

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

✓

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Разложим число 9261 на простые слагаемые: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, значит рассмотрим два случая. В первом будем использовать цифры 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1. Число чисел будет

$k = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$; Во втором случае используем цифры 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1. Число чисел будет

$n = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$. Итого чисел будет $n + k = 1680$

Ответ: 1680

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^4)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

1) Рассмотрим первое уравнение.

Ограничения: $x > 0; y > 0$, из этого следует, что обе части положительное, значит логарифмируем их: $\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(y/x^4)}$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^4) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln x \cdot (\ln x + \ln y^2) = \ln y (\ln y - \ln x^4)$$

$$-2 \ln x (\ln x + 2 \ln y) = \ln y (\ln y - 4 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln y \ln x = \ln^2 y - 4 \ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln y \ln x + 2 \ln^2 x = 0$$

Берем отсюда $\ln y$: $D = 9 \ln^2 x + 8 \ln^2 x = \ln^2 x$
 $\ln y_1 = \frac{3 \ln x + \ln^2 x}{2} = 2 \ln x$; $\ln y_2 = \frac{3 \ln x - \ln^2 x}{2} = \ln x$,

значит $y = x^2$ и $y = x$

2) Подставим $y = x$ во второе уравнение системы:

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0; \quad -2x^2 + 4x = 0; \quad \begin{cases} x=0, \text{ не удовл.} \\ x=2 \end{cases} \text{ вращается}$$

Первый ответ: $(2; 2)$

3) Подставим $y = x^2$ во второе уравнение системы:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0; \quad x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x \quad | \quad x-2$$

$$x^4 - 2x^3$$

$$x^3 - 6x^2$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$-4x^2 + 8x$$

$$-4x^2 + 8x$$

0

$$x^3 + x^2 - 4x$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = (x-2)(x^3 + x^2 - 4x) =$$

$$= x(x-2)(x^2 + x - 4) = 0$$

Берем $x^2 + x - 4 = 0$;

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$x=0$ - не удовл. другим.

$$x=2$$

$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$, не удовл. другим.

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

Получились решения.

Получились пары:

$$(4; 2) \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

Ответ: $(2; 2) (4; 2) \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$
 $\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |x|y + 5 + |y - x + 5| = 10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = \alpha \end{cases}$$

1) Рассмотрим первое уравнение: При $y > 0$ оно не будет выполнено. А при $y \in [0; 10]$ на плоскости x, y оно будет представлять квадрат

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

со стороны десяти и лежащий от $x = -5$ до $x = 5$.

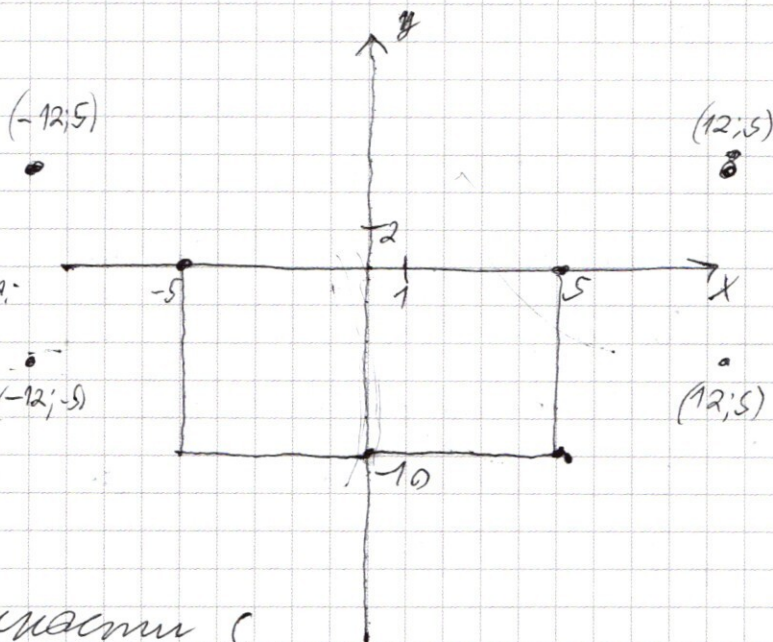
2) Второе уравнение представляет собой набор окружностей:

