

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

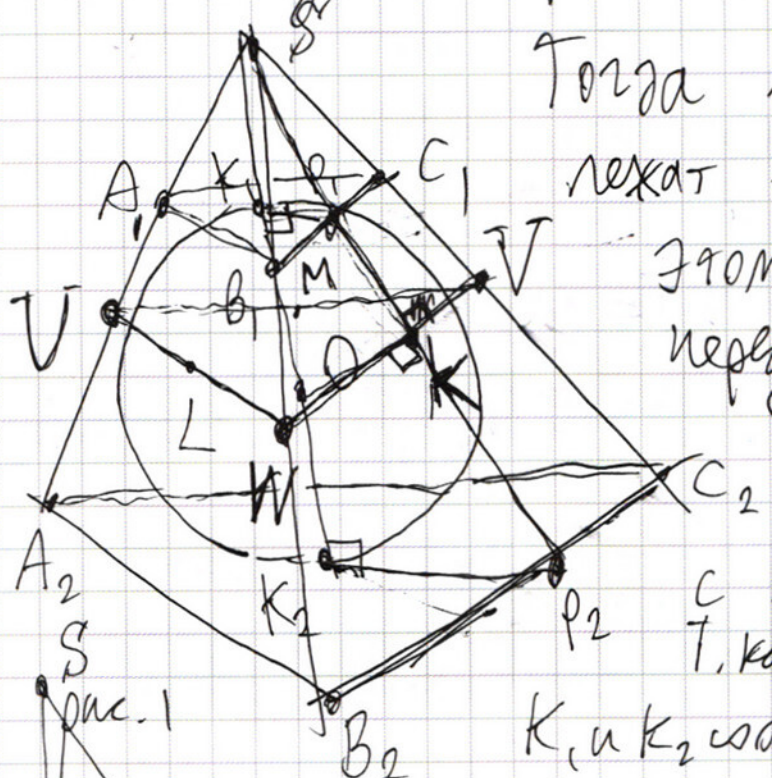
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик

$$\begin{aligned}
 & \boxed{2} \text{ Разделим всё на } \sqrt{2}: \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(7x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) - \\
 & - \cos(10x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(7x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos(10x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{(7x + \frac{\pi}{4}) + (3x + \frac{\pi}{4})}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(7x + \frac{\pi}{4}) - (3x + \frac{\pi}{4})}{2}\right) = \cos(10x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{10x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x}{2}\right) = \cos(10x) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x) = \cos(10x).
 \end{aligned}$$

4) Лемма: Точки касания вписанной шестовки в трёхгранный угол сферы с его гранями лежат в плоскости, $\perp SO$, где S - верш. угла, O - центр сферы.

▷ Это известный факт. ▽



Тогда $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle KLM$ лежат в 11 плоскостях и при этом подобны (см. рис. 1). Проведем через K прямую, паралл. B_1C_1 и также перп. B_1C_1 . Обозначим точки пересечения.

$\triangle A_1B_1C_1$ за P_1 , $\triangle A_2B_2C_2$ за P_2 . Т.кас. $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ со сферой K_1 и K_2 соотв. Рассм. $K_1P_1P_2K_2$ (см.

рис. 2). Коэф. подобия $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ равен $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Соотв. эл-ты подобных 3-х уг. как коэф. подобия, поэтому $K_1P_1 = 2x$, $K_2P_2 = 3x$. Из $\triangle SK_2P_2$ и $\triangle SK_1P_1$:

$$\triangle SK_1P_1: SK_1/SK_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

