

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

**Согласие законного представителя (родителя)
на обработку персональных данных несовершеннолетнего**

Я, Питрова Надежда Васильевна
(ФИО родителя или законного представителя)
паспорт 97 08 629 529 выдан Отделом УФМС РФ по Чувашской
Республике в Калининском районе г. Чебоксары 10.06.2008
(серия, номер) (когда и кем выдан)
(в случае опекунов указать реквизиты документа, на основании которого осуществляется опека или попечительство)
зарегистрированный по адресу: г. Чебоксары, ул. Кушниковская 21/1 кв. 31.

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее – оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии) ребенка;
- дата рождения ребенка;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность ребенка;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучается ребенок;
- класс / курс;
- наименования образовательных программ, по которым обучается ребенок;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях ребенка по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурноспортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования ребенка;
- контактные данные ребенка (телефон, адрес электронной почты);
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных несовершеннолетнего исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга его дальнейшего развития.

Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован(а), что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.

Раш
(Подпись)

Питрова Н.В.
(Расшифровка подписи)

20.02.2002
(Дата)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(1) 9261 = 1029 \cdot 9 = 343 \cdot 3^3 = 49 \cdot 7 \cdot 3^3 = 7^3 \cdot 3^3$$

Пусть $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_8}$ - число, тогда $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 7^3 \cdot 3^3$,

причём $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_8 \leq 9$, $a_1 \neq 0$. $\Rightarrow$ число содержит 3 семёрки

и 3 тройки или 3 семёрки, одну девятку, одну тройку (остальные цифры - единицы).

$$1) 3 - "7", 3 - "3", 2 - "1".$$

$$\frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 10 = 560$$

$$2) 3 - "7", 1 - "9", 1 - "3", 3 - "1"$$

$$\frac{8!}{3!5!} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

$$(2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 7x \sin 2x -$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x \Leftrightarrow \sin 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \Leftrightarrow \text{Решим случаи:}$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \Leftrightarrow \sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \frac{y}{x^2} \\ (y-2x)(x+y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Выбор значений:}$$

$$1) \begin{cases} y = 2x \\ (x^2 (2y)^4)^{-\ln x} = (2x) \ln \frac{2x}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (16x^6)^{-\ln x} = (2x) \ln \frac{2}{x^5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

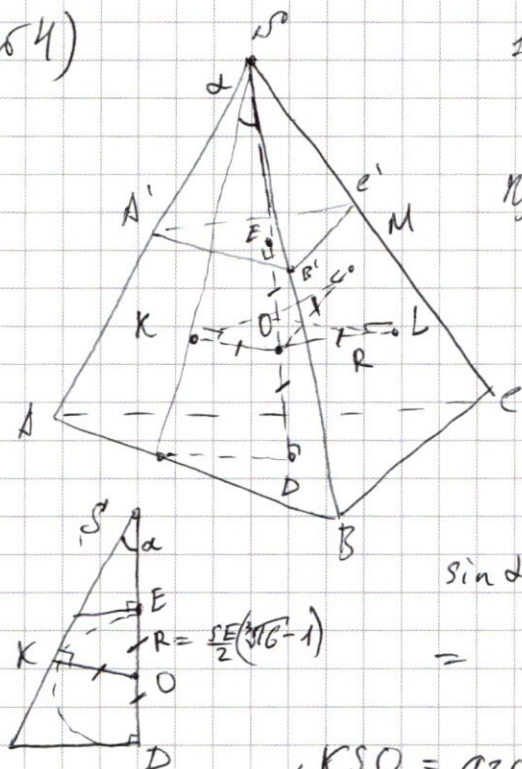
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6 \ln x}} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(64x^6)^{\ln x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \left(\frac{64x^6}{16x^6} \right)^{\ln x} = (2x)^{\ln 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \neq 0 \\ 4^{\ln x} = (2x)^{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \neq 0 \\ 2^{2 \ln x} = 2^{\ln 2} x^{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \neq 0 \\ 2^{2 \ln x - \ln 2} = x^{\ln 2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y = 4-x \\ (x^2 (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x) \ln \frac{4-x}{x^2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б4)