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = \alpha \quad \text{Центры: } (-12; 5)$$

$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = \alpha \quad (-12; -5)$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = \alpha \quad (12; -5)$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = \alpha \quad (12; 5)$$



3) Рассмотрим окружности с центрами $(-12; -5)$ и $(12; 5)$. Найдём α при котором они касаются стороны квадрата $|x| = |-12+5| = 7$. Следовательно при $\alpha > 49$ они касаются пересекать квадрат в двух точках до того момента как не пересекут точки $(0; 0)$ и $(0; -10)$ при $\alpha = 13$. Дальше эти окружности не будут существовать, т.к. они выйдут из своих четвертей. Значит две точки будет при $\alpha \in [7; 13]$, когда нужно чтобы все уравнения было две точки и это только при $\alpha = 7$

4) Рассмотрим окр. с центрами $(-12; 5)$ и $(12; 5)$. Первой раз они пересекут квадрат при $\alpha = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$. Рассмотрим пересечение их в т. $(0; 0)$ это будет при $\alpha = 13$, а дальше они не существуют.

одну точку пересечения с к.к. Π . к. эти окружности
 всё время от $\alpha \in [54; 13]$ имеют только одну
 точку пересечения с квадратом (всучие 2) и т.к.
 этот интервал входит в $\alpha \in [4; 13]$, значит
 никаких решений. эти окружности не даны.
 Ответ: * при $\alpha = 4$

✓ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - 52 \cos 4x + \sin 8x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 2x - 52 \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - 52 (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - 52 (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2 \sin 4x - 52 (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{cases}$$

$$2 \sin 4x - 52 (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

Один из ответов: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

✓ 4

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 46 + 2(2^{32} - 1)x$$

1) т.к. $2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 46 + 2(2^{32} - 1)x$, то можно

должно быть $2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq 46 + 2^{33}x - 2x$

$$2^{33}(6-x) < 46 - 2x - 2^x \text{ При } x \in (-\infty; 6) \text{ левая}$$

часть будет намного больше правой, т.к.

подставляя x от 5 $2^{33}(6-x)$ будет ^{быстро} расти, а

$46 - 2x - 2^x$, имея 2^x будет ~~начало~~ уменьшаться

медленно расти. При $x=6$ y будет получиться 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

