

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \phantom{000} \\ 26 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{0} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 12 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 63 \end{array}$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\underline{UUUUUU}$$

$$777 \cdot 9$$

$$333$$

$$93$$

$$C_3^8 = 56 \text{ сл. выбрать 3 семерки.}$$

$$C_3^5 = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

W2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \cdot \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin 2x$$

$$2 \sin 7x \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin 2x = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\left(x^2 y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \stackrel{= \sqrt{2}}{=} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-2)^2 - x((x-4)^2 - x^2 + 12 - xy)$$

$$(y-x)(y-8) = (y^2 - 8y + 8x - xy)$$

$$(y-x)(y-8) - 2x^2 + 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x+4) = 0$$

$$y^2 = (y+2x)(x+4)$$

$$\ln \frac{y}{x^2} = \ln y - \ln x^2 = \ln y - 2 \ln x$$

$$\left(x^2 y^4\right)^{-\ln x} = \frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} y^{4 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}} \\ y^3 = \frac{y^{\ln y}}{x^{2 \ln x}}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 20 \\ ((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$4xh = xh + 5x^2$$

$$3xh = 5x^2$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{h}$$



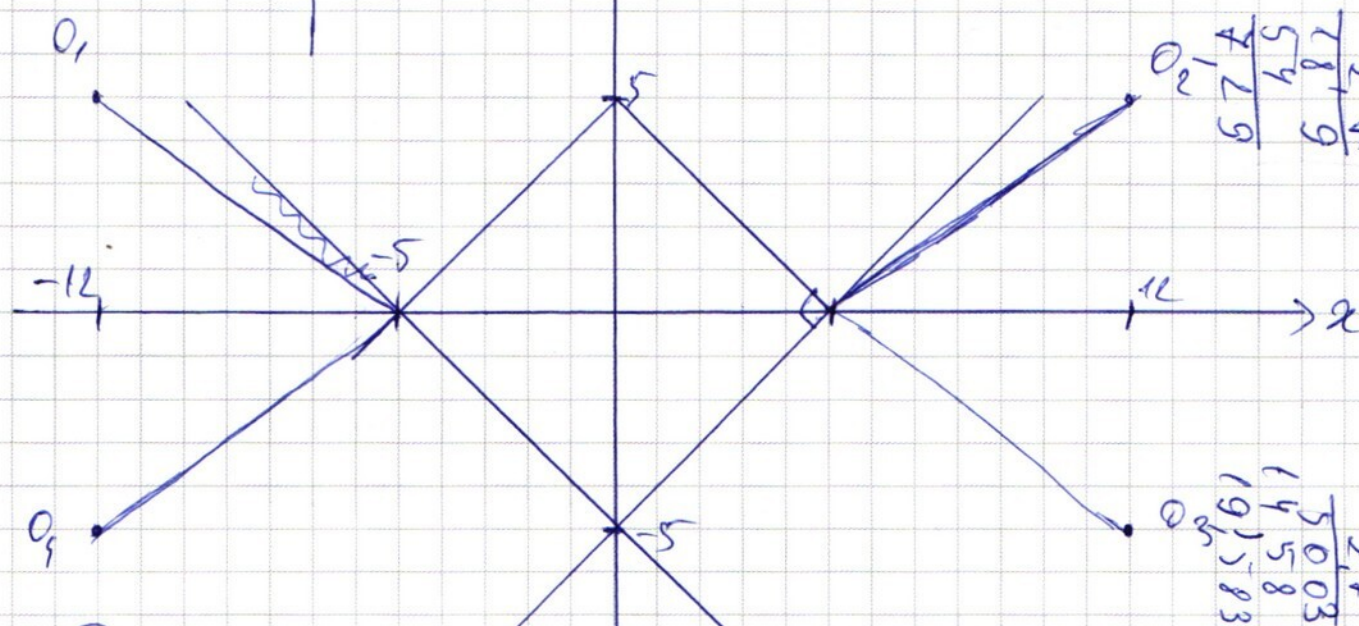
$$x_1 + 4x_2 = 5x = 2r$$

$$x_1 + y = x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$y_1' = 2^x \ln x$$

$$y_2' = 2^{32} - 1$$



$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 19 \\ \hline 228 \\ 1080 \\ \hline 2280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 12 \\ \hline 38 \\ 380 \\ \hline 2280 \end{array}$$

чтобы ур-ие имело 2

$$\text{решения надо чтобы } \sqrt{a} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{10^2 + 12^2}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 169 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 169 \\ \hline 169 \end{array}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

чтобы произведение цифр 8 значного числа было равно 9261 нужно чтобы 3 цифры были 7.

