

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

⇒ На 8 мест нам надо расставить три 5, три 3, и две 1:

1) Три 5-и на 8 мест можно расставить

$$C_8^3 \text{ способами; } C_3^3 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1 \cdot 1 = 1$$

2) Остается 5 мест. На эти 5 мест три 3-и

$$\text{можно расставить } C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

3) Остается два места для двух единиц, от переставления которых ничего не зависит.

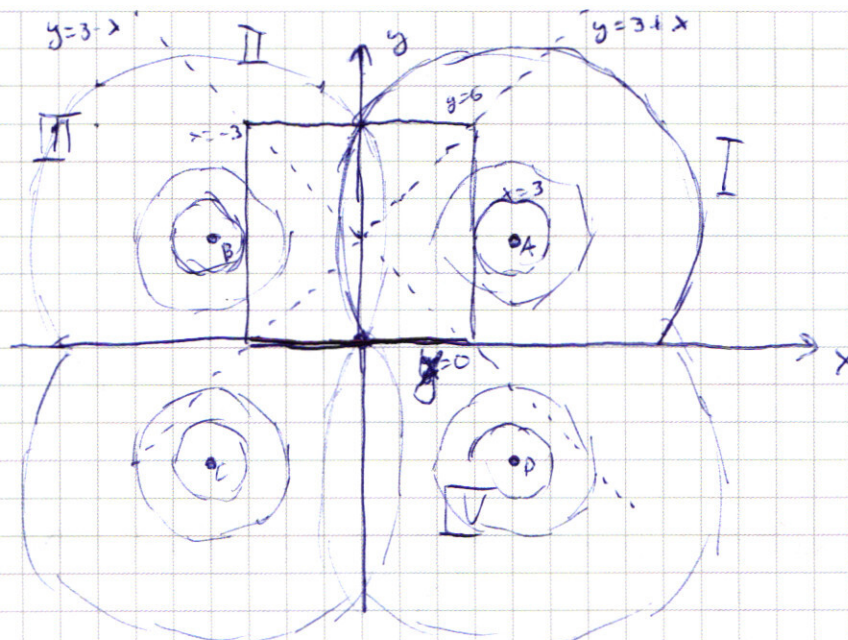
$$\Rightarrow N = C_3^3 \cdot C_5^3 = 1 \cdot 10 = 10$$

Ответ: 10

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

Решите данную систему
графически:



Проведем прямые, от которых зависят раскрытие модулей: $y = 3 + x$, $y = 3 - x$.

Они делят плоскость на 4 части, назовем их: I, II, III, IV

$$\text{в I: } -(y - 3 - x) + (y - 3 + x) = 6 \\ \Rightarrow x = 3$$

$$\text{в II: } (y - 3 - x) + (y - 3 + x) = 0 \\ \Rightarrow y = 6$$

$$\text{в III: } (y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6 \\ \Rightarrow x = -3$$

$$\text{в IV: } -(y - 3 - x) - (y - 3 + x) = 6 \\ \Rightarrow y = 0$$

$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a$ — части 4-ех окружностей с центрами $(4; 3)$, $(-4; 3)$, $(-4; -3)$, $(4; -3)$, которые не выносят за свою четверть. (и $r = \sqrt{a}$)

т.к. окружности не выносят за свою четверть и симметричны попарно (I и IV; II и III), то искомые окр. имеют решение только на $x = 0$, но в том же месте,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

где и вершине $\Rightarrow$ искомые оск. не играют роли.
• окружность пересекает квадрат либо в 0, либо в 1, либо в 2
точках. Т.к. картинка симметрична отн. ОУ, то
либо обе оск. имеют 1 точку пересечения, либо
2, но на ОУ и прямых $y=6$ и $y=0$

1) (1 т. пересечения)

$$\rho(A; (y=3)) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 1$$

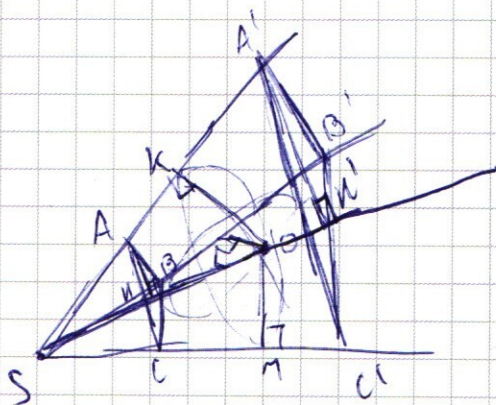
$$\Rightarrow a = 1$$

2) $\rho(A; (0;0)) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

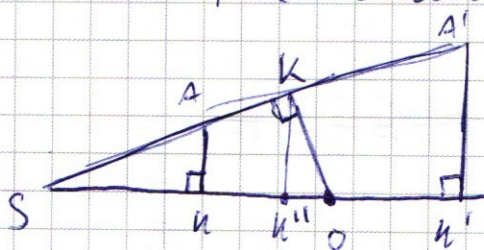
$$\Rightarrow \sqrt{a} = 5$$

$$\Rightarrow a = 25$$

Ответ: $a = 1; 25$



~ч
а) 1) Проведем высоты из вершин
А и А' к SO.
2) Рассмотрим плоскость SK'A'