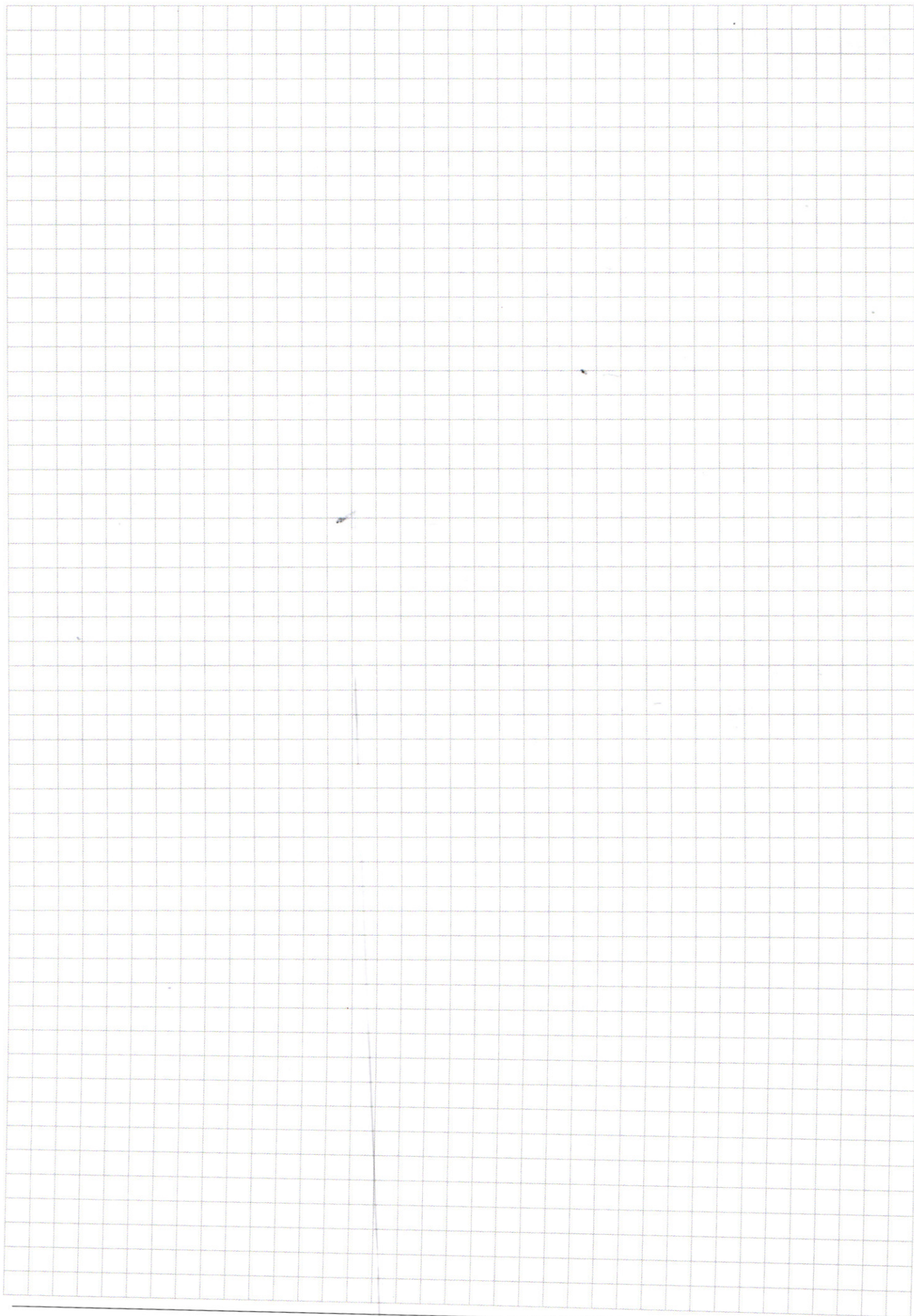
справа и слева, поэтому $x=6$ не подходит. Тогда
Подставив $x=6$, получаем *

$$\begin{cases} y \geq 2^6 + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 46 + 2^{34} \cdot 3 - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 64 + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 64 + 3 \cdot 2^{34} \end{cases} \text{ решений}$$

нет

3) При $x \geq 6$ $2^{33}(6-x)$ будет меньше $46 - 2x - 2^x$ до
 $x=38$, поэтому что $-2^{38} \geq 46 - 2x - 2^{38}$, зна-
чит нам подходят x от 6 до 38. Число y
будет с каждым разом увеличиваться.
одна т.к. в 1-ом уравнении множитель
играет в 2^{33} , а во втором $x \cdot 3^{33}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

1) Разложим число 9261 на простые сомножители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, значит рассмотрим два случая: 1-й, когда число состоит из цифр 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1 в любой перестановке: таких восьмизначных чисел будет 8!

2) 2-ой случай, когда число состоит из 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1: таких восьмизначных чисел будет тоже 8!

3) Значит всего чисел $2 \cdot 8! = 80640$

Ответ: 80640

N 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

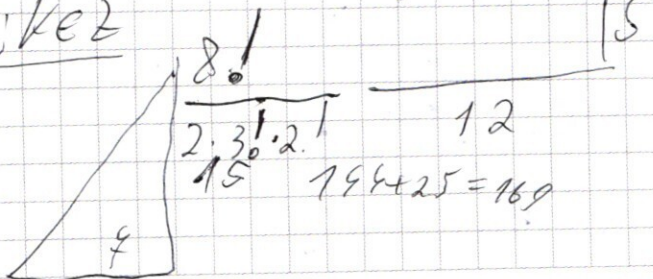
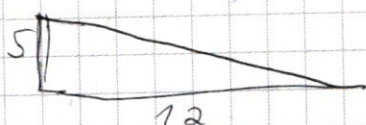
$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

