

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Здесь указывается ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

1) Заметим, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$ □ Произведение цифр числа X равно 3375Представим $X = \overline{x_1 x_2 \dots x_8}$, $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$
 i - номер цифры

2) В силу предположения:

$$\prod_{i=1}^8 x_i = 3^3 \cdot 5^3;$$

В силу основной теоремы арифметики:

среди цифр X :

- 3 равны '3'
- 3 равны '5'
- 2 равны '1'

3) Посчитаем кол-во возможных X :

- Выберем позиции для цифр '1': C_8^2 способов
- Из оставшихся 6 позиций разместим на 3-х '5': C_6^3 способов;
- Положения '3' определены однозначно;

По правилу умножения кол-во чисел x составит: $C_8^2 \cdot C_6^3$ ~~чисел~~ чисел

Ответ: $C_8^2 C_6^3$ чисел

Задание №2

$$\bullet \cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$\Downarrow$

$$\bullet (\cos(11x) - \cos(3x)) - (\sin(11x) - \sin(3x)) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$\Downarrow$

по формуле разности $\sin$ и разности $\cos$

$$\bullet -2 \sin(7x) \sin(4x) - 2 \cos(7x) \sin(4x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$\Downarrow$

по формуле двойного угла $\cos 2x$

$$\bullet -2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos(7x) + \sin(7x)) (\cos(4x) - \sin(4x))$$

$\Downarrow$

$$\bullet \begin{cases} \sin(7x) + \cos(7x) = 0 \\ -2 \sin(4x) = \sqrt{2} (\cos(7x) - \sin(7x)) \end{cases} \quad | : 2$$

$\Downarrow$

приведение

$$\bullet \begin{cases} \sin(7x) + \sin(\frac{\pi}{2} - 7x) = 0 \\ -\sin(4x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(7x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(7x) \end{cases}$$

$\bullet$

$$\begin{cases} -\sin(4x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(7x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(7x) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\bullet \begin{cases} \sin(7x) - \sin(7x - \frac{\pi}{2}) = 0 \\ -\sin(4x) = \cos(\frac{\pi}{4}) \cos(7x) - \sin(\frac{\pi}{4}) \sin(7x) \end{cases}$$

$\Downarrow$

• разность синусов

• косинус разности

$$\bullet \begin{cases} 2 \cos(7x - \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{4} = 0 \\ -\sin(4x) = \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad | : 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$\Downarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^2 \lg(xy) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

1) $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$\Downarrow$

$$x^2 - 2x(y+2) = 3y^2 - 12y \quad | + (y+2)^2$$

$\Downarrow$

$$(x - (y+2))^2 = 3y^2 - 12y + y^2 + 4y + 4$$

$\Downarrow$

$$(x - (y+2))^2 = (2y-2)^2$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x - (y+2) = 2y-2 \\ x - (y+2) = -2y+2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

2) подставим найденные x в $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^2 \lg(xy)$

2.1) $x = 3y$:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2)$$

$\Downarrow$ $\log_3 \lg(3y)$ $y > 0$

$$y^4 \lg(3y) \cdot 3^{-\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2)$$

$$\begin{cases} \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(4x) = 0 \end{cases}$$

приведем

$$\begin{cases} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin(4x) - \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 11x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(y(4-y))}$$

⇕

$$\begin{cases} y \in (0; 4) \\ y^{5\lg(4-y)} (4-y)^{-\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)y)} \end{cases}$$

⇕

~~y = 3 не корень;~~

$$\begin{cases} y \in (0; 4) \\ y^{5\lg(4-y)} \cdot 10^{-\lg^2(4-y)} = y^{2\lg(y) + 2\lg(4-y)} \end{cases}$$

⇕

y = 1 не корень

$$\begin{cases} y \in (0; 4) / \mathbb{N} \\ y^{5\lg(4-y)} \cdot y - \frac{\lg^2(4-y)}{\lg(y)} = y^{2\lg(4-y) + 2\lg(y)} \end{cases}$$

⇕

$$\begin{cases} y \in (0; 4) / \mathbb{N} \\ y^{5\lg(4-y)} - \frac{\lg^2(4-y)}{\lg(y)} = 2\lg(4-y) + 2\lg(y) \end{cases}$$

⇕

$$\begin{cases} y \in (0; 4) / \mathbb{N} \\ 2\lg^2(y) - 3\lg(4-y)\lg(y) + \lg^2(4-y) = 0 \end{cases}$$

⇕

y = 3 не корень

$$\begin{cases} y \in (0; 4) \setminus \mathbb{N}, 3 \end{cases}$$

$$\frac{\lg(y)}{\lg(4-y)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{6} = \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$$

⇕

$y=1$ и видим, что это ^{не} корень; поэтому для равенств. переходя $z^2 \rightarrow y^{\log_3 z^2}$
 $y^{\log_3(3y)} + \log_3(3) \cdot \log_3(y) = y^{2 \log_3(3y^2)}$
 $\begin{cases} y \\ y \neq 1 \end{cases}$ ~~доказывая $y=1$ в совокупности~~