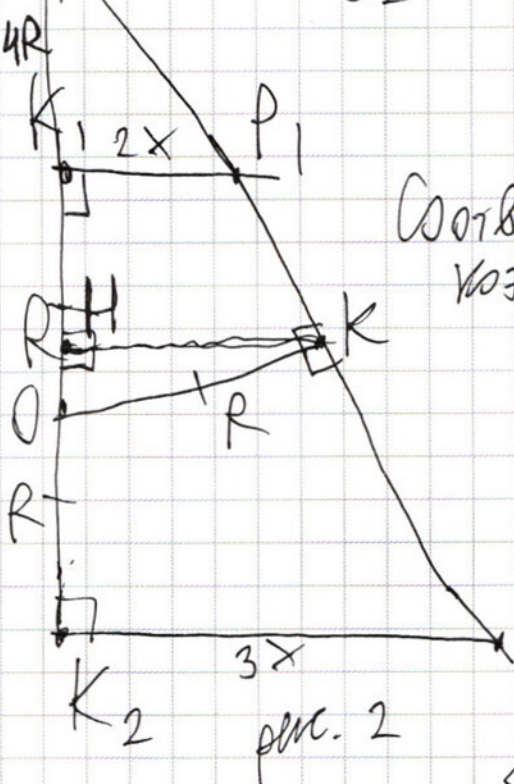
$$\Rightarrow SK_1 = 4R. \text{ Хотим}$$

$$\text{найти } SH \text{ (см. рис. 2), } SK = \sqrt{25R^2 - R^2} = \sqrt{24}R.$$

$$2 \cdot S(\triangle OKS) = \sqrt{24}R \cdot R = |HK| \cdot 5R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{\sqrt{24}}{5}R. OH = \sqrt{R^2 - \frac{24}{25}R^2} = \frac{1}{5}R$$

(из $\triangle OHK$). Тогда $SH = SK_2 - HK_2 = SK_2 - (OH + OK_2) = 6R - (R + \frac{1}{5}R) = 6R - \frac{6}{5}R = \frac{24}{5}R$. $\triangle KLM$ и $\triangle A_2B_2C_2$ подобны с коэф. $\frac{6R - \frac{6}{5}R}{6R} = \frac{6 - \frac{6}{5}}{6} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Тогда $S(\triangle KLM \triangle WUV) = 9 \cdot \frac{16}{25} = \rightarrow$



а также (SK)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Исходник
 $\rightarrow$
 $\sin(\widehat{KSO}) = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5}$. $\hat{K}$ (ОК острый, т.к. угол в прямоугольн. тр-ке не прямой)

Ответ: Площадь сечения = $\frac{144}{25}$; $\widehat{KSO} = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$.