1) $S_K = S_L = S_M \Rightarrow \angle KSO = \angle LSO = \angle MSO = \alpha$

ABC и $A'B'C'$ — и-ти кас. сферы и $\perp SO$,
 $S(ABC) = 16$, $S(A'B'C') = 1$ — по условию.
Пусть D и E — точки касания. Тогда $ED \parallel BC$ и $ED \perp SO$.
 $ABC \parallel A'B'C' \Rightarrow ABCS$ и $A'B'C'S$ подобны.
 $\Rightarrow AS = A'S \cdot \sqrt[3]{16} \Rightarrow SD = \sqrt[3]{16} \cdot SE$

2) $ED = 2R$, где R — радиус сферы.

$$ED = SD - SE = SE(\sqrt[3]{16} - 1)$$

$$R = \frac{SE}{2}(\sqrt[3]{16} - 1)$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{SE + R} = \frac{\frac{SE}{2}(\sqrt[3]{16} - 1)}{SE + \frac{SE}{2}(\sqrt[3]{16} - 1)} = \frac{2^{4/3} - 1}{2 + 2^{4/3} - 1}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{2^{4/3} - 1}{2^{4/3} + 1}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{2^{4/3} - 1}{2^{4/3} + 1}$$

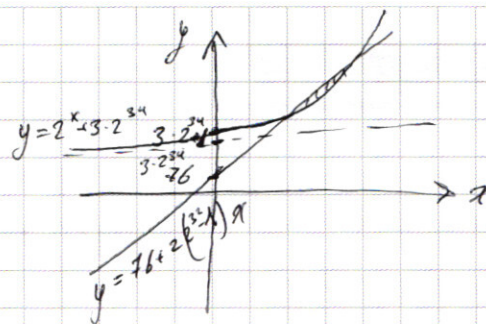
3) $KL M \parallel ABC$ (так $OK \cos(90^\circ - \alpha) = LO \cos(90^\circ - \alpha) = MO \cos(90^\circ - \alpha)$).

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} (S(A'B'C') + S(ABC)) = \frac{1}{2} (1 + 16) = \frac{17}{2}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{2^{4/3} - 1}{2^{4/3} + 1}$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{17}{2}$$

57) $y \in \mathbb{Z}$ $\left\{ \begin{array}{l} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} > 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{array} \right.$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $a = ?$: $\exists$ ровно 2 решения

$$1) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ x^2 - 24x + 144 + y^2 - 10y + 25 = a \end{cases}$$

$a \geq 0$, причём при $x, y \geq 0$ и при $x, y \leq 0$ — окружность с центром $(12; 5)$ и $(-12; -5)$ соотв.,

для $x > 0, y < 0$ — с центром $(12; -5)$, для $x < 0, y > 0$ — с центром $(-12; 5)$,
радиус $= \sqrt{a}$ (при $a = 0$ — точка).

Таким образом 1^е равенство — ломаная,
2^е равенство — окружности.

2) Рассмотрим случаи:

$$1) \begin{cases} x+y+5 \geq 0, y-x+5 \geq 0 \\ 2y+10 = 10 \Leftrightarrow y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