$\begin{cases} y \neq 1 \end{cases}$
 $y^{\log_3(y)} + \log_3(3) \cdot \frac{\log_3(3) + \log_3(y)}{\log_3(y)} = 2 \log_3(3) + 4 \log_3(y)$

$\begin{cases} y \neq 1 \end{cases}$
 $2 \log_3(3) = + \frac{\log_3(3) + \log_3(y)}{\log_3(y)} \cdot \log_3(y)$

$\begin{cases} y \neq 1 \end{cases}$
 $2 \log_3(3) \cdot \log_3(y) = + \log_3(3) + \log_3(y)$

~~добавим~~
~~на $y \neq 1$~~
~~так $y=1$~~
~~корень~~

$\begin{cases} y \neq 1 \end{cases}$
 $2 \log_3(y) = + \log_3(3) + \log_3(y)$

$\begin{cases} y \neq 1 \end{cases}$
 $\log_3(y) = - \log_3(3) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

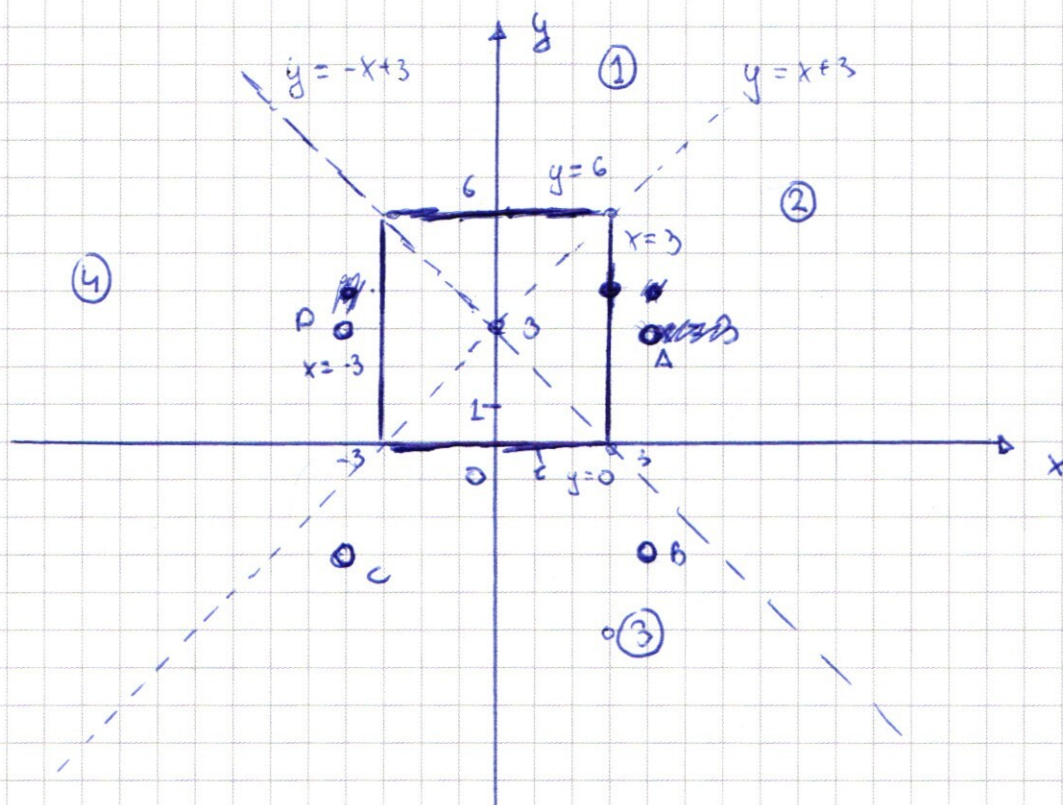
$\begin{cases} y \neq 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

откуда ~~$y = \frac{1}{3}$~~ ~~$x = \frac{1}{3}$~~ ~~$y = \frac{1}{3}$~~ ~~$x = \frac{1}{3}$~~ $y=3; x=9$

2.2) $x = 4 - y$

$\downarrow \downarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Раскроем модули в частях плоскости Oxy
(разбиение на рисунке):