1) $\cos 2x = \sin 2x$; $\tan 2x = 1$,
значит один из ответов

2)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$9261 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7 \cdot 7^2 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8!$$

$$5! = 120 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad \tan 2x = 1 \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\cos 2x + \sin 2x =$$

$$= \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1$$

$$\cos 2x + \sin 2x =$$

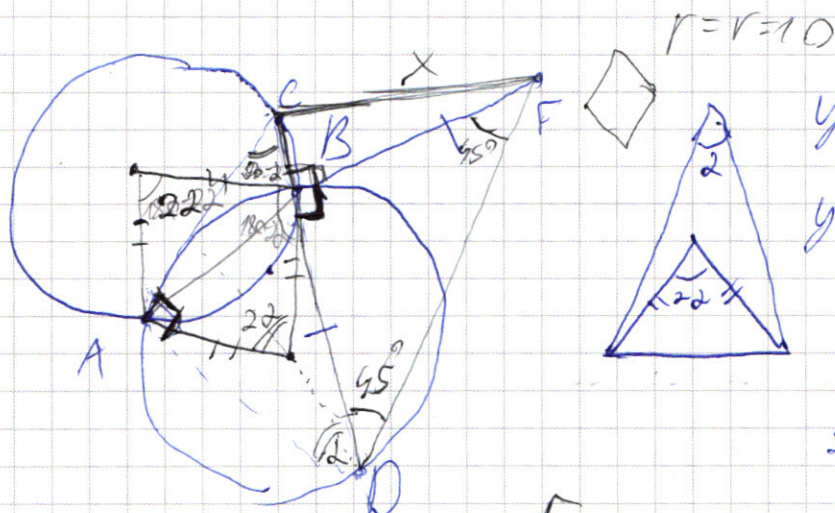
$$\sin 4x = \sin(2x + 2x) = \cos 4x \cdot \sin 2x + \sin 4x \cdot \cos 2x$$

$$(\cos^2 2x - \sin^2 2x) (\cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x) + 2 \sin 2x \cdot \cos 2x (\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x)$$

$$= \cos^3 2x \cdot \sin x + \sin^2 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x - \sin^3 2x \cdot \cos x + 2 \cos^2 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos x - 2 \sin^2 2x \cdot \sin x \cdot \cos 2x =$$

$$= \cos^3 2x \cdot \sin x - \sin^3 2x \cdot \cos x - 3 \sin^2 2x \cdot \sin x \cdot \cos 2x + 3 \cos^2 2x \cdot \cos x \cdot \sin 2x$$

№6

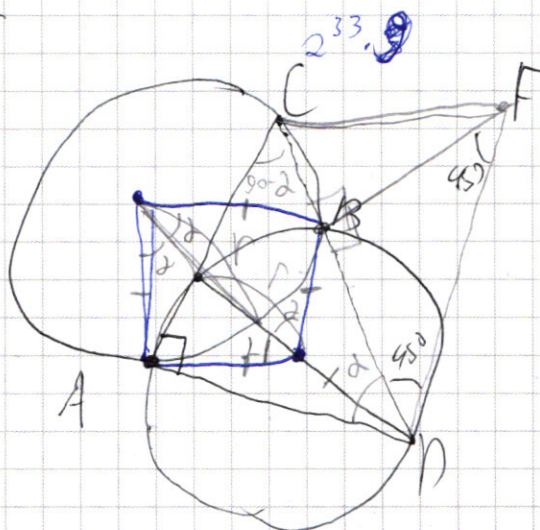
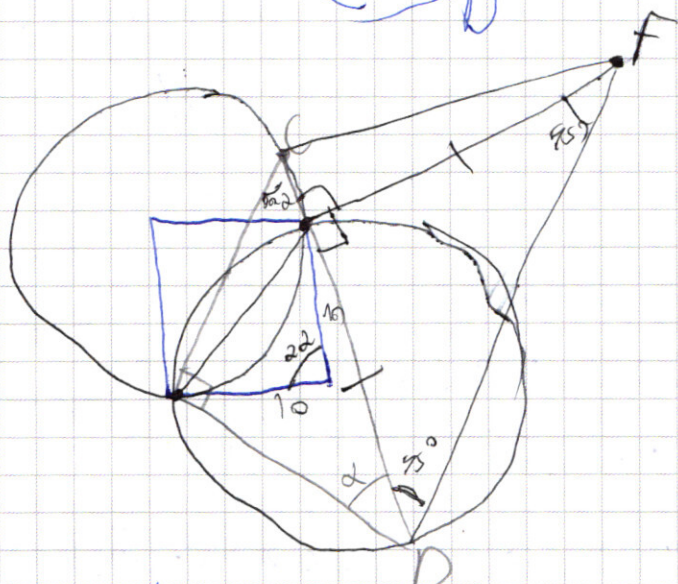


