 цифра 9 или более 3 цифр 3 , то произведение цифр делится на $81 = 3^4$, это для искомым чисел неверно.

Тогда рассмотрим 2 случая:

- 1) В числе четыре цифры 5 , 3 цифры 3 , а остальные единицы.

Тогда позиции, на которых в записи числа стоят цифры 5 , можно выбрать $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$ способами, а позиции на которых стоят цифры 3 — $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ способами, при этом позиции для единиц заданы однозначно.

По правилу перемножения число способов составить такое число — $70 \cdot 4 = 280$.

- 2) В числе 4 цифры 5 , 1 цифра 9 и 1 цифра 3 , а остальные единицы. Аналогично пункту 1, кол-во способов выбрать позиции для цифр — $C_8^4 = 70$, для девятки: $C_4^1 = 4$, для тройки: $C_3^1 = 3$. Число таких чисел: $70 \cdot 4 \cdot 3 = 840$.

Значит, суммарное количество чисел равно $280 + 840 = 1120$.

Ответ: 1120 чисел.

Задача 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

определено на $x: x \in \mathbb{R}$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

Воспользуемся формулой дополнения угла.

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 10x \right)$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cdot \cos(2x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cdot (\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)) = 0$$

$$\left[\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} - \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0 \Rightarrow 2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{7}{2}x \right) = 0 \right.$$

$$\left[5x = \frac{\pi}{4} - \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{\pi}{8} - \frac{7}{2}x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\Rightarrow \left[x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi m, m \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1)$$

~~Ограничение на x и y : $y > 0$, $x < 0$~~

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

~~Преобразуем уравнение (2):~~

Ограничение на x и y : $y > 0$, $-xy > 0 \Rightarrow x < 0$

Преобразуем ~~выражение~~ уравнение (2):

$$\begin{aligned} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \\ 2y(y-x) + x(y-x) - 4(2y+x) &= 0 \\ (2y+x)(y-x) - 4(2y+x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cancel{(y-x)(2y+x) = 0} \quad \cancel{y-x=0}$$

$$(2y+x)(y-x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ x = y-4 \end{cases}$$

Рассмотрим эти случаи:

1) $x = -2y$. Тогда в уравнении (1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (2y)^{\lg(2y^2)} \\ (4y)^{2\lg y} &= (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{\lg 2} \\ \cancel{(2y)^{2\lg y}} \cdot \cancel{(2y)^{\lg 2}} &= \cancel{(2y)^{\lg 2}} \cdot (2y)^{\lg 2} \end{aligned}$$

$$(2y)^{2\lg y} \cdot 2^{\lg 2} = (2y)^{2\lg y} \cdot (2y)^{\lg 2}$$

$$\text{Т.к. } (2y)^{2\lg y} > 0, \text{ то } 2^{\lg 2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$2^{\lg 2} \cdot 2^{\lg 2} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2}$$

$$\text{Как известно, } a^{\lg a} = c^{\lg c a} \Rightarrow 2^{\lg 2} = y^{\lg 2} \text{ а т.к. } 2^{\lg 2} > 0, \text{ то}$$

$$2^{\lg 2} = 2^{\lg 2} \Rightarrow \lg y = \lg 2 \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что $(-4; 2)$ - решение системы

$$2) x = y - 4$$

$$\left(\frac{y-4}{y^2}\right)^4 \lg y = (4-y) \lg(4-y) \cdot y$$

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = \frac{y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}}{y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{\lg y^2} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

Заметим, что т.к. $y > 0$, $x < 0$ по ограничению, то:

$$\begin{cases} y > 0 \\ y < 4 \text{ (т.к. } x = y - 4 < 0) \\ x < 0 \\ x > -4 \end{cases}$$

Значит, с одной стороны, левая часть уравнения;

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y \leq (-4)^4$$

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (-x)^4 \lg(-x) \Rightarrow (-x)^4 \lg y = y^{2 \lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$(-x)^3 \lg y = y^{2 \lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(-x)^2 \lg y = (-x)^{\lg(-x) - \lg y} = (-x)^{\lg(-\frac{x}{y})} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\lg(-x)}$$

$$2 \lg y = \lg(-x) = \lg(4-y)$$

$$y^2 = 4-y \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{ не удовлетворяет } \text{ограничению} \\ y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