① $y > x + 3$ $y > -x + 3$; $y = 6$

② $y < x + 3$ $y > -x + 3$; $x = 3$

③ $y < x + 3$ $y < -x + 3$; $y = 0$

④ $y > x + 3$; $y < -x + 3$; $x = -3$

2) Посмотрим на фигуру номер 2

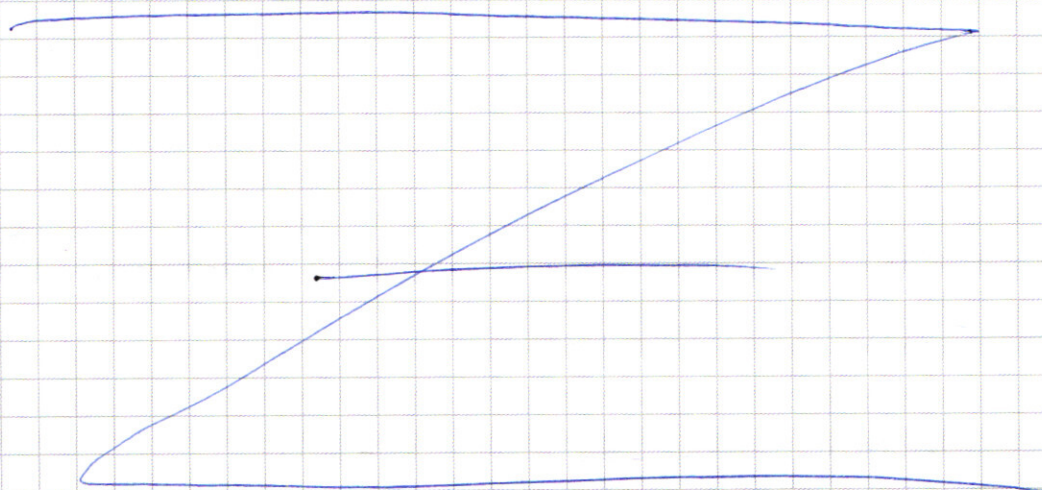
↓ ↓

$$\Updownarrow \begin{cases} y \in (0; 4) \mid \{1, 3\} \\ \begin{cases} 3 \lg(y) = \lg(4-y) \\ 3 \lg(y) = 2 \lg(4-y) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} y \in (0; 4) \mid \{1, 3\} \\ \begin{cases} y^3 = 4-y \\ y^3 = y^2 - 8y + 16 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Updownarrow \begin{cases} y^3 + y - 4 = 0 \\ y^3 - y^2 + 8y + 16 = 0 \\ y \in (0; 4) \end{cases}$$

Заметим, что $y^3 - y^2 + 8y + 16 = 0$ не имеет корней



Ответ: $x=3; y=1$

Задание №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

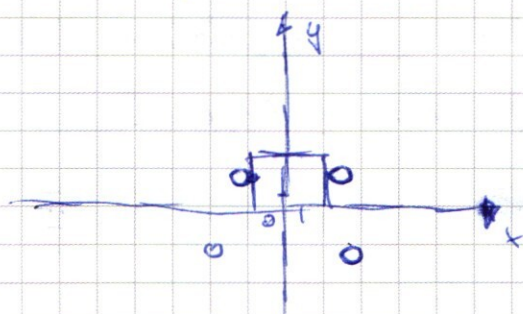
Изобразим мн-во (1)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

* В зависимости от a это или 4 окружности
радиуса $(\sqrt{a})$ или части окружностей с центром
в ω A, B, C, D

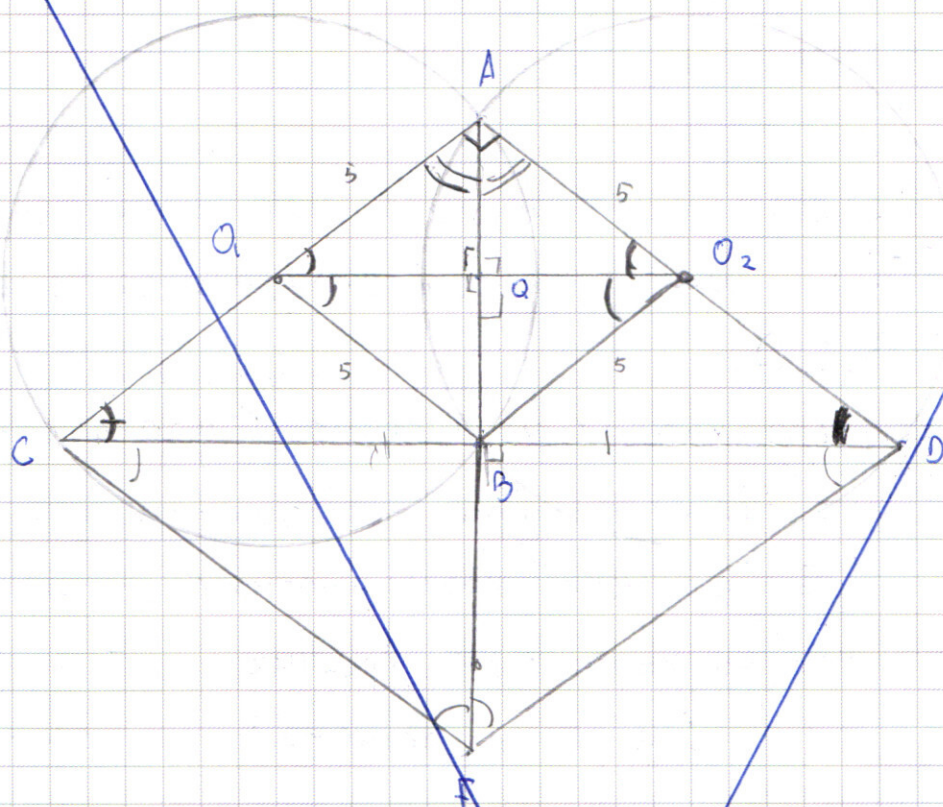
- Фигура симметрична относительно ^{прямых} $y=0$ и $x=0$
- Заметим, что такая фигура состоит из дуг
окружностей в разных координатных четвертях
центры которых находятся на прямых $y=3$
и $y=-3$, то если есть решение системы
- ~~$(x_0, 0)$~~ $(x_0, 0)$ и $(-x_0, 0)$, то пары
- $(x_0, 6)$ и $(-x_0, 6)$ тоже - решения
системы, ^{и наоборот} поэтому окружности из III и
IV координатных четвертей не должны касаться
квадрата / пересекать его.