$$3) \text{ т.к. } ABC \perp SO \perp A'B'C' \Rightarrow ABC \parallel A'B'C'$$

$$\Rightarrow \text{по т. Понцелла: } \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \Delta ABC \sim \Delta A'B'C', \text{ т.к.}$$

Они параллельны.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SH'} = \frac{1}{2}$$

$$4) HH' = 2R$$

~~SH~~

$$2SH = SH'$$

$$2SH = SH + HH' = SH + 2R$$

$$\Rightarrow SH = 2R$$

$$\Rightarrow SO = SH + HO = 2R + \frac{HH'}{2} = 2R + \frac{R}{1} = 3R$$

$$5) OK = R$$

$$SO = 3R$$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{В ответ: } \angle KCO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

~~SH = SL = SM, т.к. SO (H')~~

~~SH = SL = SM, т.к. SO (H')~~

$$\Rightarrow \Delta ABC \parallel \Delta KLM \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta KLM$$

$$SH = \sqrt{\left(\frac{2R}{3}\right)^2 - (R)^2} = \sqrt{\frac{4R^2}{9} - R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{KH''}{SH} = \frac{2}{3} = \frac{KH''}{\frac{R\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow R\sqrt{5} = 3KH'' \Rightarrow KH'' = \frac{R\sqrt{5}}{3}$$

$$SH = \sqrt{\frac{4R^2}{9} - R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SA} = \frac{\frac{R\sqrt{5}}{3}}{2R} = \frac{\sqrt{5}}{6} \Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

$$\text{В ответ: } S = \frac{25}{36}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 14x$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \cos 14x$$

$$2 \sin(-8x) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 14x\right) = \cos 14x$$

$$2 \sin(-8x) \sin \cos 14x = \cos 14x$$

$$\Rightarrow \cos 14x = 0$$

$$\sin(-8x) = \frac{1}{2}$$

$$14x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}k$$

$$-8x = \frac{\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}k$$

$$-8x = \frac{5\sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{2}L$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{28} + \frac{\sqrt{2}k}{14}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{48} - \frac{\sqrt{2}k}{4}$$

$$x = -\frac{5\sqrt{2}}{48} - \frac{\sqrt{2}L}{4}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{28} + \frac{\sqrt{2}k}{14} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{48} - \frac{\sqrt{2}k}{4} \\ x = -\frac{5\sqrt{2}}{48} - \frac{\sqrt{2}L}{4} \end{cases} \quad n, k, L \in \mathbb{Z}$$

~ 7

$$1) \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 + 2^{64}x - x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

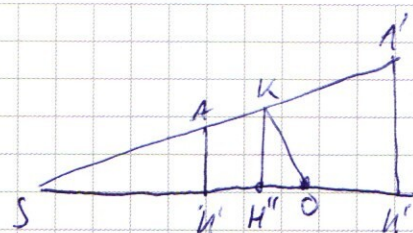
$$\Rightarrow 70 > x + 2^{64}(6-x) + 2^x$$

$$2) 70 = x + 2^{64}(6-x) + 2^x \text{ при } x = 6; 70$$

$\Rightarrow$ Данная система верна только для $x \in (6; 70)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

в) отрезки $\perp$ к $\odot K$ к $SO(K'')$



$SK = SL = SM$, как отрезки касательной

$\Rightarrow ABC \parallel KLM \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KLM$