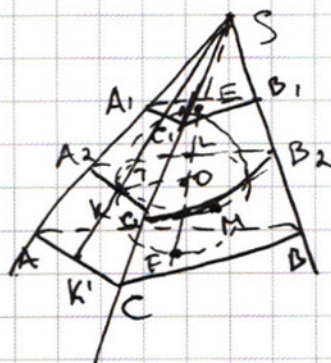
$$xy = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = y - 4 = \frac{1-8+\sqrt{17}}{2} = \frac{-7+\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-7+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \\ (-4; 2)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Знаем, что $A_1B_1C_1$ и ABC — сечения трёхгранного угла плоскостями, перпендикулярными SO ($S_{A_1B_1C_1} = 4$, $S_{ABC} = 9$). Т.к. $A_1B_1C_1 \perp SO$ и $ABC \perp SO$, то точки касания E и F сферы данных плоскостей лежат на SO как на прямой диаметра сферы. Тогда SE и SF — высоты пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ соответственно. Поскольку $A_1B_1C_1 \perp SO$ и $ABC \perp SO$, то $A_1B_1C_1 \parallel ABC$.

Значит, в частности, $B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow$ по теореме Фалеса $SB_1 : SC_1 = SB : SC$. Аналогично доказываем, что $SC_1 : SA_1 = SC : SA$ и $SA_1 : SB_1 = SA : SB$. Тогда пирамида

$SABC$ получается из $SA_1B_1C_1$ гомотетией с центром S .

Коэффициент подобия (коэффициент гомотетии) равен $\sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$. Тогда $SF = \frac{3}{2} SE$.

Знаем R — радиус сферы, $SO = x$. Тогда $x + R = \frac{3}{2}(x - R)$

$$2x + 2R = 3x - 3R$$

$$x = 5R$$

$OK \perp ASC$, тогда $OK \perp SK \Rightarrow \triangle SKO$ — прямоугольный

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

Знаем $A_2B_2C_2$ — сечение трёхгранного угла плоскостью KLM . Аналогично доказательству подобия $SABC$ и $SA_1B_1C_1$,

$SA_2B_2C_2 \sim SABC$ с коэффициентом $\frac{SK}{SK'}$, где $K' = SK \cap AC$

$\triangle K'SF$ — прямоугольный с прямым углом $F \Rightarrow SK' = SF \cdot \frac{1}{\cos \angle KSO}$

$$SK = SO \cdot \cos \angle KSO$$

$$\frac{SK}{SK'} = \frac{SO}{SF} \cdot \cos^2 \angle KSO = \frac{x}{x+R} \cdot (\cos^2 \angle KSO) = \frac{24}{25} \cdot \frac{5R}{6R} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{A_2B_2C_2} = \frac{16}{25} S_{ABC} = \frac{16 \cdot 9}{25} = \frac{144}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$
 $S_{A_2B_2C_2} = \frac{144}{25}$

Задача 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 & (2) \end{cases} \quad \text{— имеет 2 решения.}$$

Решим графически. Для построения в координатах xOy графика (1) рассмотрим 4 случая:

$$\begin{cases} |x-6-y| \geq 0 \\ |x-6+y| \geq 0 \\ |x-6-y| \geq 0 \\ |x-6+y| < 0 \\ |x-6-y| < 0 \\ |x-6+y| \geq 0 \\ |x-6-y| < 0 \\ |x-6+y| < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

