

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

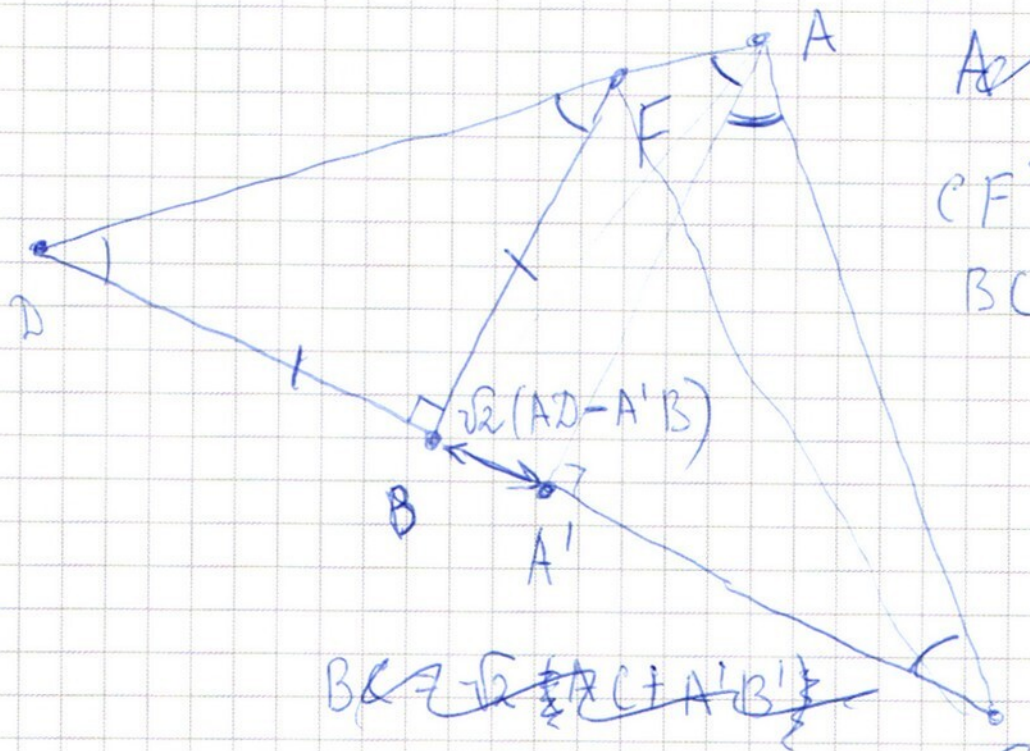
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ пр-е

$F \in AD$, ~~$AB \Rightarrow AD \sin 45^\circ = \frac{2R}{\sqrt{2}} \Rightarrow R$~~