- Откуда следует, что только при $a=1$
система имеет 2 решения, схематично
это изображено ниже:



Ответ: $a=1$

Задача №6



Примечание:

(-) $O_1 \notin (AC)$ и

(-) $O_2 \notin (BD)$

$\square O_1$ и O_2 - центры окружностей

(-) $Q = [O_1 O_2] \cap [AB]$

1) $\triangle AQB$ - P/D , основание (AB)

$\Rightarrow \text{т.к. } (O, Q) \perp (AB)$ (св-во линии соед. центры окруж)

то $\angle AO_1Q = \angle BO_1Q$,

2) $\square \angle AQB = 2\tilde{\alpha}$, тогда как $\angle ACB$ как вписанный равен $\tilde{\alpha}$

3) Аналогично для $AB \cap O_2$; $\triangle ABO_1 = \triangle ABO_2$ по 3 сторонам, откуда $\angle BOA = \tilde{\alpha}$

4) В $\triangle AOB$, $2\tilde{\alpha} + \frac{\pi}{2} = \pi$, откуда $\tilde{\alpha} = \frac{\pi}{4}$

*** o o o

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \sum_{k=7}^{70} (70 - x + 2^{64}x - 2^{65} \cdot 3 - 2^x) =$$

$$= 70 \cdot 62 + 2^{64} \cdot \sum_{x=7}^{70} x - 2^{65} \cdot 3 \cdot 62 - \frac{2^7 (2^{62} - 1)}{2} =$$

$$= 70 \cdot 62 + 2^{64} \cdot \left(\frac{70 \cdot 71}{2} - \frac{8 \cdot 9}{2} \right) - 2^{65} \cdot 3 \cdot 62 - 2^6 (2^{62} - 1) =$$

$$= 40.62 + 2^{64} (35.71 - 4.7 - 6.82 - 2^4) + 2^8 =$$

$$= 70 \cdot 62 + 64 + 2^{64} (35,71 - 6 \cdot 62 - 42) =$$

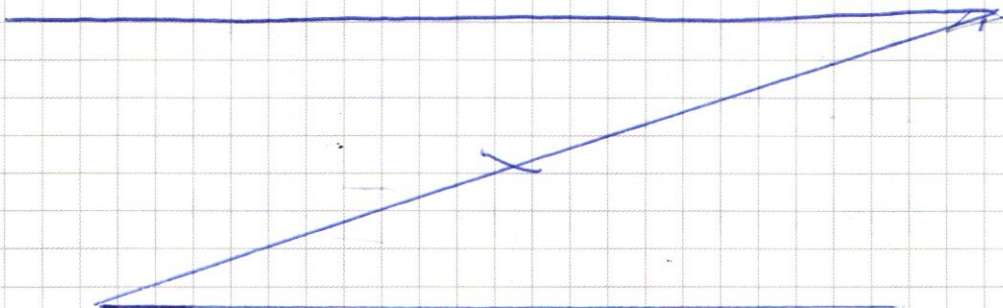
$$= 4340 + 64 + 2^{64} (35^2 \cdot 2 - 35 - 6 \cdot 62 - 42) =$$

$$= 4404 + 2^{64} (1225 \cdot 2 - 662 - 7) =$$

$$= 4409 + 2^{64} (2450 - 139) =$$

Ober = $4404 + 2^{64} \cdot 2311$

Зодгару N^о 5 сн мо снз блонк



$N^{\circ} 6$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

решение в целых есть если

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

равносильно:

$$* \text{ или, что } 70 - x + 2^{64}(x - 6) - 2^x > 0$$

$$1) \text{ т.к. } f(x) = 70 - x \text{ и } g(x) = 2^{64}(x - 6) -$$

прямые с разным наклоном, то

из того что $g(x) < f(x)$ при $x=5$, следует

что и при $x \leq 5$ не будет решений

(т.к. $g'(x) - f'(x) > 0$, то разность g и f растёт с увеличением x)

при $x=4$ уже очевидно есть решение

2) Найдём x при котором $70 - x + 2^{64}(x - 6) - 2^x$ станет меньше 0:

$$4 \quad x = 70$$

$$0 + 2^{64} \cdot 2^6 - 2^{70} = 0 \quad \checkmark$$

т.е. при $x=70$ решений уже нет

количество целых y удовлетворяющих системе

это и есть значение выражения

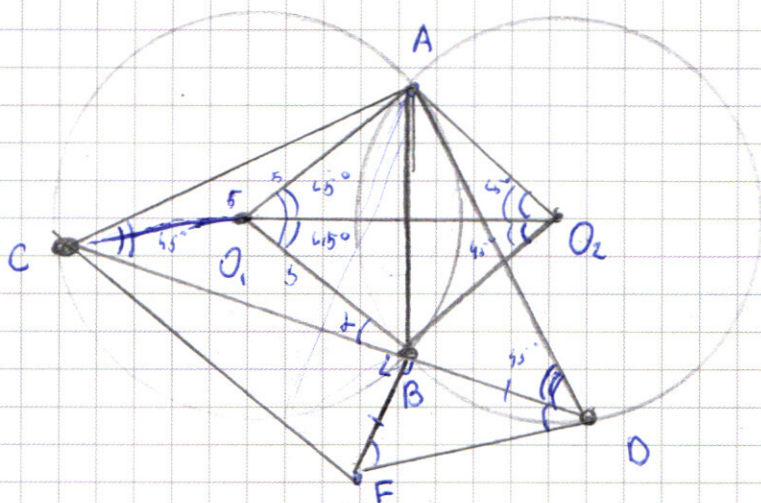
$$|y(x)| = 70 - x + 2^{64}(x - 6) - 2^x$$

Тогда всего пар будет $\sum_{x=4}^{69} |y(x)|$

↓

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



O_1 и O_2 - центры
окружностей

1) $\triangle AO_1O_2$ - равнобедр.
со стороной 5 и ~~основанием~~
и основанием O_1O_2

2) $\triangle AO_1O_2 = \triangle BO_1O_2$ по
3-м сторонам

• откуда $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1$

3) $\angle ACB = \angle AO_1O_2$ как вписанный ($\angle AOB$ - центр,
 $\angle AOB = 2\angle ACB$)

• $\angle AOB = \angle AO_1O_2$ аналогично

$\Rightarrow \angle AOB = \angle ACB \Rightarrow$ из $\triangle ACD$: $\angle AOB = 45^\circ$

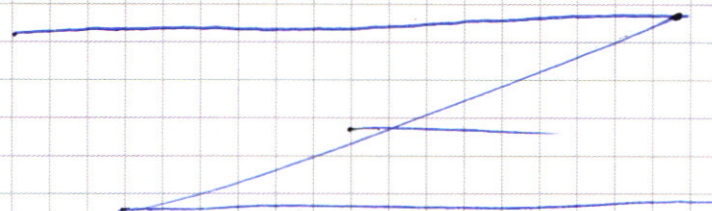
4) $|AB|$ из $\triangle ACB$: $|AB| = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