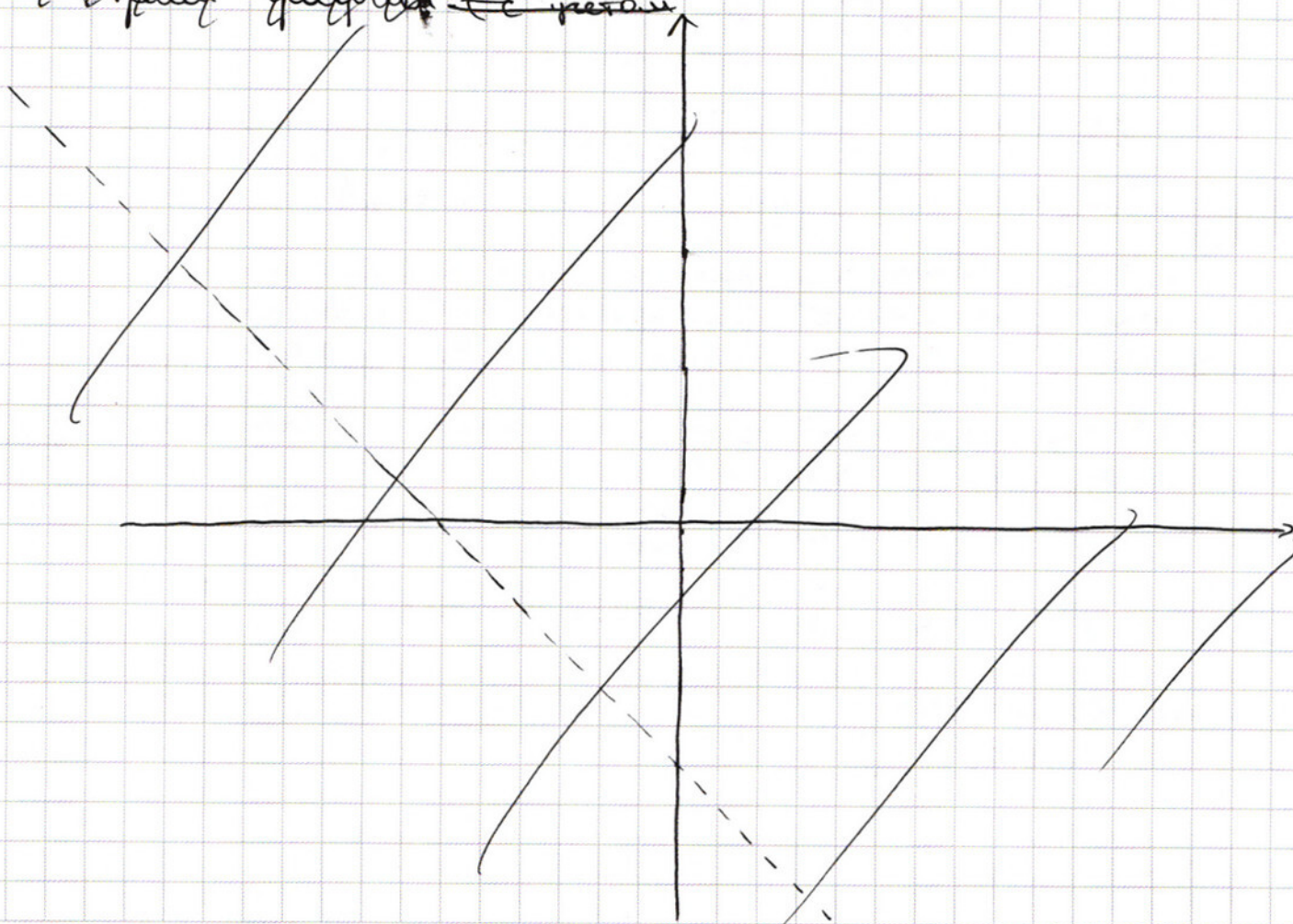
$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-y + x-6+y = 12 \\ 2x = 24 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y < -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-y -x+6-y = 12 \\ 2y = -12 \Rightarrow y = -6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+6+y + x-6+y = 12 \\ 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x-6 \\ y < -x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+6+y -x+6-y = 12 \\ 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Построим график ~~с учетом~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