и давшие два случая: 9 и 3 и 3 единицы  
или 3 3 3 и 2 единицы

100 100 100

$$C_3^8 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56 \text{ сп}$$

выбрать 3 7 и 9

$$C_3^5 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ количество способов на оставшиеся}$$

места выбрать тройки

количество способов выбрать пару (9 3) на  
оставшиеся 5 мест =  $5 \cdot 4 = 20 \text{ сп}$

Ответ:  $C_3^8 (C_3^5 + 20) = 56 \cdot (30) = 1680$  восьмизначных чисел.

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 1680 \\ \hline 1680 \end{array}$$

N2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin 2x =$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin 7x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin\left(2,5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$2,5x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n + \frac{\pi}{8}}{2,5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{5} \pi n + \frac{\pi}{20}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(4,5x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$4,5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n + \frac{3}{8}\pi}{4,5}, n \in \mathbb{Z}$$

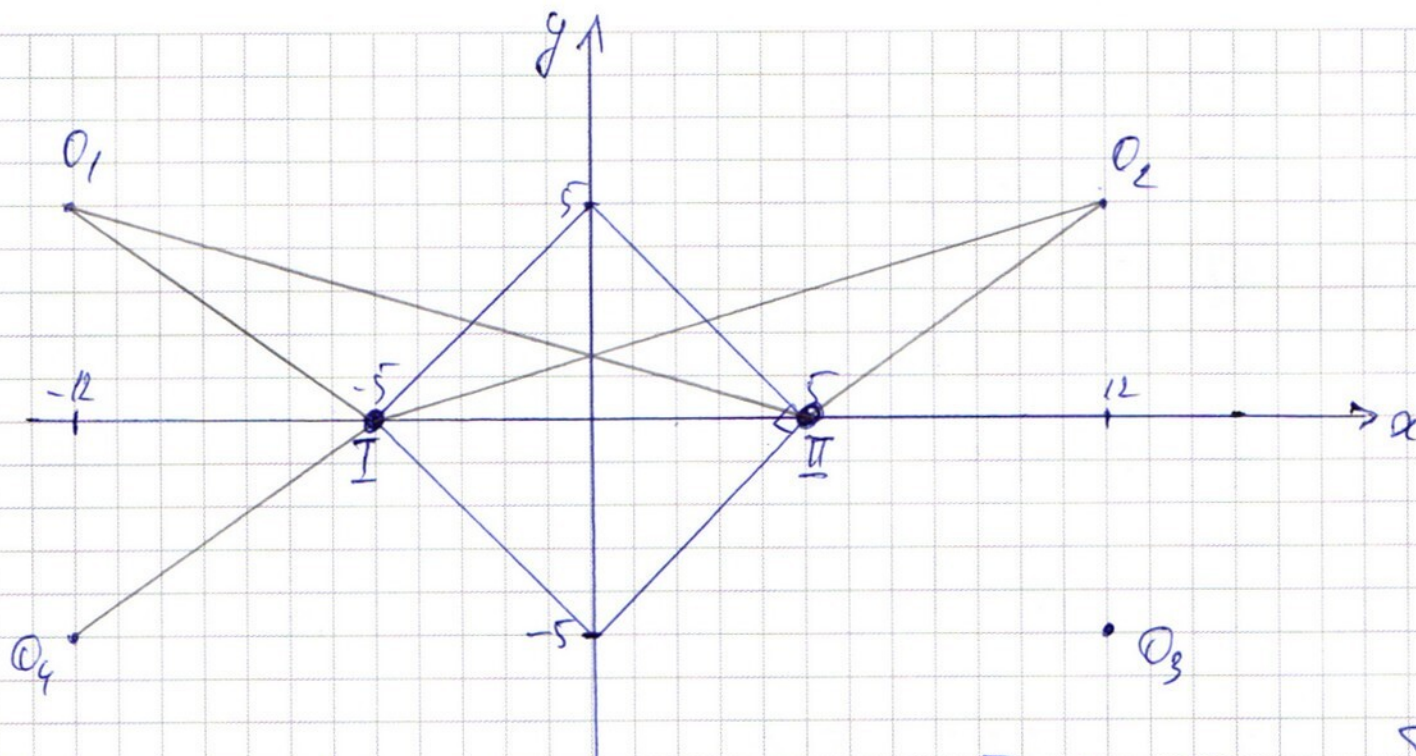
$$x = \frac{2}{9} \pi n + \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{8} \pi = \frac{2}{9} \pi n + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{2}{5} \pi n + \frac{\pi}{20}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{2}{9} \pi n + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