~~$AD \neq F$~~ ~~ровны~~

$$CF^2 = BF^2 + BC^2$$

$$BC = DC - BF$$

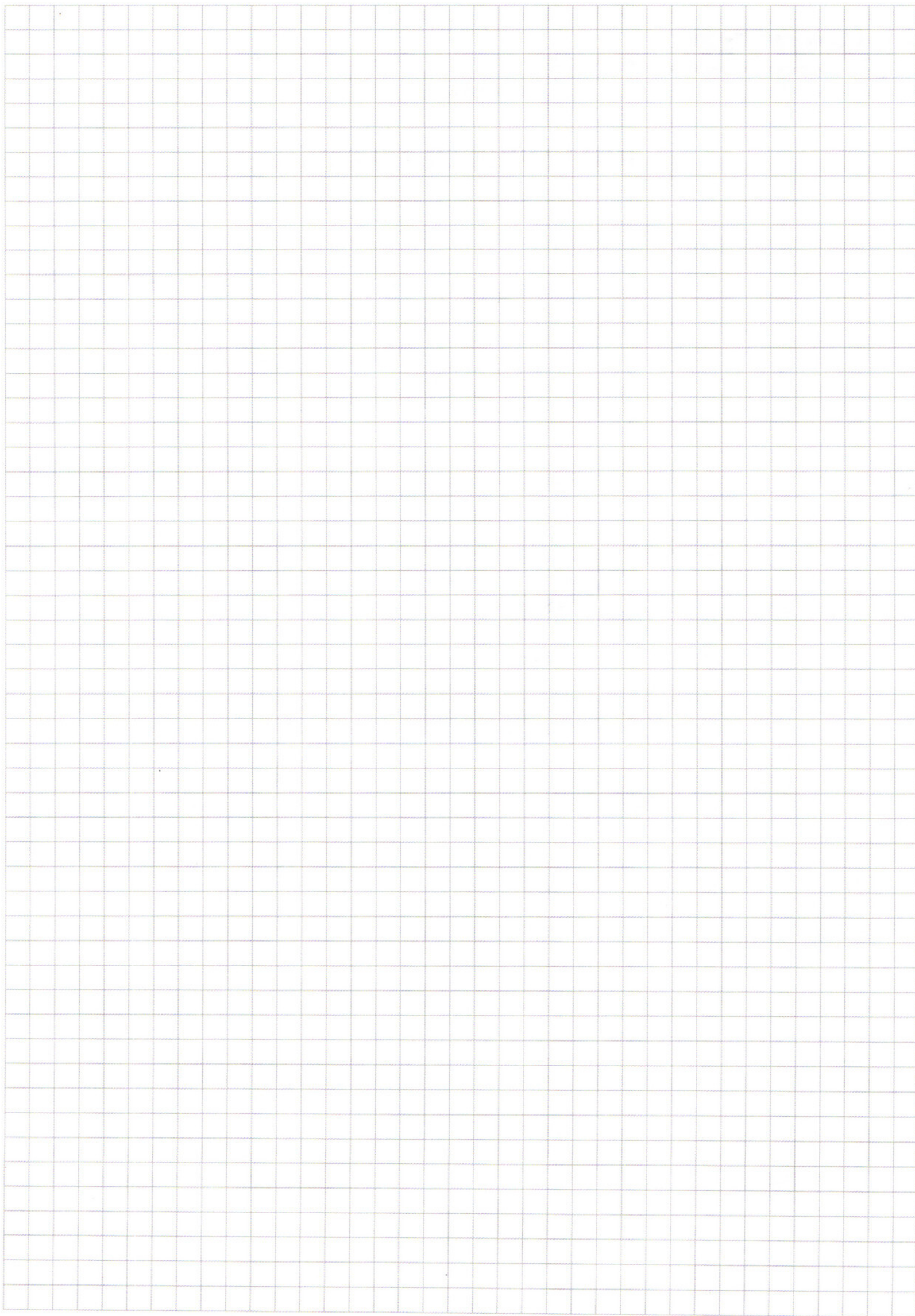
~~$BC = \sqrt{2}(AC + A'B)$~~

~~$BC^2 = 2AD^2$~~

$$(\frac{2F}{\sqrt{2}})^2 + (AC - \sqrt{2} - DF\sqrt{2})^2 =$$

~~$BC^2 = 2AD^2$~~

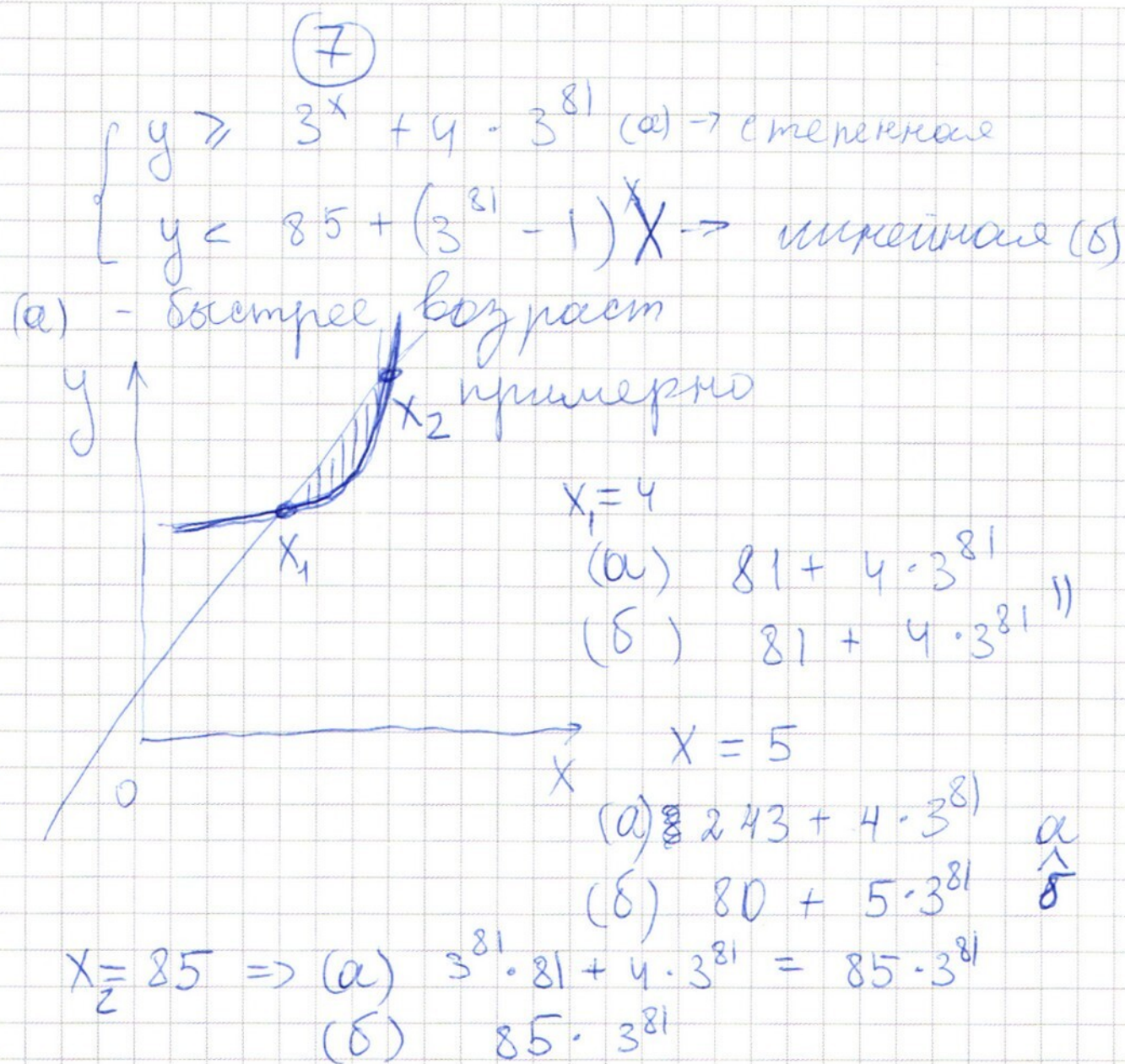
$$= CF^2 = 4R^2$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} \text{Разн-во пар} &= \sum_{i=5}^{84} (85 + (3^{81} - 1)i - 3^i - 4 \cdot 3^{81}) = \\ &= \sum_{i=5}^{84} (85 - 3^i + 3^{81} - 4 - i) = \sum_{i=5}^{84} (-3^i) + \\ &+ 85 \cdot 80 + \sum_{i=5}^{84} i \cdot 3^{81} - 80 \cdot 4 \cdot 3^{81} - \sum_{i=5}^{84} i \end{aligned}$$

пр-е даде

(7) пр-е

$$-\sum_{i=5}^{84} 3^i = \frac{-243(1-3^{80})}{1-3} = -\frac{243(1-3^{80})}{2}$$

$$\sum_{i=5}^{84} i = \frac{(5+84) \cdot 80}{2} = 89 \cdot 40 = 356$$

Умножив: $\sum_{i=5}^{84} (85 + (3^{81}-1)i - 3^i - 4 \cdot 3^{81}) =$

$$= (85 - 4 \cdot 3^{81})80 + (3^{81}-1)356 - \frac{243(1-3^{80})}{2} =$$

$$= 680 - 320 \cdot 3^{81} + 356 \cdot 3^{81} - 356 -$$

$$-\frac{243}{2} + \frac{3^{81} \cdot 81}{2} = 3^{81} \left(36 + \frac{81}{2} \right) + 314 - \frac{243}{2} =$$