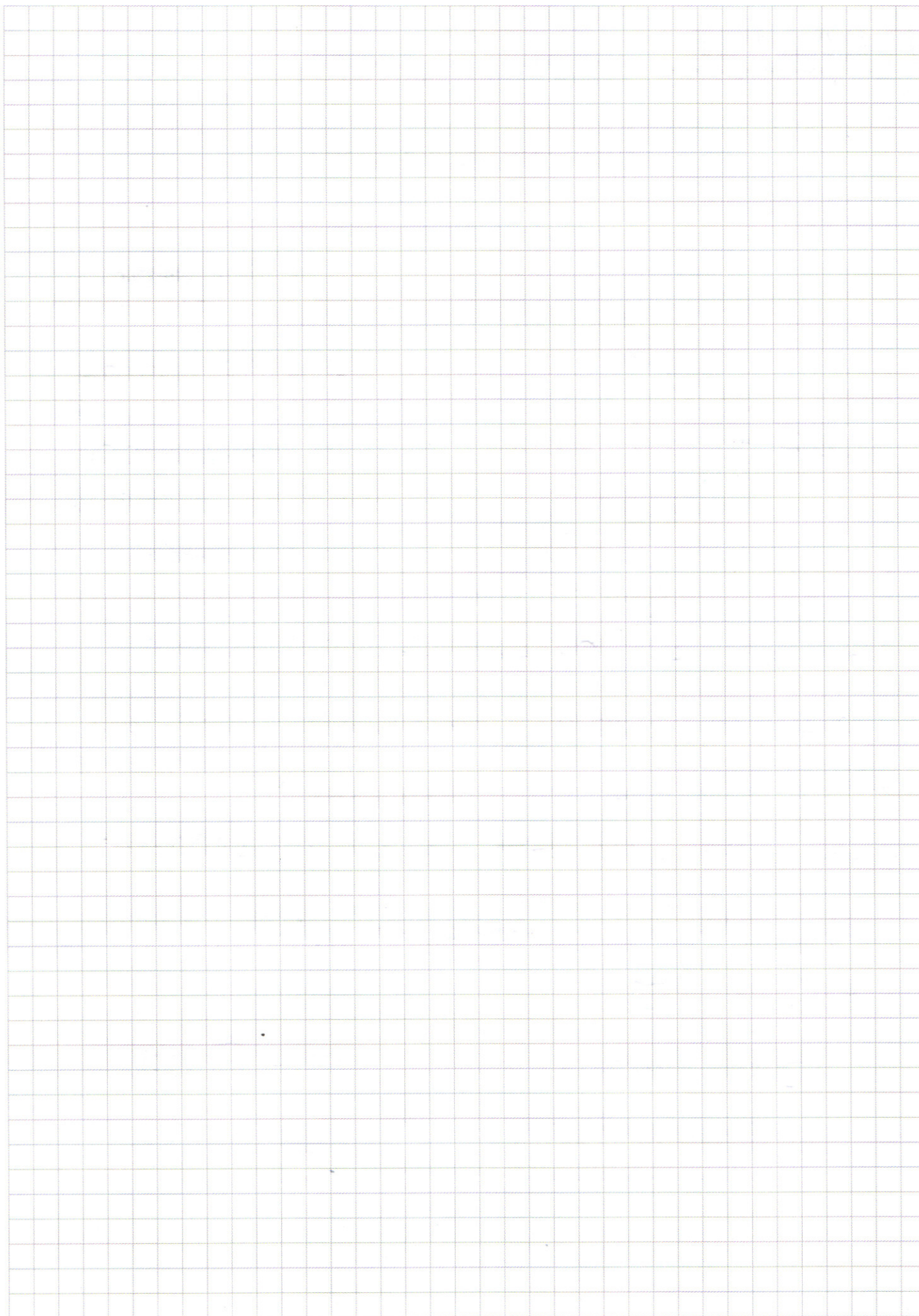
~~интересно~~

$$|CD| = \sqrt{2} |AC|$$

~~интересно~~

$|AB|$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^2 \lg y \cdot (4-y)$$

$$(4-y)y > 0$$

$$y \in (0, 4)$$

$$a^{\log_b c} = a^{\log_a b \cdot \log_b a} = b^{\log_a c}$$

$$3^3 \lg 3^2 = 3^2 \lg 3^3$$

$$y^5 \lg(4-y) \cdot (4-y) \lg(4-y) = y^2 \lg y \cdot y^2 \lg(4-y)$$

$$3^9 \lg 3^2 = 3^4 \lg 3^3$$

$$(4-y)^{\log_{10}(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)}$$

$$= y^{\lg_{10} y \cdot \lg^2(4-y)}$$

$$5 \cdot \lg(4-y) + \frac{\lg^2(4-y)}{\lg y} = 2 \lg y + 2 \lg(4-y)$$

$$\frac{8}{3} \lg 3 + \frac{1}{3} \lg 3 = \frac{1}{3} = 2 \lg 3 + 4 \lg 3^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{4}{3}$$

$$4 = \lg 3^{\frac{2}{3}} \quad 3 \lg(4-y) + \frac{\lg^2(4-y)}{\lg y} = 2 \lg y$$

$$1 + 3 \lg 3 = 1$$

$$3^{-\frac{1}{3}} = 1^2 \cdot \lg 3$$

$$y = 3^{-\frac{1}{3}}$$

$$x = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$y = 3^{-\frac{5}{3}}$$

$$3^{-\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$3^{-\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 3^{-\frac{7}{3}} \cdot \lg 3^{\frac{2}{3}}$$

$$3^{-\frac{7}{3}} \lg 3^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{2}{3}} 2 \lg 3^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{\frac{2}{3}} \lg 3 = 3^{-\frac{4}{3}} \lg 3$$

$$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 = 3y^2 - 12y + y^2 + 4y + 4 = (2y+2)^2$$

$$(x - y - 2)^2 = (2y+2)^2$$

$$x - y - 2 = 2y + 2$$

$$x - y - 2 = -2y - 2 \quad x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{-3y}\right)^{\lg 3y} = y$$

$$y - 3 = x$$

$$y = x + 3$$

$$y = -x + 1$$

$$2 \lg 3y^2 = 4 \lg 3y$$

$$y^4 \lg 3y \cdot 3^{-\lg 3y} = y^4 \lg 3y$$

$$3^{-\lg 3y} = 1$$

$$-\lg 3y = 0$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{y^5}{1-y}\right)^{\lg(1-y)} = y^2 \lg(1-y) + 2 \lg y$$