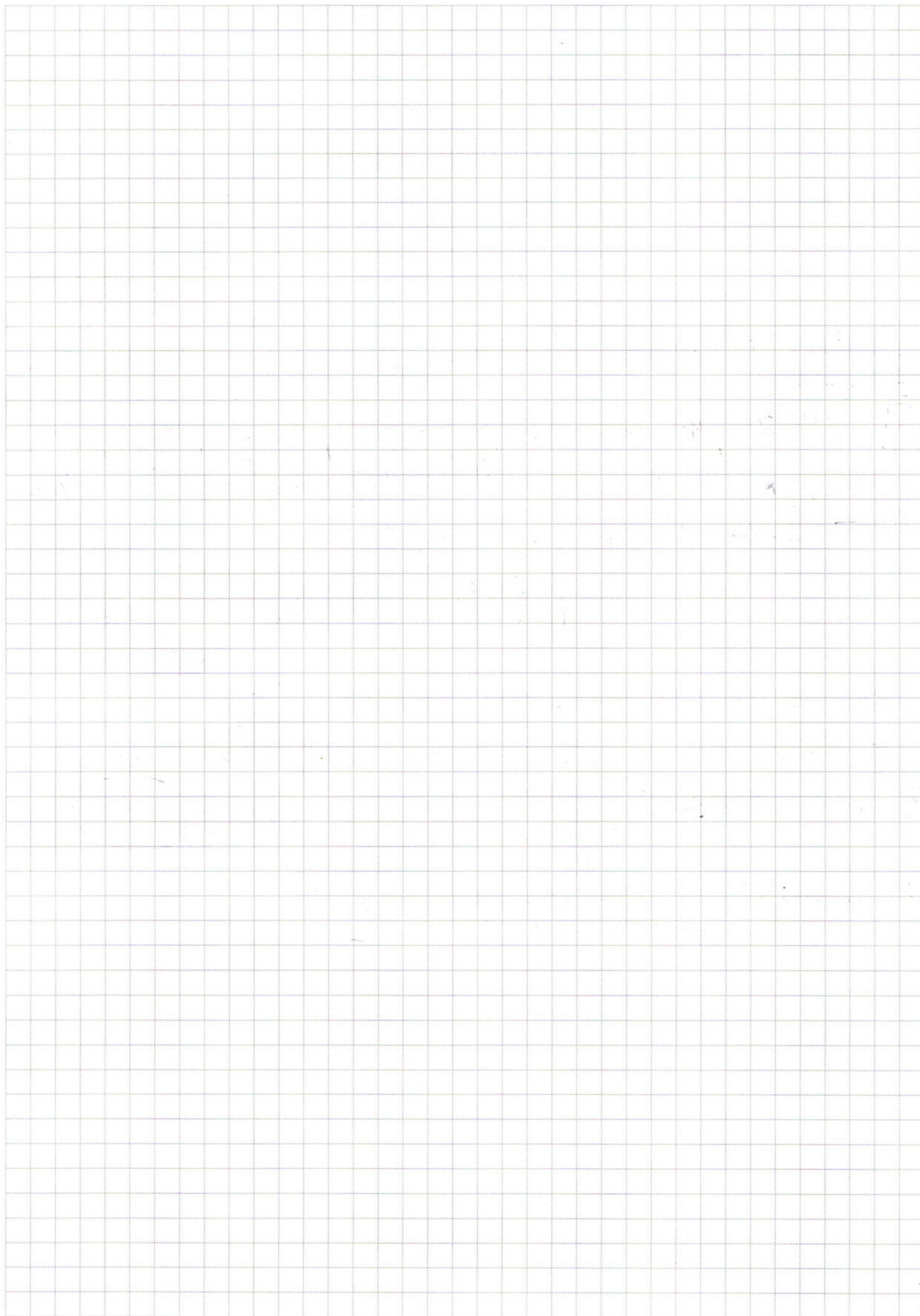
[5] Заметим, что если $(x_0; y_0)$ — реш., то и $(x_0; -y_0)$ — реш., т.к. $|-y_0| = |y_0|$, $|x_0 - 6 - y_0| + |x_0 - 6 + y_0| = |x_0 - 6 - (-y_0)| + |x_0 - 6 + (-y_0)|$.
~~Если~~ Если $y = 0$, то: $|x - 6| = 6$,

$$\begin{cases} |x - 6| = 6 \\ (|x - 6|)^2 = a - 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ или } x = 0; \\ 6^2 = a - 8^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 100$. При $a = 100$ есть решения $(0; 0)$ и $(12; 0)$.

$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| \geq (x - 6 - y) + (x - 6 + y) = 2x - 12 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \leq 12$; $|y + 6 - x| + |x - 6 + y| \geq 2y \Rightarrow y \leq 6$.

$|6 - x + y| + |6 - x - y| \geq 12 - 2x \Rightarrow x \leq 0$.



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик

16875 = $5^4 \cdot 3^3$. Тогда в десятичной записи
числа могут встречаться только цифры 1, 3, 5, 9.
При этом цифра "5" встречается ровно 4 раза; также
встретится либо 3 цифры "3", либо 1 цифра "3" и 1 цифра "9".
Остальные – единицы, иначе произведение цифр стало бы
на простой множитель, не равный 5 или 3. Мы
можем выбрать позиции цифр "5" C_8^4 способами.
Далее, мы выбираем позиции для трёх цифр
"3" (это можно сделать C_4^3 способами), либо одну
позицию для "3" и одну для "9" (это можно сделать
 $4 \cdot 3 = 12$ способами). Остальные позиции будут заняты
единицами. Тогда всего $C_8^4 \cdot (C_4^3 + 4 \cdot 3)$ чисел:

$$C_8^4 \cdot (C_4^3 + 4 \cdot 3) = C_8^4 \cdot (C_4^1 + 12) = C_8^4 \cdot (4 + 12) = 16 \cdot C_8^4 =$$

$$= 16 \cdot \frac{8!}{(4!) \cdot (4!)} = 16 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3} = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 10 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 7 \cdot 8 = 140 \cdot 8 = \boxed{1120}$$