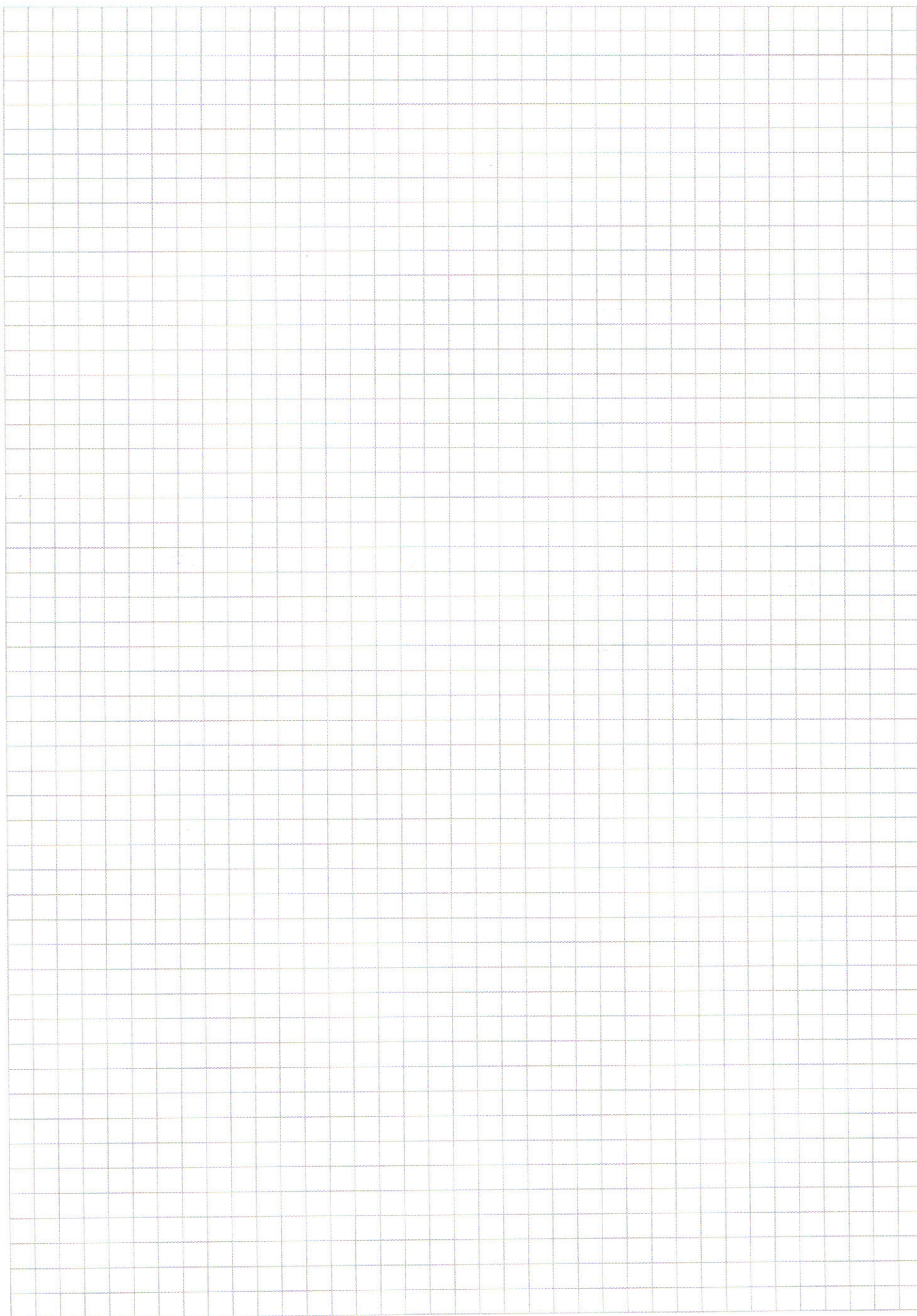
$$SK = \sqrt{3R^2 - R^2} = R\sqrt{2}$$

$$\frac{KK''}{SK} = \frac{1}{3} = \frac{KK''}{R\sqrt{2}} \Rightarrow R\sqrt{2} = 3KK'' \Rightarrow KK'' = \frac{\sqrt{2}}{3} R$$

$$SK'' = \sqrt{2R^2 - \frac{2R^2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3} R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{SKLM}{SA'BC} = \left(\frac{\frac{2R}{\sqrt{3}}}{R} \right)^2 = \frac{4}{3} = \frac{SKLM}{1} \Rightarrow SKLM = \frac{4}{3}$$