$$y^5 \lg(1-y)$$

$$a^{\log_b a} = b^{\log_b a}$$

$$b^{\log_a b} = b^{\log_b a \cdot \frac{\log_a b}{\log_a b}} = b^{\log_a b}$$

$$a^{\log_b a} = b^{\log_a b \cdot \log_b a} = b$$

$$b^{\log_b a} = a$$

$$b^{\log_a b} = b$$

$$\log$$

$$\frac{\log_a a}{1} =$$

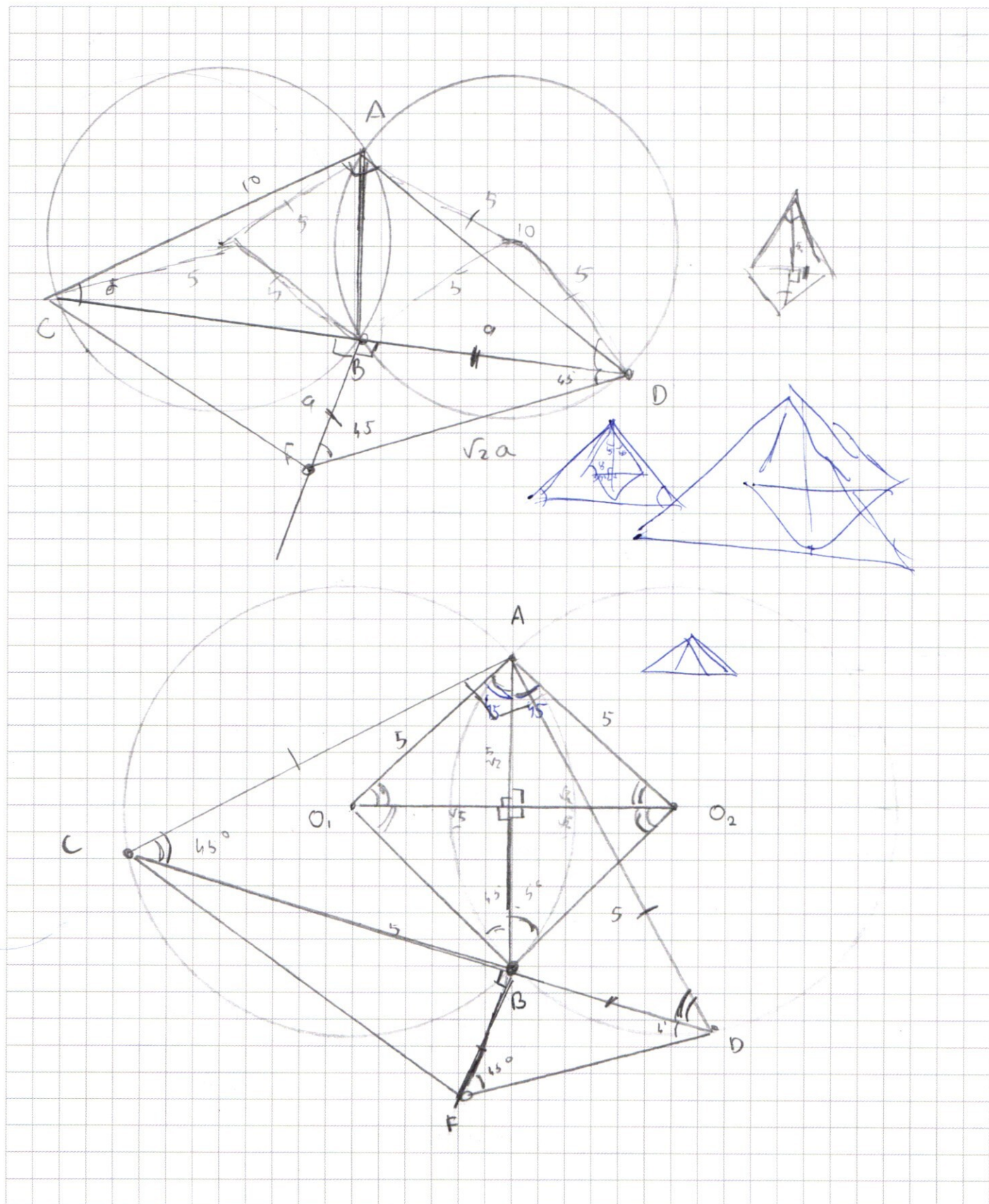
$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$$

$$a^{\log_b a} = a^{\log_b a \cdot \log_a b \cdot \log_b a}$$

$$a^{\log_b a} = b^{\log_a b}$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad a^{\log_b a} = \frac{\log_a b}{\log_b a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$40-x+2^{64}(x-6)-2^x > 0$$

$$5\sqrt{2} = x^2 + y$$

$$BC^2 + BF^2 = (BC + BF)^2 - 2BC \cdot BF$$

$$\frac{3^4}{8} + \frac{3^{14}}{2} - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2$$



$$3y^2 - 2y + 8; D < 0 \checkmark$$

$$\frac{BP}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{AP}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AP}{\sin \alpha}$$

$$2^{64} (2^{64} - 1)$$

$$BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2 =$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2}} = (BC + BD)^2 - (4-x)^3 = x$$

$$- BC \cdot BD =$$

$$2x^2 - 2xy$$

$$x = 10 \sin \alpha$$

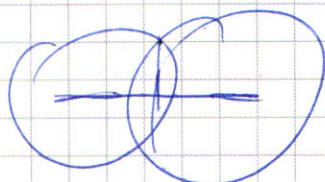
$$\frac{x}{\sin \alpha} =$$

$$\sqrt{2} x^2 -$$

$$x = 10 \sin \alpha$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

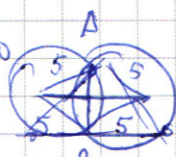
$$50 \pm x^2$$



$$180 - \alpha - 45^\circ + \alpha - 45^\circ = \pi$$

$$\frac{y}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = 10$$

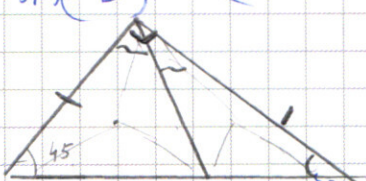


$$y = 10 \sin(\alpha - 45^\circ)$$

$$x = 10 \sin \alpha$$



$$\sin(\alpha - 45^\circ) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \sqrt{2}$$



$$x^2 - y^2 =$$

$$= \sin \alpha$$

$$y > 2^5 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$40 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