Ответ: 1120.

$$\boxed{3} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg(y)} = (-x)^{\lg(-xy)} \Leftrightarrow \frac{(x^4)^{\lg(y)}}{(y^2)^{\lg(y)}} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (*)$$

Заметим, что $y > 0$ (иначе $\lg(y)$ не определен). Но тогда
 $x < 0$ (иначе $\lg(-xy)$ не опр.). Тогда $(*) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(-x)^{4 \lg(y)}}{y^{2 \lg(y)}} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(y)} \Leftrightarrow \frac{((-x)^{\lg(y)})^4}{(y^{\lg(y)})^2} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(y)} \Leftrightarrow \rightarrow$$

Черновик

$$\Leftrightarrow \frac{((-x)^{\lg(y)})^4}{100} = 10 \cdot (-x)^{\lg(y)} \Leftrightarrow [(-x)^{\lg(y)}]^4 = 1000 \cdot (-x)^{\lg(y)}$$

$$\Leftrightarrow [(-x)^{\lg(y)}]^3 = 10^3 \Leftrightarrow (-x)^{\lg(y)} = 10 \Leftrightarrow (-x) = y \text{ (т.к.}$$

ф-ция x^n монотонно возрастает на $(0; +\infty)$). Проверенная
целочисленная равносильность верна в предположении $y > 0, x < 0$.

Если $y \leq 0$, или $x \geq 0$, то пара $(x; y)$ — не решение. Пусть
 $y > 0, x < 0$, тогда $-x = y$. Тогда можно упростить второе

р-во из условия: $2y^2 - (-y)y - (-y)^2 - 4(-y) - 8y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y - 1) = 0. \text{ Т.к. } y > 0, \text{ то подходит только корень } y = 1.$$

решения: Тогда $x = -1$. Не будет хуже, если

мы проверим пару $(-1; 1)$.

$$\left(\frac{(-1)^4}{(1)^2} \right)^{\lg(1)} = (1)^{\lg(1)} \text{ т.к. } \lg(1) = 0, \text{ то имеем:}$$

$$1^{\lg(1)} = 1^{\lg(1)}, \text{ что верно. Проверим}$$

второе р-во: $2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 - 1^2 - 4 \cdot (-1) - 8 \cdot 1 = 2 + 1 - 1 + 4 - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y - 2) = 0. \text{ Корни}$$

$y = 0$ и $y = 2$. $y = 0$ не подх., т.к. $y > 0$. Если $y = 2$, то

$x = -2$. Не будет хуже, если мы проверим пару

$$(-2; 2): \left(\frac{(-2)^4}{2^2} \right)^{\lg(2)} \stackrel{?}{=} 2^{\lg(4)} \Leftrightarrow 4^{\lg(2)} \stackrel{?}{=} 2^{2\lg(2)} \Leftrightarrow$$

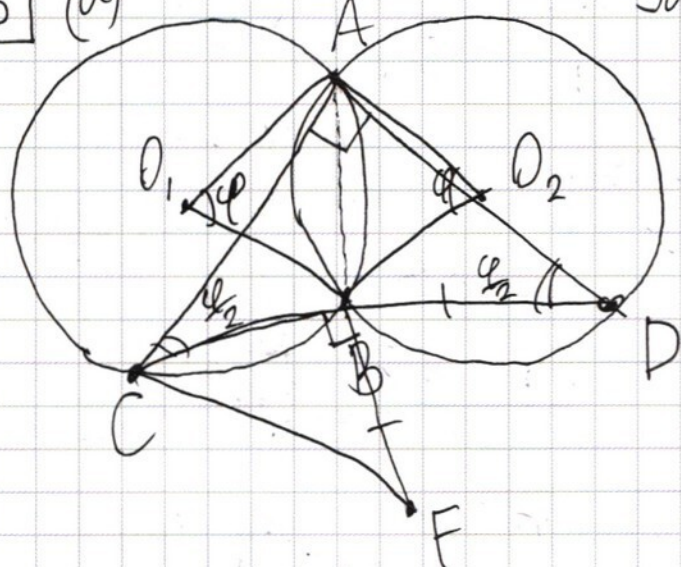
$$\Leftrightarrow 4^{\lg(2)} = 4^{\lg(2)}, \text{ что верно. Второе: } 2 \cdot 2^2 - (-2) \cdot 2 - (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 = 8 + 4 - 4 + 8 - 16 = 0.$$