$$y = 2^x + 6 \cdot 2^{3x}$$

$$y < 46 + 2^{33} + 2^{36}$$

$$x = -2^{32}$$

$$2^{33} + 2^{36}$$



$$(x^2 y^9)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^9)}$$

$$\ln(x^2 y^9)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(y/x^9)}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^9) = \ln \frac{y}{x^9} \ln y$$

$$(-\ln x) \ln(x^2 y^9) = \ln y (\ln y - \ln x^9)$$

$$(-2 \ln x) (\ln x + \ln y^9) = \ln y (\ln y - 9 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln y \ln x = \ln^2 y - 9 \ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln y = 4 \ln x$$

$$\ln y = 2 \ln x$$

$$D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x = \ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x + \ln^2 x}{2} = 2 \ln x$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x - \ln^2 x}{2} = \ln x$$

$$y = x$$

$$y = x^2$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 9x = 0$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 9x^2 = 0 - 2x^2 + 4x = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x \sin x (\cos^2 2x - 3 \sin^2 2x) + \sin 2x \cdot \cos x (\sin^2 2x - 3 \cos^2 2x)$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sin 4x = \sin(4x + 3x) = \sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x$$

$$(2 \cos^2 x - 1)(\cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$(2 \cos^2 x - 1) \sin x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin x - 2 \sin^3 x + 2 \sin x (1 - \sin^2 x)$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \sin 3x = 4$$

$$- \sin x \quad 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$4 \sin x \cdot \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + ((\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) -$$

$$- 2 \sin x \cos x \cdot 2 \sin x \cos x) (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$(4 \cos^3 x \sin x - 4 \sin^3 x \cdot \cos x) (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + ((\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x -$$

$$- \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) - 4 \sin^2 x \cos^2 x) (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$16 \cos^6 x \sin x - 12 \cos^4 x \sin x - 16 \cos^4 x \sin^3 x + 2 \cos^2 x \sin^3 x$$

$$(\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x) (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 3 \cos^4 x \sin x - 4 \cos^4 x \cdot$$

$$\sin^3 x + 3 \sin^8 x - 4 \sin^4 x$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin 4x = \sin(6x + 1) =$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= \cos 6x \cdot \sin x + \sin 6x \cdot \cos x$$

$$\cos 3x \quad \sin 2x = \sin(8x - 1) = \cos 8x \cdot \sin x - \sin 8x \cdot \cos x$$

$$\sin 8x = 2 \sin 4x \cdot \cos 4x$$

$$|x+5| + |y-x+5| = 10$$

$$|x+5| + |-x+5| = 10 \quad y = -x \quad y = x-5 \quad y = -x+5$$

$$x = -5 \quad \text{при } x \leq -5$$

$$x = 5 \quad -x-5 + x-5 = 10$$

$$+x+5 + x-5 = 10$$

$$2x = 10 \quad x = 5$$

$$x+5$$

$$y=0 \quad x=10$$

$$15+5=10$$

$$x=0$$

$$|y+5| \quad |y+5|=10$$

$$2|y+5|=10$$

$$|y+5|=5$$

$$2y+10=10$$

$$-2y-10=10$$

$$-3 \cdot -5$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$-x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$y = -5-x \quad \text{при } y < -5-x$$