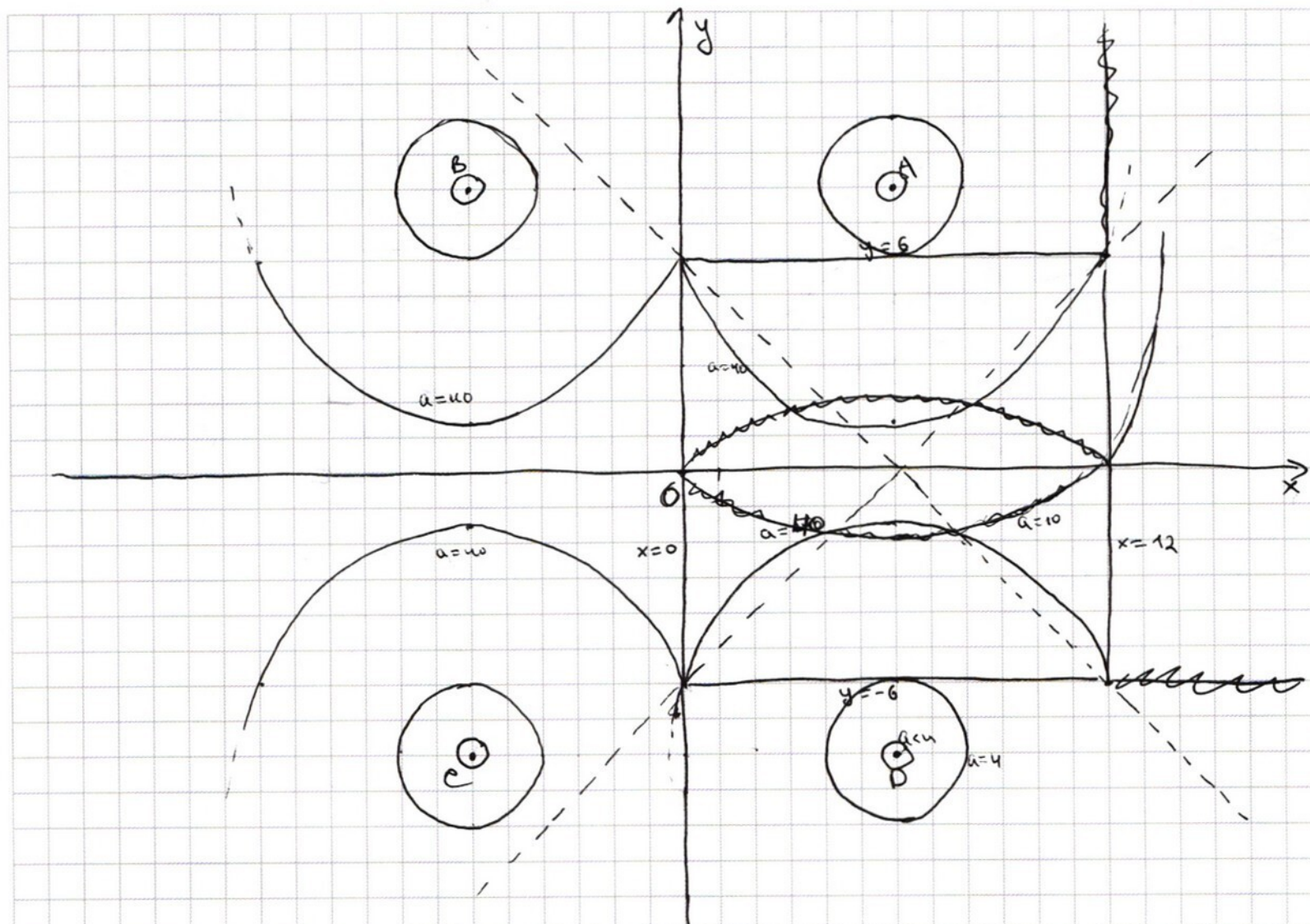


График уравнения (1) – квадрат, ~~образованный~~ образованный прямыми $x=12$, $y=6$, $x=0$ и $y=-6$. График уравнения (2) – 4 окружности с центрами A, B, C и D и радиусами 4 (при $a \geq 16$ фигура уменьшается, эти случаи рассмотрим отдельно).