Ответ: $SKLM = \frac{4}{3}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$12 \cdot 49$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$560$$

$$C_3^3 = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

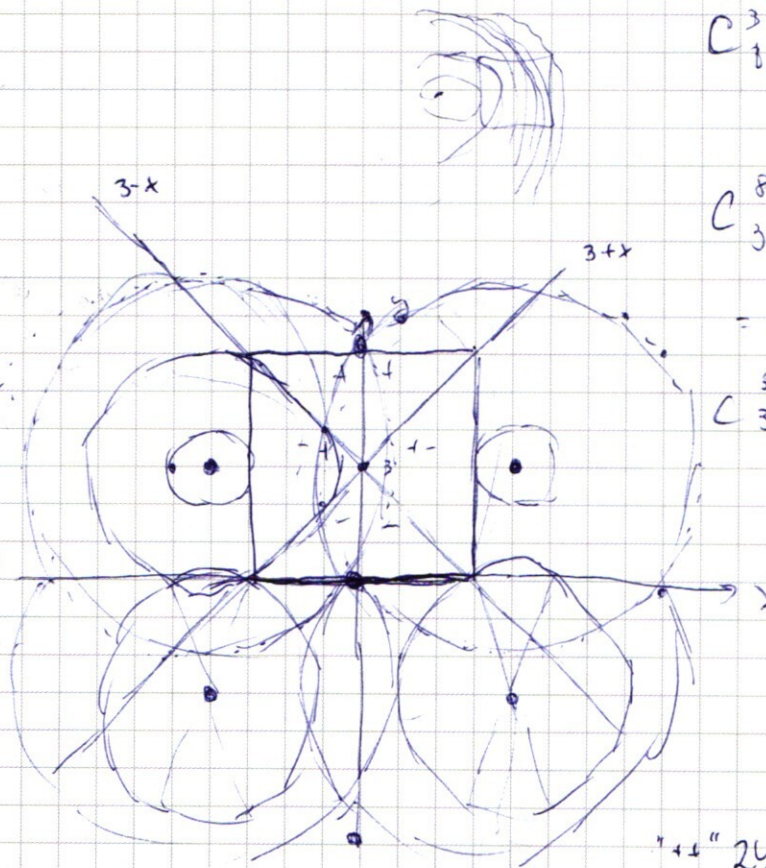
$$C_3^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$C_3^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

$$9 + (|y| - 3)^2 = 25$$

$$\frac{82}{5} = 16.4$$

$$82 = 16.4 \cdot 5$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} \cdot x - x$$

$$2^x + 2^{64}(6-x) + x \leq 70$$

$$2^x < 2^{64}(6-x)$$

$$x < 64 + \log_2(6-x)$$

$$2^{70} + 2^{64}(-64) + x \leq 70$$

$$2^{70} - 2^{64} \cdot 64 + 109 \leq 70 \quad y+3 - y+3 = 6$$

$$x \in (6; 70)$$

$$y = 0$$

$$y = 3 - x - y + 3 - x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

$$38 + 2^{69} + 38 \leq 70$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$$

$$\text{subs. } \sin y \cos x = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\frac{\cos(11x) - \cos(3x)}{\sin x \sin y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = \cos(\beta) - \cos(\alpha) = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

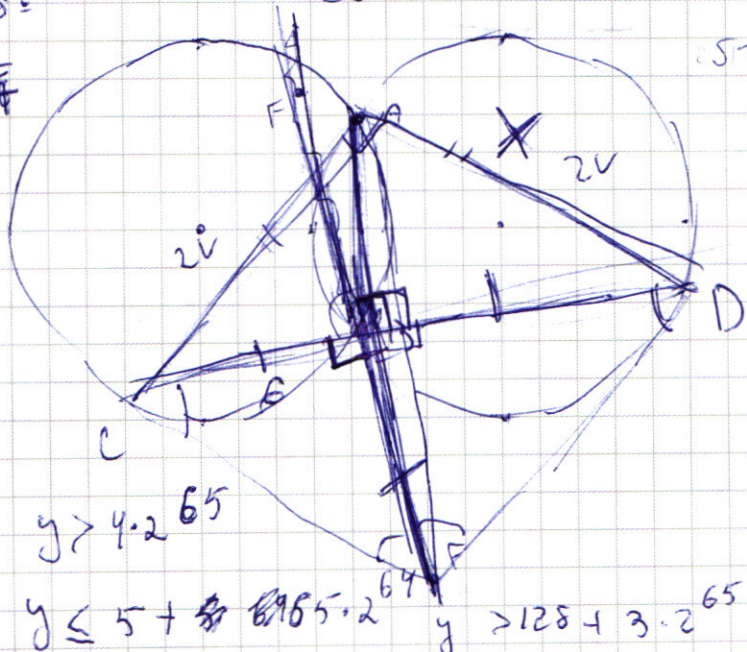
$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$-(\sin 11x - \sin 3x) = -(2 \sin 7x \cdot \cos 7x)$$

$$\sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$$

$$2\sqrt{2} \cos 7x \sin 7x$$

$$2\sqrt{7} \cdot x = \delta = \frac{\pi}{\sqrt{7}}$$



$$y > 4 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 5 + 69 \cdot 2^{64}$$

$$y > 128 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + 7 \cdot 2^{64} - 7$$

$$y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + 2 \cdot 2^{64} - 1$$

$$\begin{cases} y > 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2 \cdot 2^{64} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 7 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2 \cdot 2^{64} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 8 + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 3 \cdot 2^{64} - 7 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