при $x = 2$

при $x = 2$

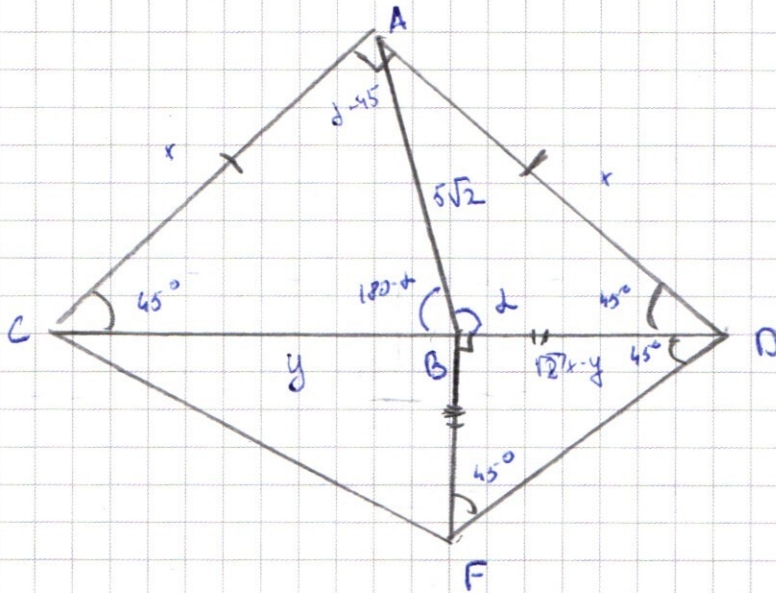
при $x = 2$

при $x = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Тогда $|AB| = 5\sqrt{2}$ (т.к. $|AQ| = |QB| = 5 \cdot \sin \frac{\pi}{4}$)

~~по теореме косинусов $\sin \angle ACB = \frac{|AB|}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$~~



$\angle |AD| = |AC| = x$

• $|CB| = y$; $|BD| = x\sqrt{2} - y$

~~$50 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$~~
 ~~$50 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$~~

~~$0 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$~~

~~$0 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$~~

~~$50 = (x - y)^2 - 2xy (\cos \frac{\pi}{4} + 1)$~~

• по т. косинусов $(\sqrt{2}x - y)^2 + y^2 = 50 + 2x(\sqrt{2}x - y) \cos \frac{\pi}{4}$

• по т. косинусов $50 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$

т.е. $|CF|^2 = (\sqrt{2}x - y)^2 + x^2 = 50 + 2x^2 - \sqrt{2}xy$
 и при этом $x^2 - \sqrt{2}xy = 50 - y^2$
 откуда $|CF|^2 = 100 + x^2 - y^2$

4) Из теоремы синусов

$$\begin{cases} x = 10 \sin t \\ y = 10 \sin(t - 45^\circ) \end{cases}$$

По теореме синусов:

$$50 = 100 \left(\sin^2 t + \left(1 - \sin 2t\right) \frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t (\sin t - \cos t)$$

$$50 = 100 \left(\sin^2 t - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\sin^2 t - \frac{\sin 2t}{2} \right)$$

$$0 = 99 \left(\sin^2 t - \frac{\sin 2t}{2} \right)$$

$$\sin^2 t = \frac{\sin 2t}{2}$$



$$\begin{cases} \sin t = 0 \\ t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

не реализуется



откуда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N^o 1

$$\begin{aligned}
 3345 &= \cancel{25} 3000 + 300 + 3 \cdot 25 = 2^{11} \\
 &= 120 \cdot 25 + 12 \cdot 25 + 3 \cdot 25 = 135 \cdot 25 = \\
 &= (130 + 5) \cdot 25 = 27 \cdot 5 \cdot 25 = 3^3 \cdot 5^3
 \end{aligned}$$

• Проверка

$$x = 64 \quad 2^{64} = 64 \cdot 2^{64} - 1$$

$$\begin{aligned}
 125 \cdot 27 &= 125 \cdot 20 + 125 \cdot 7 = 2500 + 700 + 7 \cdot 25 = \\
 &= 3200 + 175 = 3375 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2$$

...

N^o 2

$$\cos \alpha \approx \sin \alpha$$

$$\cos \alpha - \cos \beta =$$

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \gamma \cos \kappa - \sin \gamma \sin \kappa$$

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos \gamma \cos \kappa$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \gamma \cos \kappa + \cos \gamma \sin \kappa$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \gamma \sin \kappa = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \cos 7x \sin 4x$$

* 25

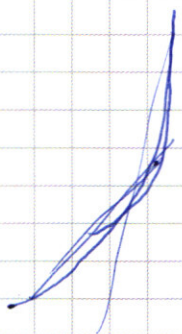
$$2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

* 3.

$$\left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2$$



$$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 = 3y^2 - 12y + (y+2)^2$$

$$(x - y - 2)^2 = 4y^2 + 8y + 4 = 4(y^2 + 2y + 1)$$

$$(x - y - 2)^2 = (2y + 2)^2$$

$$x - y - 2 = 2y + 2 \quad \text{or} \quad x = 3y + 4$$

$$x - y - 2 = -2y - 2 \quad \text{or} \quad x = -y$$

±

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 40 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 40 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 40 + x - x \cdot 2^{64} < 0$$

$$2^x + 2^{64} (6 - x) + x - 40 < 0$$