Ответ: $(x = -2; y = 2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

чистовик

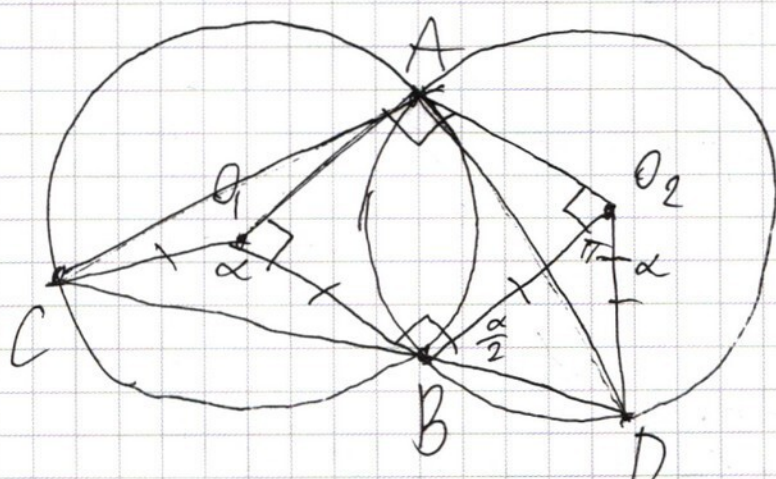
6 (α)



$\widehat{AO_1B} = \widehat{AO_2B}$ (из симметрии относительно (AB)).
Заметим, что $\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \frac{\varphi}{2}$

(впис. угол, опр. на AB , но
центр-углы $\widehat{AO_1B}$ и $\widehat{AO_2B}$ тоже
опр. на AB , а они $= \varphi$),
т.к. $\widehat{ACD} + \widehat{ADC} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$,
то $\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\varphi = \pi \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. т.к. $BF \perp CB$,
то $\boxed{CF^2} = CB^2 + BF^2 = \boxed{CB^2 + BD^2}$.

т.к. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и $\widehat{AO_1O_2}$ и $\widehat{BO_1O_2}$ симметричны отно-
сительно (O_1O_2) , то $\widehat{AO_1O_2} = \frac{\pi}{2} / 2 = \frac{\pi}{4}$, аналогично
 $\widehat{AO_2O_1} = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\widehat{O_1AO_2} = \frac{\pi}{2}$. Аналогично, $\widehat{O_1BO_2} = \frac{\pi}{2}$.



Пусть $\widehat{CO_1B} = \alpha$. Тогда
(из равнос. $\triangle CO_1B$)

$$\widehat{O_1BC} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Тогда } \widehat{O_2BD} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}. \text{ Из равнос.}$$