$$= 3^{81} \frac{153}{2} + \frac{375}{2}$$

Ответ: $\rightarrow$

(6) пр-е

в таком случае

$$AB = \sqrt{2} R$$

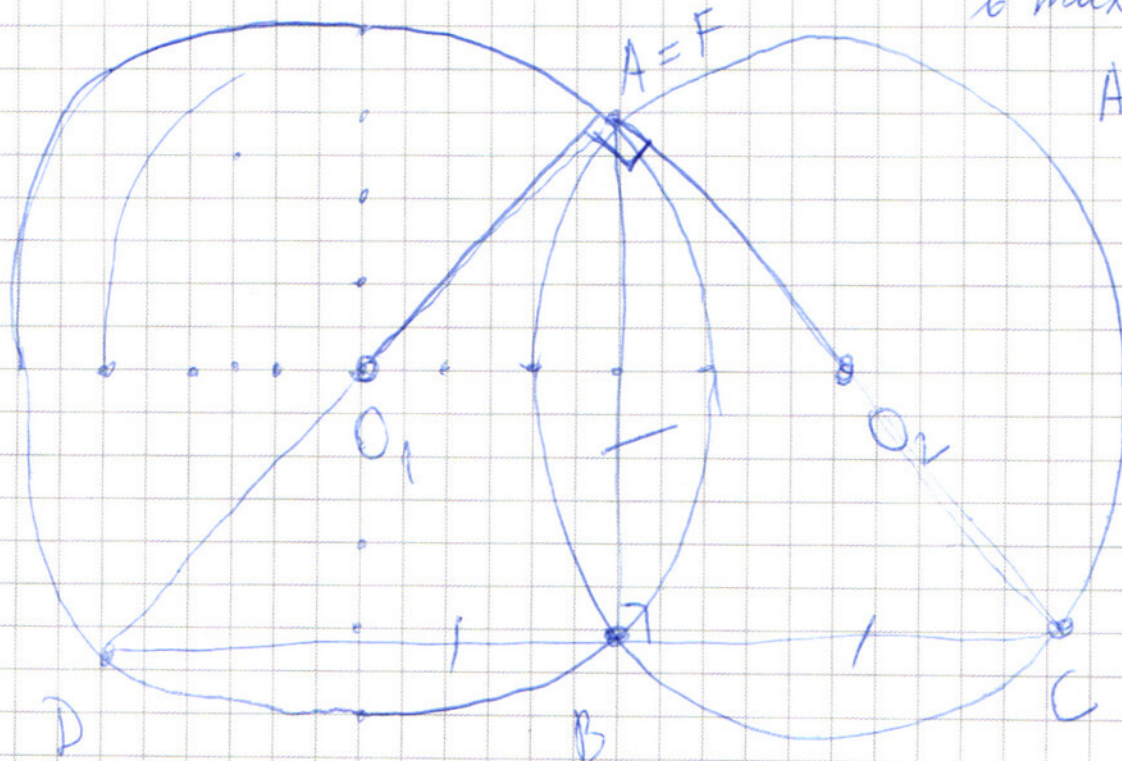


Ответ:

$$AB \neq$$

$$AC \neq$$

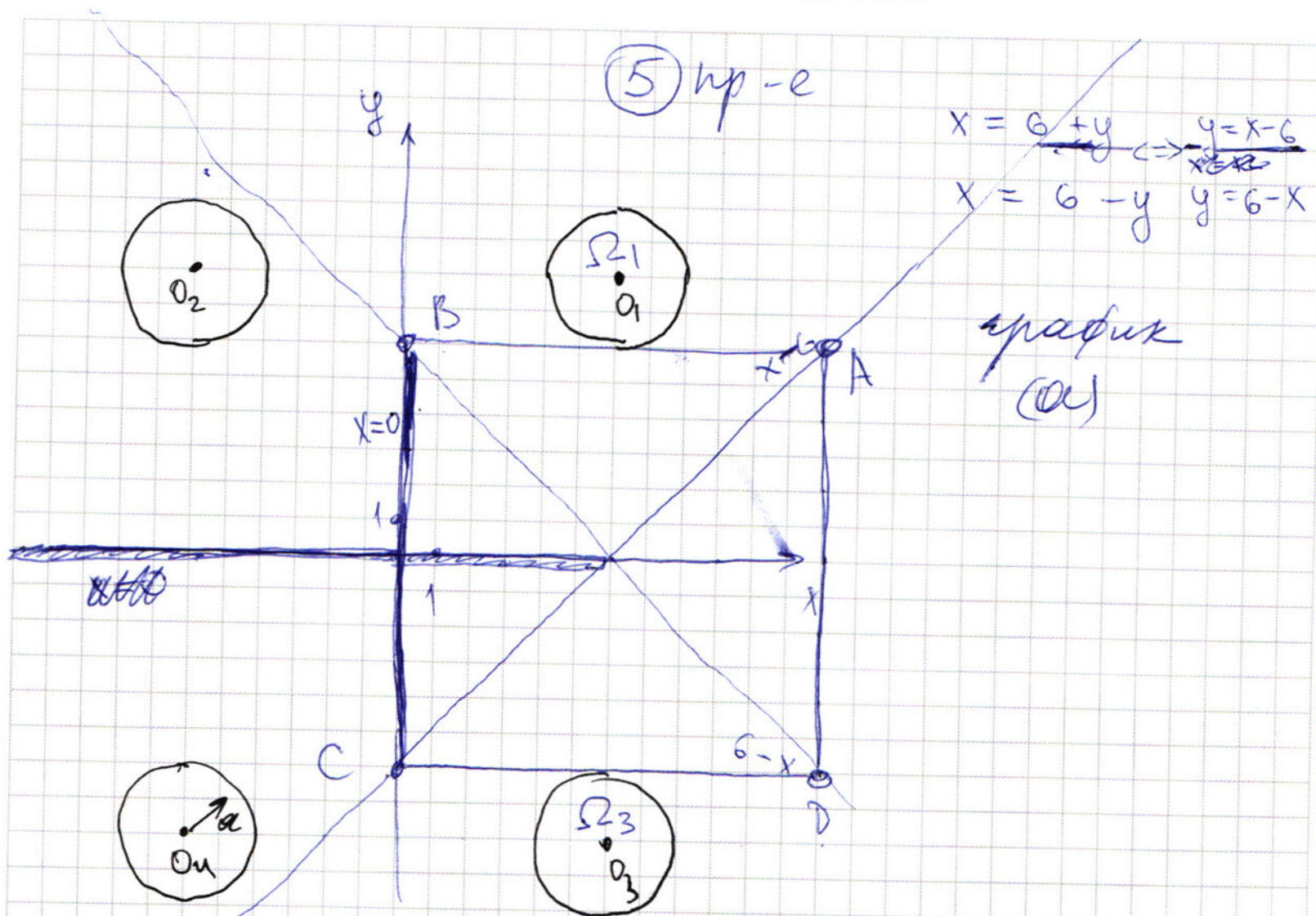
$$CF = 2R$$



пр-е данне



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Отсюда видно, что два решения
только, если $\{O_4, A = a$

$$O_4 A = \sqrt{18^2 + 74^2} = \sqrt{324 + 196} = \sqrt{520}$$

Очевидно $D_3 A$ и $D_3 B < D_4 A \Rightarrow \Omega_3 \cap ABCD$.
Аналогично с Ω_1 .

Problem: $\begin{cases} a = 2 \\ a = \sqrt{520} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (a) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad 2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x &= 0 \\ D_y &= x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = \\ &= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{x+8 - 3x-8}{4} = -\frac{x}{2} \quad (1)$$

$$y_2 = \frac{x+8 + 3x+8}{4} = x+4 \quad (2)$$

$$(1) \quad y = -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{4x^4}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(-\frac{x^2}{2})}$$

~~lg(-x/2)~~ • $\lg(-\frac{x}{2})$ - существует

$$\downarrow \\ x \leq 0$$

• $\lg(-\frac{x^2}{2})$ - существует $\Rightarrow x$ подбирается не $\exists$.

$$(2) \quad y = x+4$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

~~lg(x+4)~~ ~~lg(-x(x+4))~~

$$\lg(x+4) \Leftrightarrow x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$

пр-е далее $\exists \lg(-x(x+4)) \Leftrightarrow -x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 0)$

④ np-e)

$$\frac{S_{\text{ок}}}{S(\Psi)} = \frac{25r^2 \cos^2 \gamma}{(6r)^2 / \cos^2 \gamma} =$$

$$PS = SQ + 2r = 6r$$

$$\left(\frac{24}{25}\right)^2 \frac{1}{36}$$

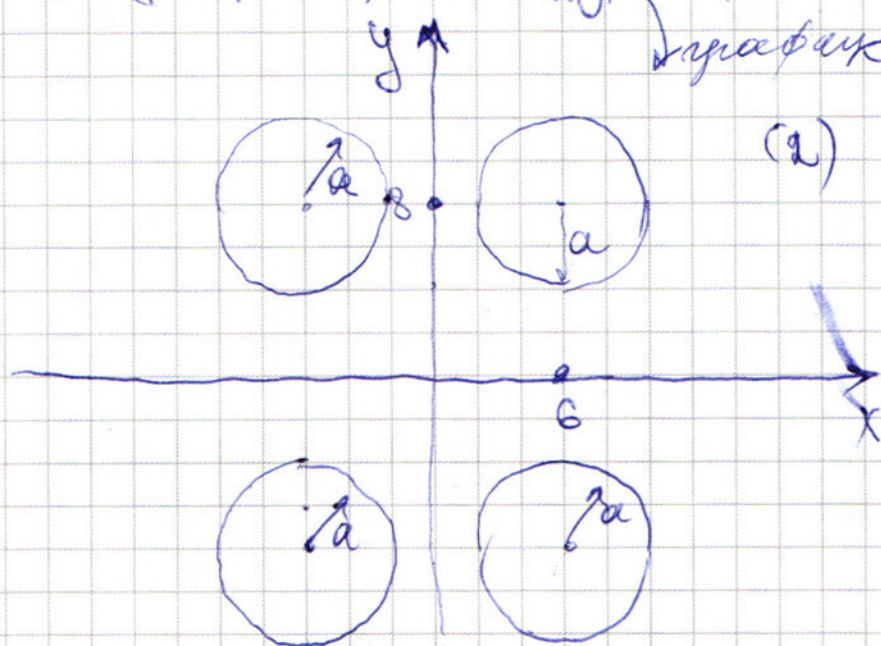
$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

$$SO = SQ + r = 5r$$

$$S_{\text{ок}} = \pi \cdot \frac{24 \cdot 24 \cdot 25}{25 \cdot 25 \cdot 36} = \frac{144 \cdot 25}{625} = \frac{144}{25} = 5 \frac{19}{25}$$