второе уравнение задает 4 окружности с радиусами  $\sqrt{a}$   
 первое ур-ие задает квадрат с диагональю 10.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$O_1, O_2, O_3, O_4$  - центры окружностей с радиусами  $\sqrt{a}$ .  
Чтобы система имела 2 решения нужно чтобы  
окр по обе стороны от  $y$  оси  $y$  пересекали квадрат в  
1 точке, на графике можно заметить эти точки:  
~~первая точка~~ Окр расположена симметрично относительно  
осей. первая пара точек пересечения  $(-5; 0)$  и  $(5; 0)$   
Считаем радиус окр при котором она пересечет кв в  
таких точках по Т Пифагора:  $\sqrt{a} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$   
 $\underline{a = 74}$

эта система имеет еще один случай с двумя решениями  
(окр пересекает квадрат дважды по оси  $x$  от себя вершине кв.)  
считаем при каком  $a$  это будет:  $\sqrt{a} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$   
 $\Rightarrow a = 169$  можно проверить расстояние до другой вершины  
Оно равно  $\sqrt{10^2 + 12^2} < \sqrt{169} \Rightarrow$  ~~окр~~ ~~при  $a = 169$  не будет~~ ~~пересе~~

система при  $a = 3$  не имеет решений.

Ответ:  $a = 74 ; 314$

нз.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

упростим второе уравнение решив его относительно  $y$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm |3x-4|}{2}$$

$$y_1 = 2x \quad y_2 = 4-x$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

упростим первое ур-ие.

по ОДЗ  $x > y > 0$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$

~~$$\frac{1}{x^{2 \ln x} y^{4 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$~~

$$y^{3 \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$(2x)^{3 \ln x} = (2x)^{\ln 2x} \cdot 2^{2 \ln x}$$

$$2^{3 \ln x} \cdot x^{3 \ln x} = 2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$2^{2 \ln x} \cdot x^{\ln x} = x^{\ln 2x} \cdot 2^{\ln 2}$$

$$x = 1$$

(в конце работы)

нет решений.

$$2) y = 4-x: (4-x)(16+x^2-8x) = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^{\ln x}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

a)  $R = 10$

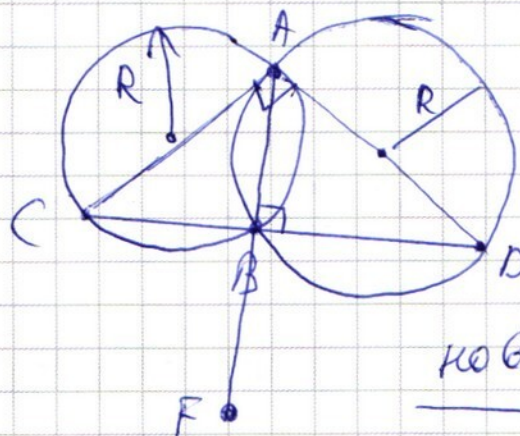
$\angle CAD = 90^\circ$

( $AB \perp$  к  $CD$  по условию)

$BF = BD$

$CF = ?$

$AB \perp$



$\angle ABD = \angle CBA = 90^\circ$

по св-ву впис углов  $AD$  - диаметр

$CA$  - диаметр

$ACD$   $\rho/\delta$   $BD = CB =$

$= \frac{1}{2} CD = R\sqrt{2}$

по влукте  $B$  так что  $BC = 12$

т.к.  $AB \perp$  то  $AC$  и  $AD$  - диаметры т.к.

углы  $\alpha$  который опирается на диаметр  $= 90^\circ \Rightarrow AC = AD = 2R$

$\triangle ACD$   $\rho/\delta$

(т.к.  $AB$  высота  $CB = BD = BF$  ~~по симметрии~~)

$CD = \sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} =$

$CB = BD = BF =$

$= \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 10\sqrt{8} = 20\sqrt{2}$

$CB = \frac{1}{2} CD = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

Отв

$CF = 20\sqrt{2}$

$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = 20$

b)  $BC = 12$   $S_{\triangle ACF} = ?$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CB \cdot AF$

$AF = BF + AB$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CB \cdot (2CB) = CB^2 = 144$