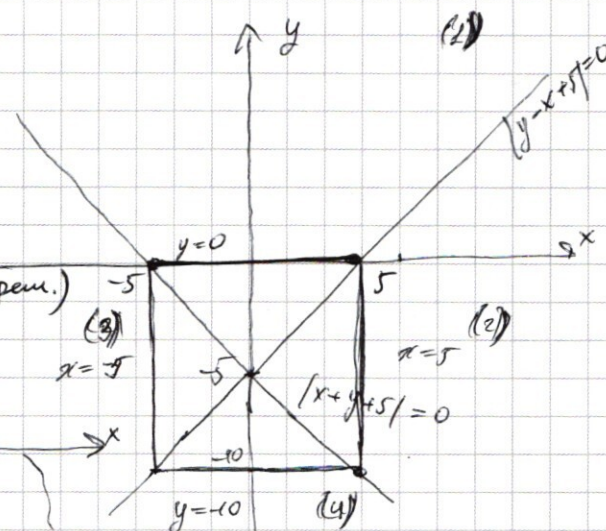
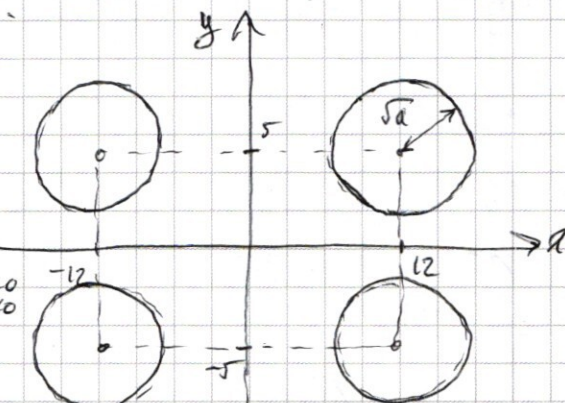
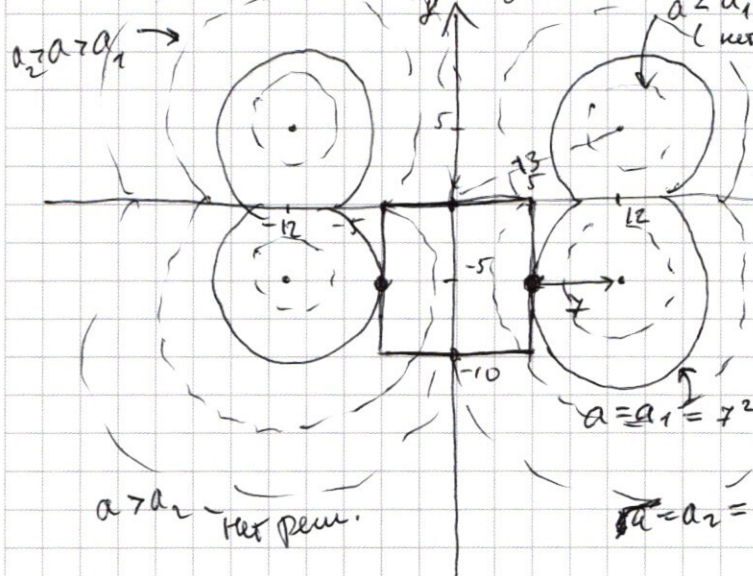
$$2) \begin{cases} x+y+5 \geq 0, y-x+5 < 0 \\ x+y+5 - y+x-5 = 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3) \begin{cases} x+y+5 < 0, y-x+5 \geq 0 \\ -x-y-5 + y-x+5 = 10 \Leftrightarrow -2x = 10 \Leftrightarrow x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$4) \begin{cases} x+y+5 < 0, y-x+5 < 0 \\ -x-y-5 - y+x-5 = 10 \Leftrightarrow -2y = 20 \Leftrightarrow y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Таким образом первое ур-е задаёт квадрат:

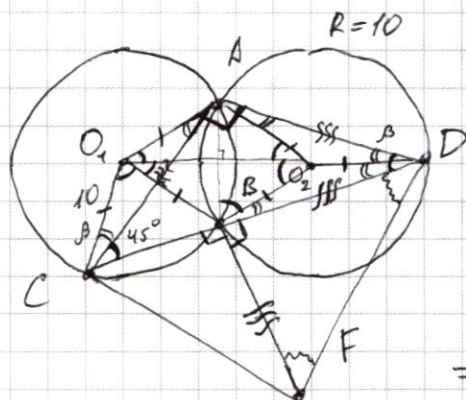
$a_2 \geq a_1$



$$3) \forall a, \text{ что спраш.} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a_1} = 7 \Leftrightarrow a_1 = 49 \\ \sqrt{a_2} = 13 \Leftrightarrow a_2 = 169 \end{cases}$$

Ответ: $a = 49, a = 169$.