⑤

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$



$$(1) \begin{cases} x > 6+y & 2x - 12 = 12 \\ x > 6-y & 2x = 24 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x < 6+y & -2x + 12 = 12 \\ x < 6-y & x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x \geq 6+y & -2y = 12 \\ x \leq 6-y & y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6+y & 2y = 12 \\ x \geq 6-y & y = 6 \end{cases}$$

np-e
рамки
стр 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{1} \quad 16875 = 5^4 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 3 \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

Два варианта представления в виде произведения цифр:

$$\begin{cases} 5^4 \cdot 3^3 & (a) \\ 5^4 \cdot 3 \cdot 9 & (b) \end{cases}$$

а) всего 7 цифр замета $\Rightarrow$ еще одна цифра = 1.
(345)
 $1 - 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow$ кол-во таких чисел =

$$= \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

перестановки

б) $5^4 \cdot 3 \cdot 9$ - 6 цифр определено, остальных - единиц: $5^4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{кол-во таких чисел} = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 20 \cdot 42 = 840$$

перестановки

Итого: $840 + 280 = 1120$ чисел $\rightarrow$ Ответ: 1120

(2)

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 10x = 2 \cos 2x \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(10x + \frac{\pi}{2})$$

$$2 \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos 2x \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) (\sin(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 2x) = 0$$

$$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) (\cos(\frac{\pi}{4} - 5x) - \cos 2x) = 0$$

$$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) (-2) \sin(\frac{\frac{\pi}{4} - 5x - 2x}{2}) \sin(\frac{\frac{\pi}{4} - 5x + 2x}{2}) = 0$$

$$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{8} - 3,5x) \sin(\frac{\pi}{8} - 1,5x) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$$

$$k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - 3,5x = 2\pi k_2$$

$$\frac{\pi}{8} - 3,5x = \pi + 2\pi k_3 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{8} - 1,5x = 2\pi k_4$$

$$\frac{\pi}{8} - 1,5x = \pi + 2\pi k_5$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k_1 + \frac{\pi}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{4\pi}{7} k_2$$

$$x = \frac{\pi}{28} - \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} k_3 = -\frac{7\pi}{28} + \frac{4\pi}{7} k_3 = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{7} k_3$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} k_4$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} k_5 = -\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} k_5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ пр-е

$$x \in (-4; 0)$$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2} \right) \lg(x+4) = (-x)^{\lg(-x) + \lg(x+4)}$$

$$x^4 \lg(x+4) (x+4)^{-2 \lg(x+4)} = x^{\frac{4 \lg(x+4)}{\lg(x+4)}} \frac{2 \lg(x+4) 10}{\lg(x+4)} =$$

$$= x^{\frac{4 \lg(x+4)}{100}} =$$

$$\frac{100 x^{\frac{4 \lg(x+4)}{100}}}{100} = (-x)^{\frac{\lg(-x)}{(-x)} \frac{\lg(x+4)}{(-x)}} =$$

$$\uparrow x \neq 0$$

$$\frac{100 (-x)^{\frac{4 \lg(x+4)}{100}}}{100} =$$

$$\frac{x^4 \lg(x+4)}{(x+4)^{-2 \lg(x+4)}} =$$

$$x^4 \lg(x+4) (x+4)^{-2 \frac{1}{\lg(x+4)} 10} = (-x)^{\frac{1}{\lg(x+4)} 10} (-x)^{\lg(x+4)}$$

$$\uparrow x < 0$$

$$(-x)^{\frac{1}{\lg(x+4)} 10} (-x)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)} \left| x(x+4)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}} \right|$$

$$(-x)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}} (x+4)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)} (x+4)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}}$$

$$(-x)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}} (x+4)^{-2 \lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x)} \left| \frac{1}{\lg(-x)} \right|$$

$$(-x)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}} \lg(-x) = 1$$

$$\frac{(-x)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}}}{(-x)^{\frac{3 \lg(x+4)}{10}}} \frac{-2 \lg(x+4)}{\lg(-x)} = 1$$