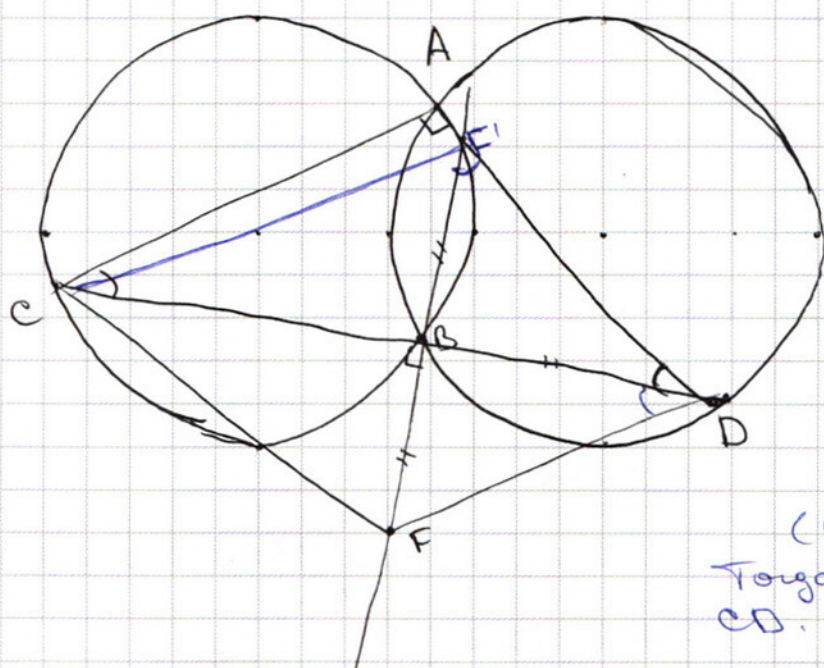
Заметим, что при $a < 4$ окружности не пересекают квадрат.

При $a=2$ 2 окружности касаются квадрата (т.е. система имеет 2 решения, и $a=4$ удовлетворяет условию).

При $a \in (4; 40]$ нижняя правая и верхняя правая окружности пересекают нижнюю и верхнюю сторону квадрата в 2 точки каждая, а значит у системы не менее 4 решений (здесь $a=40$ – случай, когда углы квадрата лежат на окружностях). Аналогично при $a \in (40; 100)$, где $a=100$ – случай, когда все эти окружности проходят через точки $(0;0)$ и $(12;0)$. При $a=100$ график пересекает квадрат только в одной точке $(12;0)$, т.к. точки пересечения окружностей на $x=0$ и $x=12$ „сливаются“. При $a > 100$ квадрат уже полностью лежит в области, ограниченной графиком уравнения (2), т.е. решений нет. Значит, подходит только $a=4$.

Ответ: $a=4$

Задача 6



Т.к. окружности имеют равные радиусы, то дуга $\widehat{AB}$ (меньшая) одной окружности равна соответствующей дуге другой. Тогда

$$\angle ACD = \angle ADC, \text{ т.е. } \triangle ACD - \text{р/б.}$$

$$\angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$$

Тогда если $C' = ADA$

Не улавливая ошибку, скажем, что BF пересекает отрезок AD (прямая $AD \cap BF = F'$).

Тогда $\triangle BF'D$ — также р/б

(в нем есть $\angle BDF' = 45^\circ$ и $\angle F'DB = 90^\circ$).

Тогда F' симметрична F относительно CD . Значит, $CF = CF'$

$$CF'^2 = AC^2 + AF'^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AF' = AD - F'D = AC - F'D$$

$$F'D = BF' \sqrt{2}$$

$$CF' =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_8 = 16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$$