56)



а) 1) Окр-ти равны $\Rightarrow$ равны их дуги $AB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедр.

$$\Rightarrow AC = AD, \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle A O_2 B = \angle A O_1 B = 90^\circ.$$
$$\beta = \{O_1 C = O_1 A = O_2 A = O_2 D\} \Rightarrow \{O_1 A = D O_2 A\}$$
$$\Rightarrow \angle O_1 CA = \angle O_1 AC = \angle O_2 AD = \angle O_2 DA \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle A O_1 O_2 = \angle C A D = 90^\circ \Rightarrow \angle A O_1 O_2 = \angle A O_2 O_1 = 45^\circ$$

U₃ s ADO₂ : $\angle O_2AD + \angle O_2DA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle O_1O_2A = 2\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = \frac{90^\circ}{2}$$

Из симметрии отн-о O_1O_2
 $O_2DB = \beta \Rightarrow \angle ACO_2 = \angle BO_2D \Rightarrow AD = BD$

2) $\angle BOD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$BD^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cos 135^\circ = 2 \cdot 10^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2 + \sqrt{2}) 10^2$$

$$BF = BD = 10\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad BF^2 = 10^2 (2 + \sqrt{2})$$

$$BF = BD = 10\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$BF^2 = 10^2 / (2 + \sqrt{2})$$

$$3) \angle C O_1 B = 180^\circ - 2(\beta + 45^\circ) = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Lös: } |B|^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cos \angle O, B = 2 \cdot 10^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10^2(2 - \sqrt{2})$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = 10^2(2+\sqrt{2}) + 10^2(2-\sqrt{2}) = 10^2 \cdot 4 = 20^2$$

Answer: CF = 20

8) $\angle ABO_2 = \angle BAO_2 = 45^\circ (= \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 90^\circ - 45^\circ)$

$$AB = 10\sqrt{2} \text{ т.к. } \angle AOB = 90^\circ$$

$$AC^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cos 135^\circ = 2 \cdot 10^2 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow AC = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot 10$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\angle BCF + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{BF}{CF} + \frac{CB}{CF} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{BF + CB}{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10\sqrt{2} + \sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S(\text{ACF}) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 10(2 + \sqrt{2}) \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{40} \left(\frac{10\sqrt{2} + \sqrt{5}}{10\sqrt{2} - 10} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \quad '7': \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$'5': \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \quad 560$$

$$C_k^n \quad \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$2) \quad \cos 9\pi$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad -2 \sin 7\pi \sin 2\pi$$

$$2 \sin 7\pi \cos 2\pi \quad 2 \sin 7\pi (\cos 2\pi - \sin 2\pi) - \sqrt{2} \cos 4\pi = 0$$

$$3) \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(4/x^2)} = y^{\ln 4 - 2 \ln x} = y^{\ln 4} \cdot y^{-2 \ln x} = y^{\ln 4} \cdot (y^{\ln x})^{-2} = y^{\ln 4} \cdot (x^{\ln y})^{-2} = y^{\ln 4} \cdot x^{-2 \ln y}$$

$$y^2 - \pi y - 2\pi^2 + 8\pi - 4y = 0 \quad y(y - \pi - 4) + 2\pi(\pi - 4) = 0$$

$$(y + 2\pi)(y - \pi - 4) = 0 \quad (\pi - 4)(y) \quad (\pi y + y^2 - 4y + 2\pi y + 8\pi = y^2 - \pi y - 2\pi^2 + 8\pi - 4y)$$

$$(x + y)(y - 2\pi) + 4(-2\pi + y) = (y - 2\pi)(x + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2\pi)(x + y - 4) = 0$$

$$\frac{\pi}{x} \cdot y^{-2 \ln x} = \left(\frac{y^{\ln y}}{x^{\ln y}} \right)^{-2} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\frac{\pi}{x} \cdot (2\pi)^{-2 \ln x} = (2\pi)^{\ln \frac{2\pi}{x^2}}$$

$$y = 4 - x \quad (x^2 (4 - x)^4)^{-\ln(4 - x)} = (4 - x)^{\ln \frac{4 - x}{x^2}}$$

$$\begin{aligned} (x^2 \cdot (2\pi)^4)^{\ln x} &= (16\pi^6)^{\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{\pi^6}} \\ &= (2x)^{\ln \frac{2}{\pi^6}} \\ (16\pi^6)^{-\ln x} &= (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} \\ &= (2x)^{\ln 2 - \ln x^6} \\ &= \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{\ln x^6}} \end{aligned}$$