пр-е same

~~Equation~~ $(x+4)^3 (x+4)^{-2 \log_{(-x)}(x+4)} = 1$
 $(x+4)^{3 - 2 \log_{(-x)}(x+4)} = 1$

~~$3 - 2 \log_{(-x)}(x+4) = 0$~~ $= x+4$

~~$-2 \log_{(-x)}(x+4) = -x-1$~~

~~$\log_{(-x)}(x+4) = -\frac{x+1}{2}$~~

~~$(-x)^{-\frac{x+1}{2}} = x+4$~~

~~$\frac{1}{(-x)^{\frac{x+1}{2}}} = x+4$~~

~~$\frac{1}{(-x)^{\frac{x+1}{2}}} - x = 4$~~
 ~~$1 + (-x)^{\frac{x+3}{2}} = 4(-x)^{\frac{x+1}{2}}$~~
 ~~$1 + (-x)^{\frac{x+3}{2}} - 4(-x)^{\frac{x+1}{2}} = 0$~~

$\begin{cases} (x+4) = 1 \\ 3 - 2 \log_{(-x)}(x+4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \in (-4; 0) \\ (-x)^{\frac{3}{2}} = x+4 \Rightarrow \end{cases}$
 $\Rightarrow -x^3 = x^2 + 8x + 16$ $\xrightarrow{\text{убав}} \xrightarrow{\text{возвр}} \Rightarrow \text{1 решение}$
 $x = -2$

$8 > 4 - 16 + 16 \Rightarrow x = 2 - \text{не пофх}$

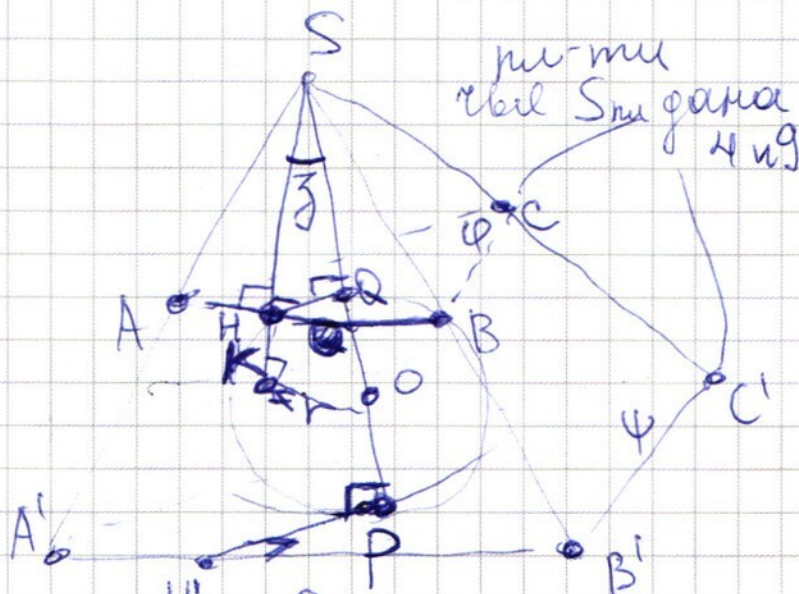
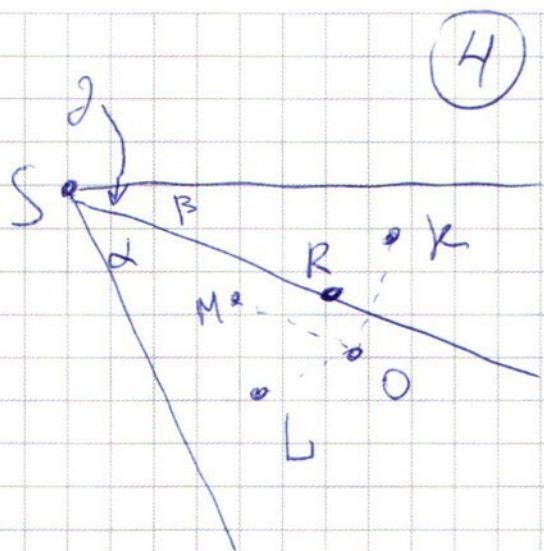
$x = -1 \quad 1 < 1 + 8 + 16$

$x = -\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} = 2 - 8\sqrt{2} + 16$

$10\sqrt{2} < 18$

$\bullet x = -3 \Rightarrow y = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



- Эти плоскости $\parallel$ тк. $H' \perp SO$.