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ \hline 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$$4 \cdot 16$$

$$\left(\frac{-4}{4}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ - 27 \\ \hline 1250 \\ 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \cdot 3 \\ \hline 15 \\ 18 \\ 18 \\ 3 \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5625 \cdot 3 \\ \hline 26 \\ 24 \\ 22 \\ 21 \\ 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1875 \cdot 3 \\ \hline 18 \\ 2 \\ 6 \\ 15 \end{array}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - 7x \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} - 5x \\ \alpha = \frac{\pi}{8} - 10x \end{cases}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x)$$

$$\cos 7x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

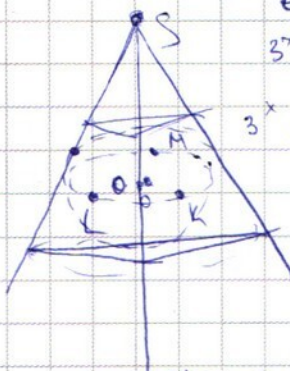
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}(x-R) \cdot 4}{\frac{1}{3}(x+R) \cdot 9}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 2 \cos 10x =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 8^{81}(4-x) < 85x = (4-x) + 81$$

$$(4-x)(3^{81} - 1) < 81 - 3^x = 3^x(1 - 3^{x-81})$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos(2x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot (\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)) = 0$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} = \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2x \\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - 5x \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{8} - \frac{7x}{2}$$

$$(3^x + 4 \cdot 3^{81})' = 3^x \cdot \ln 3$$

$$\frac{x+R}{x-R} = \frac{9}{4}$$

$$4x + 4R = 9x - 9R$$

$$5x = 13R \Rightarrow x = \frac{13}{5}R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{x} = \frac{5}{13}$$

$$SK = SM = SL = \cos \alpha \cdot R$$

$$\begin{aligned} y &\geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y &< 85 + (3^{81} - 1)x \\ x &\leq 0 \Rightarrow y \geq 4 \cdot 3^{81} + 1, y < 85 \\ x &> 0 \Rightarrow y \geq 4 \cdot 3^{81} + 1, y < 85 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 = 4x - 8y = 0$$

$$0 \leq 3, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$y \geq 3 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 + 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{4} = 3 + 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$y < 5 + (3^{\frac{1}{2}} - 1)x$$

$$x^{\lg y} = y^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{(-x)^{\lg y}}$$

$$\frac{(-x^3)^{\lg y}}{(-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{\lg y}} = \frac{(-x^3)^{\lg y}}{(-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{\lg y}}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}}$$

$$x^4$$

$$x^4$$

$$x^{\lg y} \cdot y^{-\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{|x-6-y|}{(x-6)^2} + \frac{|x-6+y|}{(y-6)^2} = 4$$

$$\begin{cases} x-6 \geq y \\ x-6 \leq y \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x = y - 4$$

$$(4-y)^{\lg y} = y^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(y-4)^{\lg y} = (4-y) \cdot y^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$4y$$

$$2y(y-x) + x(y-x) - 4(2y+x)$$

$$(4-y)^3 \lg y = y^2 \lg y \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(y-x)(2y+x) - 4(2y+x) = 0$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{\lg y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(4-y)^3 \lg y - \lg(4-y) = y^2 \lg y$$

$$(2y+x)(y-x-4) = 0$$

$$(4-y)^{\lg y^2} = y^2 \lg y = y^2 \lg y^2$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$a^{\lg c} = a^{\frac{\lg a}{\lg a}} = c^{\lg a}$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(4y)^{2 \lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{2 \lg y}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(2y)^{2 \lg y} \cdot 2^{2 \lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{2 \lg y}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$y^{\lg 2} = 2^{\lg y}$$

$$\frac{(4-y)^{\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{\lg y}} = y^{\lg y}$$

$$(-x)^{\lg y} (-x^2 \lg y - y^2 \lg y \cdot (-x)^{\lg(-x)}) = 0$$

$$2^{\lg y} = 2^{\lg 2} \Rightarrow \lg y = \lg 2 \Rightarrow y = 2$$

$$y^2 \lg y \cdot (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} = 64^{\lg 2} = 4^{\lg 8} = 4^{\lg 2^3} = 64^{\lg 2}$$

$$\left(\frac{x^4}{x^2 \lg x + 46}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x(x+1))}$$

$$(-x)^{2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot y^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\frac{(-x)^{\lg y}}{(-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$2(x^2 + 8x + 16) - x(x+4) - x^2 - 4x - 8x - 32 = \frac{14}{196}$$