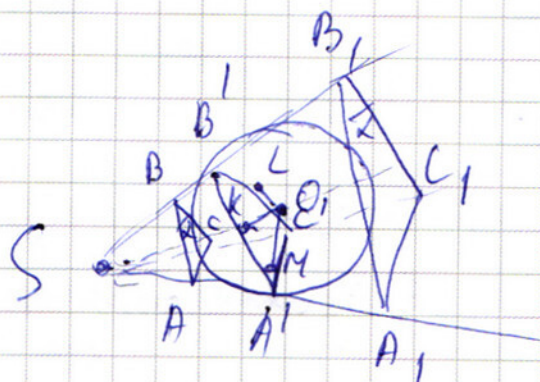
из  $\triangle$  Пифагора

$AB = BD = BF = CB$

$AB^2 = AD^2 - BD^2 = 200^2 - 100^2 = 15000$   
 $= CB^2 = BF^2$

Ответ: а)  $CF = 20$   
 б)  $S_{ACF} = 144$

НЧ.



$K, L, M$  - точки касания.

$\angle KSO = ?$

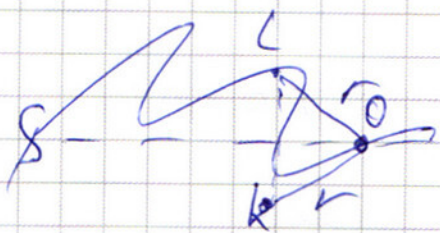
Сечение м-ю  $KLM$

$S_{ABC} = 1$   $S_{A_1B_1C_1} = 16$

и  $SO \perp ABC$  и  $A_1B_1C_1$

через  $M$  проведем  $A'C'$  и  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  
 проведем  $A'B'$  через  $K$ ,  $B'C'$  через  $L$   
 получим искомого сечения  $A'B'C'$

$\angle SKO = 90^\circ$



$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = \alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \alpha = 1$

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \alpha = 16$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, k = 4$ .  $k$  - коэффициент подобия.

т.к.  $SO$  - бис-са призматического угла и является  
 высотой для  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$

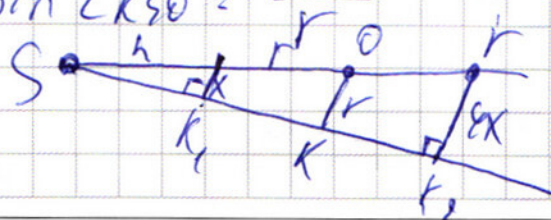
сфера вписана в тетраэдр  $S A_1B_1C_1$   $\Rightarrow$  тетраэдр  $S A_1B_1C_1$  - вписанная  $\Rightarrow SO$  - попадает в центр  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$

$A'B'C'$  и  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$

$\angle KSO = \arcsin \sin \angle KSO = \frac{h+r}{r}$

$r = 2,5x$

масштабный рисунок:

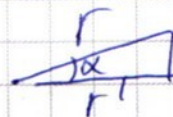
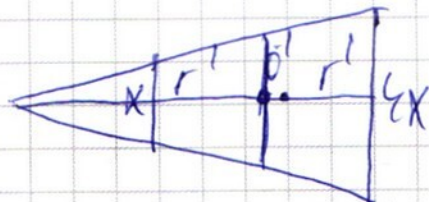


$\frac{h}{x} = \frac{h+5x}{4x} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{h}{4x} + \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{3}{5}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \angle KSO = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$S_{A'B'C'} =$$



$$r' = r \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Ответ:  $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

№3.

$$\begin{cases} \left( \begin{matrix} x^2 & y^4 \end{matrix} \right) - \ln x = y \ln \left( \frac{y}{x^2} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(y - 2x)(y - 4 + x) = 0$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2 \ln x}}}{x^{\frac{1}{4 \ln x}} \cdot y^{\frac{1}{4 \ln x}}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}}$$

$$y^{3 \ln x} = y^{\ln x^3} = x^{\ln x^2} \cdot y^{\ln y}$$

$$(2x)^{\ln 2x} = (2x)^{\ln 2} \cdot (2x)^{\ln x}$$

$$1) \quad y = 2x$$

$$(2x)^{3 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot (2x)^{\ln 2x}$$

$$8^{\ln x} \cdot x^{3 \ln x} = 2^{2 \ln x} \cdot 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x} \cdot x^{\ln x}$$

$$8^{\ln x} = 4^{\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} = (2x)^{\ln 2}$$

$$\frac{2^{2 \ln x}}{2^{\ln 2}} = 2^{2 \ln x - \ln 2} = 2^{\ln \frac{2x}{2}} = 2^{\ln x} \Rightarrow 2^{\ln x} = x^{\ln 2}$$

$x = 2$  м.к. графике возрастает поразному по талосу 1 корень

2)  $y = -x + 4$ .