O - равноудалена от всех граней тетраэдра $\Rightarrow OL = OM = OK \Rightarrow \triangle OMS = \triangle OKS = \triangle OLS \Rightarrow$
 SO - общее $\Rightarrow$ прилежащие

$$OL \perp m \perp$$

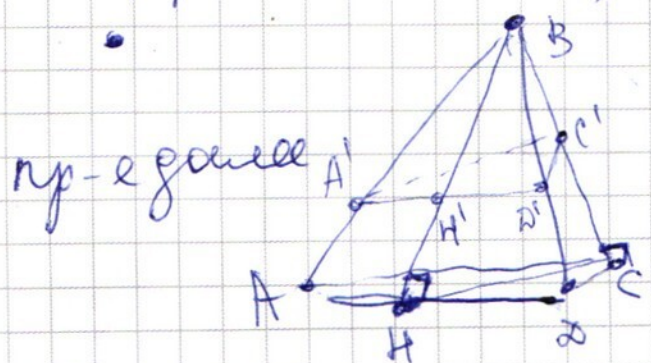
$$OM \perp m \perp$$

$$OK \perp m \perp$$

$$\Rightarrow KS = MS = LS$$

- Возьмем точку R на ребре, тогда RK и RL - касательные $\Rightarrow RK = RL$, SR - общее, $SK = SL \Rightarrow \triangle SRK = \triangle SRL$ всегда

- Тк. m - m или m и l дана касательная сфере $\Rightarrow SQ \perp \varphi$, $SP \perp \psi$.



Рассмотрим тетраэдр:

$$BC \perp (ADC)$$

$$BH \perp AD$$

$$S_{A'D'B} / S_{ADB} = \frac{BH'}{BH} \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \frac{BC'}{BC}$$

④ пр-е

Из предыдущего пункта $\Rightarrow$ ~~$S(Q) = SP$~~

• По теореме о 3х перпенд. $\Rightarrow SK \perp AB$

$\angle OSK = \angle$ ~~$\angle$~~

$S_{ABQ} = \frac{1}{2} AB \cdot QH = \frac{1}{2} k^2 A'B' \cdot PH' \Rightarrow$
 $\Delta SAB \sim \Delta SA'B' \text{ с к.}$

$\Rightarrow \frac{S(Q)}{S(P)} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ $\Delta SQH \sim \Delta SPH' \text{ с к.}$

т.к. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \text{ с к.}$

$\sin \angle = \frac{HQ}{SH} = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{SQ+r} = \frac{k \cdot HQ/k}{SQ+2r}$

SO - равноудалена от точек $\Rightarrow$

$\sin \angle = \frac{r}{SQ+r} = \frac{HQ}{k(SQ+2r)} = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$

$PS = \frac{3}{2} SQ \Rightarrow \frac{SQ}{2} = 2r$

$SQ+2r = PS$

$r = \frac{SQ}{4}; SQ = 4r$

• $\frac{S_{сечении(KLM)}}{S(P)} =$

сечение KLM тоже симметрично относительно OS: $SL = SK = SM$ доказывалось ранее

$= \frac{(KS)^2}{(SM)^2} = \frac{(SO \cos \angle)^2}{(PS/\cos \angle)^2} = \frac{KO}{L SO} = \frac{MSO}{\angle} = \angle$

$\frac{S_{сеч(KLM)}}{S(P)} = \frac{(KS)^2}{(SM)^2} = \frac{(SO \cos \angle)^2}{(PS/\cos \angle)^2}$

$KO = r$

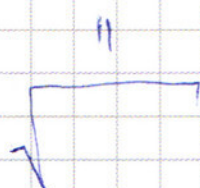
пр-е ранее

13



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{y}{2} \right)$$



$$\frac{1+\cos x}{2} \frac{1+\cos y}{2}$$

$$1 + \cos x + \cos y + \cos x \cos y -$$

$$628 - 200 - 43 = 400 - 15 = 375$$

$$1 + \cos x + \cos y - \cos x \cos y$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 10x = \sin \left(10x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} (x-y)^2 = \frac{1}{2} x^2 - xy + \frac{1}{2} y^2$$

$$2y^2 + y(-x-8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D_y = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$$

$$\frac{24-2}{24-2}$$

$$y_1 =$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\begin{aligned}
 & (-x)^{\frac{3 \log(x+4)}{\log(-x)}} - \frac{2 \log(x+4)}{\log(-x)} = 1 \\
 & (-x)^{3 \log(x+4)} - 2 \log_{(-x)}(x+4) = 1 \\
 & (x+4) \log_{(-x)}(x+4) \\
 & (-x)^{\frac{3 \log(x+4)}{\log(-x)}} = (-x)^3 (x+4)
 \end{aligned}$$

Определ