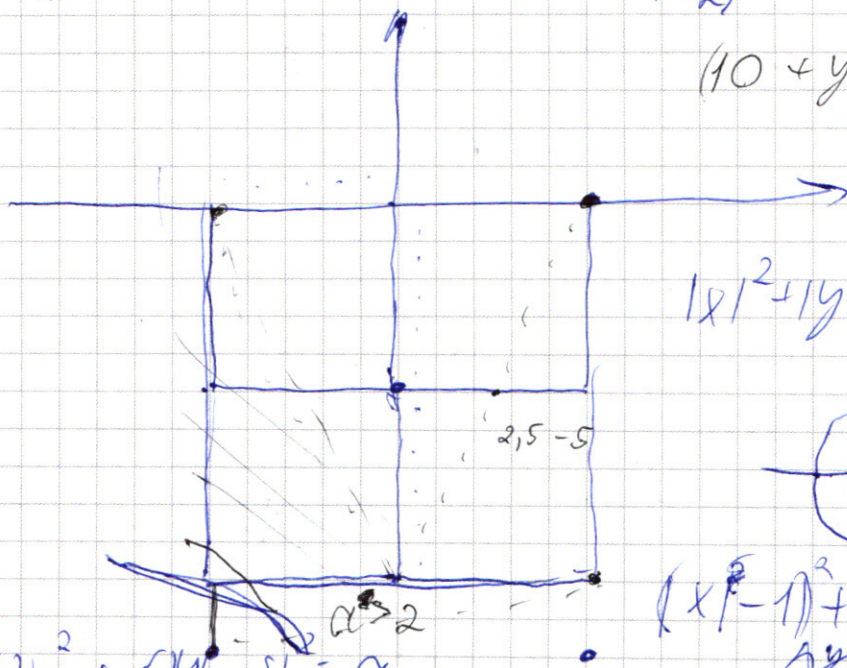
$$y = -5+x$$

$$y = 20 \quad x = -5 \quad -x-5$$

$$(5; 12)$$

$$-2 \quad -8$$

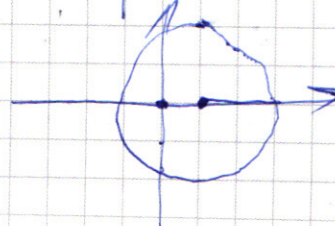
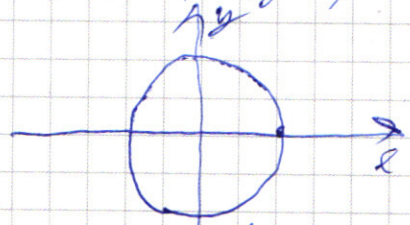
$$(10+y) + |y| = 10$$



$$|x|^2 + |y|^2 = 4$$



$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$$



$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$\text{при } x \leq 0 \quad (x-12)^2 + (-y-5)^2 = a$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$(x-12)^2 + (-y-5)^2 = a$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 46 + 2x(2^{32} - 1)$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 46 + 2x \cdot 2^{32} - 2x$$

$$2^{38}(6 - x) < 46 - 2x - 2^x$$

$$\begin{array}{r} +6 \\ 0^x \\ -12 + 6x \\ 76 \\ 0^x - 14 - 128 \\ -2^{33} - 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 38 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 2^5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2^{33} \\ -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} \\ 46 + 2^{33} \cdot 34 - 34 \\ 2^{33} \cdot 624 \end{array}$$

$$2^4 + 6 \cdot 2^{38}$$

$$6^3 2^{33} + 2^4$$

$$2^{33} \cdot 34 - 11$$

$$46 + 4 \cdot 2^{33} - 14$$

$$4 \cdot 2^{33} + 52$$

$$3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{32}$$

$$2^{33} \cdot 8$$

$$2^{36} + 6 \cdot 2^{33}$$

$$2^{33} \cdot 12$$

$$30$$

$$8$$

$$46 + 36 \cdot 2^{33} - 72$$

$$14 + 14 + 13 +$$

$$2^{34} + 6 \cdot 2^{33}$$

$$19 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 10 \cdot 2$$

$$2^{33} \cdot 22$$

$$14 + 14 +$$

$$2^{33} \cdot 34$$

$$35$$

$$2^{33} \cdot 10$$

$$35$$