$$(4-x)^{3 \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot (4-x)^{\ln 4-x} \quad 0 < x < 4$$

$$\frac{(4-x)^{\ln x^3 - (4-x)}}{(4-x)} = x^{2 \ln x}$$

$$(4-x)^{\ln x^3 + x - 4} = x^{\ln x^2}$$

корень R кем

Ответ:  $x = 2; y = 2x = 4 \Leftrightarrow (2; 4)$   
N7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad 76 = 19 \cdot 4.$$

кал-во пар  $(x; y) = ?$

$$y \geq 2^x (1 + 3 \cdot 2^{34-x})$$

$$76 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x(19 + 2^{31}x - \frac{x}{2}) > 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{32}$$

$$38 + 2^{32}x > 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33} + x$$

$2^{32}x$  возрастает медленнее чем  $2^{x-1} + x$   
пока  $f_1'(x) \leq f_2'(x)$  то будут корни

$$f_1'(x) = 2^x \ln x$$

$$f_2'(x) = 2^{33} - 2$$

$$2^{33} - 2 > 2^x \ln x \quad 2 < e < 3$$

пусть  $x = 30$  то:  $2^{33} - 2 > 2^{30} \cdot \ln 30$   
 $4 > \ln 30 > 3 \Rightarrow 2^{30} \cdot \ln 30 < 2^{32}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

если  $\forall x \in \mathbb{Z}$  то

$$2^{31} \cdot \ln 31 \quad 2^{31} \cdot \ln 31 < 2^{33} - 2$$

$$3 < \ln 31 < 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_{\max} = 31$$

$$x > 0.$$

30 пар  $(x, y)$   
 $x \in \mathbb{Z}$   $x \neq 1.$

Ответ:

можно выбрать  $x$  30 способами.

под каждой такой  $x$  можно выбрать  $y \in$

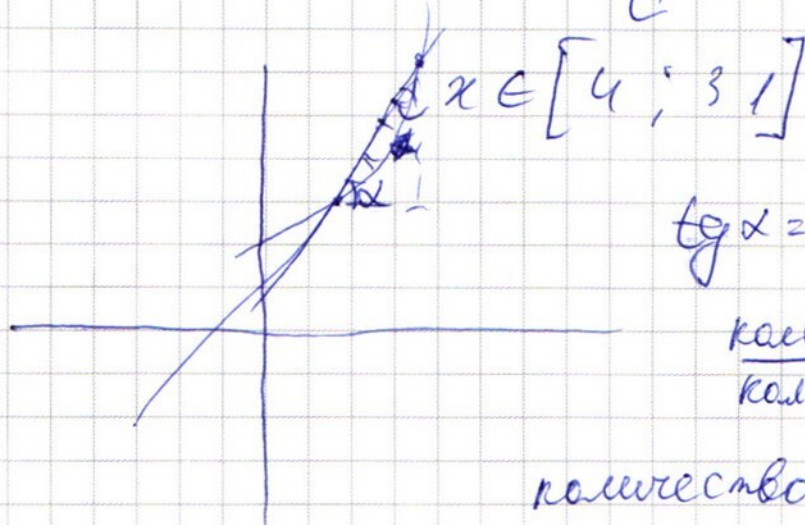
$$y \in [2^x + 3 \cdot 2^{34}; 76 + 2(2^{32} - 1)]$$

$$x \in \mathbb{Z} [2; 31].$$

то  $y \in f_2(x)$  — пространство под прямой

если  $x = 4$  то  $2^4 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 8 \cdot 2^{32} - 8$

$$\Leftrightarrow$$



28 целых  $x$

$$f_2(x) = 2 \cdot 2^{32} + 2$$

$$\frac{\text{каво } y}{\text{кол-во } x} = \frac{2 \cdot 2^{32} + 2}{28} = \frac{?}{28}$$

$$\text{количество } y = (2 \cdot 2^{32} + 2) \cdot 28$$

⇒ количество пар  $(x, y) = \underbrace{28}_{\text{аксы}} \cdot \underbrace{28 \cdot (2^{33} + 2)}_{\text{игроки}} =$

$$\begin{array}{r} \times 128 \\ 49 \\ \hline 1152 \\ 502 \\ \hline 6172 \end{array}$$

$$= \frac{64}{2^6} \cdot 49 \cdot (2^{33} + 2) =$$

$$= 49 \cdot 2^{39} + 2^7 \cdot 49$$

Ответ: количество пар  $(x, y) = \underline{49 \cdot 2^{39} + 6172}$