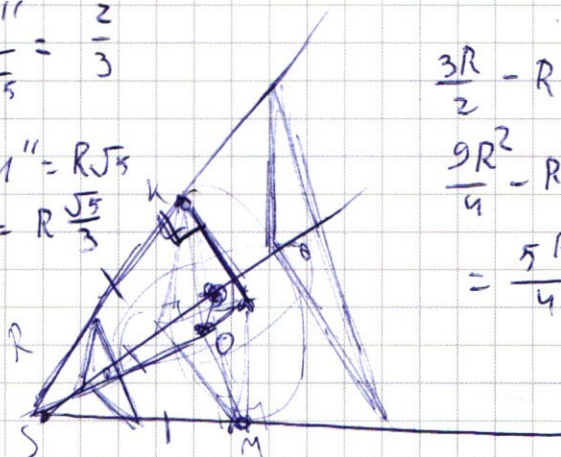
$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y - 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + 6y^2$$

$$\frac{KU''}{\frac{R}{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$

$$3KU'' = R\sqrt{5}$$

$$KU'' = R\frac{\sqrt{5}}{3}$$



$$\frac{3R}{2} - R$$

$$\frac{9R^2}{4} - R^2$$

$$= \frac{5R^2}{4}$$

$$70 - 69 \cdot 2^{64} - 69 - 2^{69} - 3 \cdot 2^{65}$$

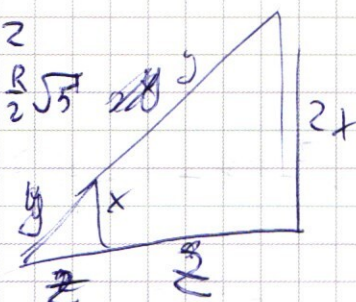
$$+ (5 + 64) \cdot 2^{64} - 2^{69} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= 1 + (4 + 1) \cdot 2^{64} - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= 1 + 2^{65} - 2^{65} + 2^{64}$$

$$k = 2$$

$$\frac{R}{2}\sqrt{5}$$



$$70 - 128 + 2^{64} \cdot (4 + 6 + 1) - 7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 - 128 - 7 + 2^{64}$$

$$51 \cdot 2^{64}$$

$$\frac{70 - x - 2^{64} + (x+6)2^{64}}{x \lg x} = y \lg y$$

$$x \in (6; 70)$$

$$\frac{y \lg x}{y^2 (\lg x + \lg y)} = x \lg x \quad (1 \quad 3)$$

$$62$$

$$70 - 256 + 2^{64} \cdot 2^3 - 8 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 70 - 194 + 2^{65}$$

$$2 \cdot 70 + 2^{64} x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} =$$

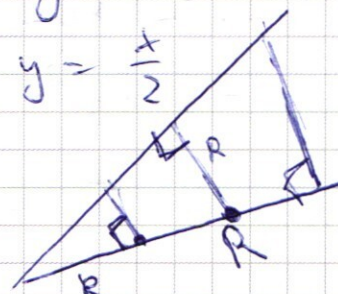
$$= 70 + 2^{64} (x + 6 - 2^{x-64}) - x$$

$$= (70 - x) + 2^{64} (x + 6 - 2^{x-64})$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2y = x$$

$$y = \frac{x}{2}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 14x$$

$$\cos\left(11x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \cos 14x$$

$$2 \sin x \cos\left(11x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 2 \cos\left(17x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cos\left(11x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \cos 14x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(11x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x$$

$$2 \sin(-8x) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 14x\right) = \cos 14x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x$$

$$2 \sin(-8x) \cos 14x = \cos 14x$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\sin 1 \cos 19x =$$

$$x^2 - 4x + 4 - 3(y^2 - 4y + 4) - 2xy$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 - 2xy = 0 \quad a$$

$$a^{\frac{1}{\log_a b}}$$

$$-x^2 - 2xy - y^2 + 2x^2 - 4x - 2y^2 + 12y = 0$$

$$-(x+y)^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}y + 3\sqrt{2})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{3}y + c)^2 = x^2 -$$

$$100 + 128 = 228$$