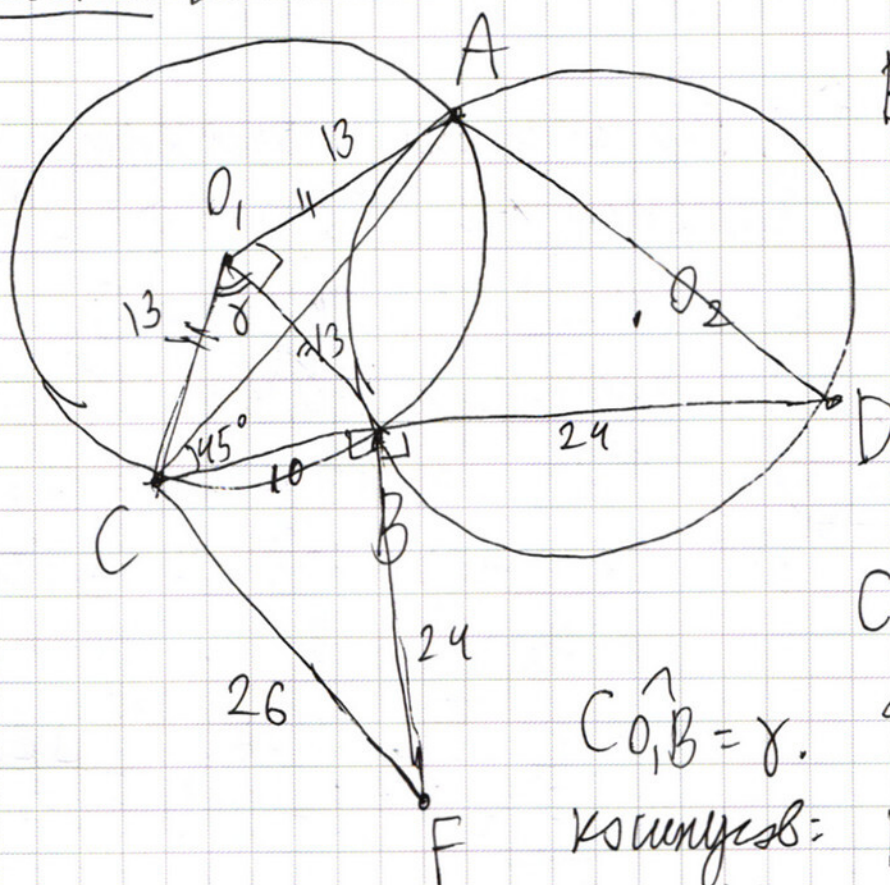
$\triangle BO_2D$ имеем $\widehat{BO_2D} = \pi - \alpha$. По теореме косинусов:
 $CB^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos(\alpha)$, $BD^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos(\pi - \alpha)$
 $\Rightarrow CB^2 + BD^2 = 4 \cdot 13^2$ (т.к. $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$) $\Rightarrow CF^2 \rightarrow$

Чистовик

$$= 2^2 \cdot 13^2 = 26^2 \Leftrightarrow CF = 26.$$

Oktber: 26.

(5)



$$\begin{aligned} BD^2 &= 26^2 - CB^2 = \\ &= 26^2 - 10^2 = \\ &= (26-10) \cdot 36 = \\ &= 16 \cdot 36 \Rightarrow \\ &\Rightarrow BD = 4 \cdot 6 = 24 \Rightarrow \\ &\Rightarrow BF = 24. \end{aligned}$$

CF = 26. ~~17/16~~

$\hat{C}_{O_1 B} = \gamma$. Torza no 9.

Kosinusab: $10^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos(8) \quad (2)$
 $100 - 338 = -338 \cdot \cos(8) \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \frac{238}{338} = \cos(\gamma) \Leftrightarrow \cos(\gamma) = \frac{119}{169}; \quad \sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)} = \frac{120}{169}$$

$$I \sqrt{1 - \frac{16^2}{169^2}} = \frac{120}{169}$$

Тогда $\cos(\widehat{CO_1A}) = \cos(\gamma + \frac{\pi}{2}) = \overbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}^{11} \cos(\gamma) - \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\gamma) =$

$$= \sin(\gamma) = -\frac{120}{169}. \quad \text{Torad } AC^2 = (3^2 + 13^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot (-\frac{120}{169})) \Leftrightarrow$$

$$\hookrightarrow AC = \sqrt{338 + 388 \cdot \frac{120}{169}} = \sqrt{338 + 240} = \sqrt{578} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 289} = \sqrt{2} \cdot 17 = 17\sqrt{2}$$

$$S(\Delta ACF) = AC \cdot CF \cdot \sin\left(\widehat{BCF} + \frac{\pi}{4}\right) / 2 = \frac{17\sqrt{2} \cdot 26}{2}$$

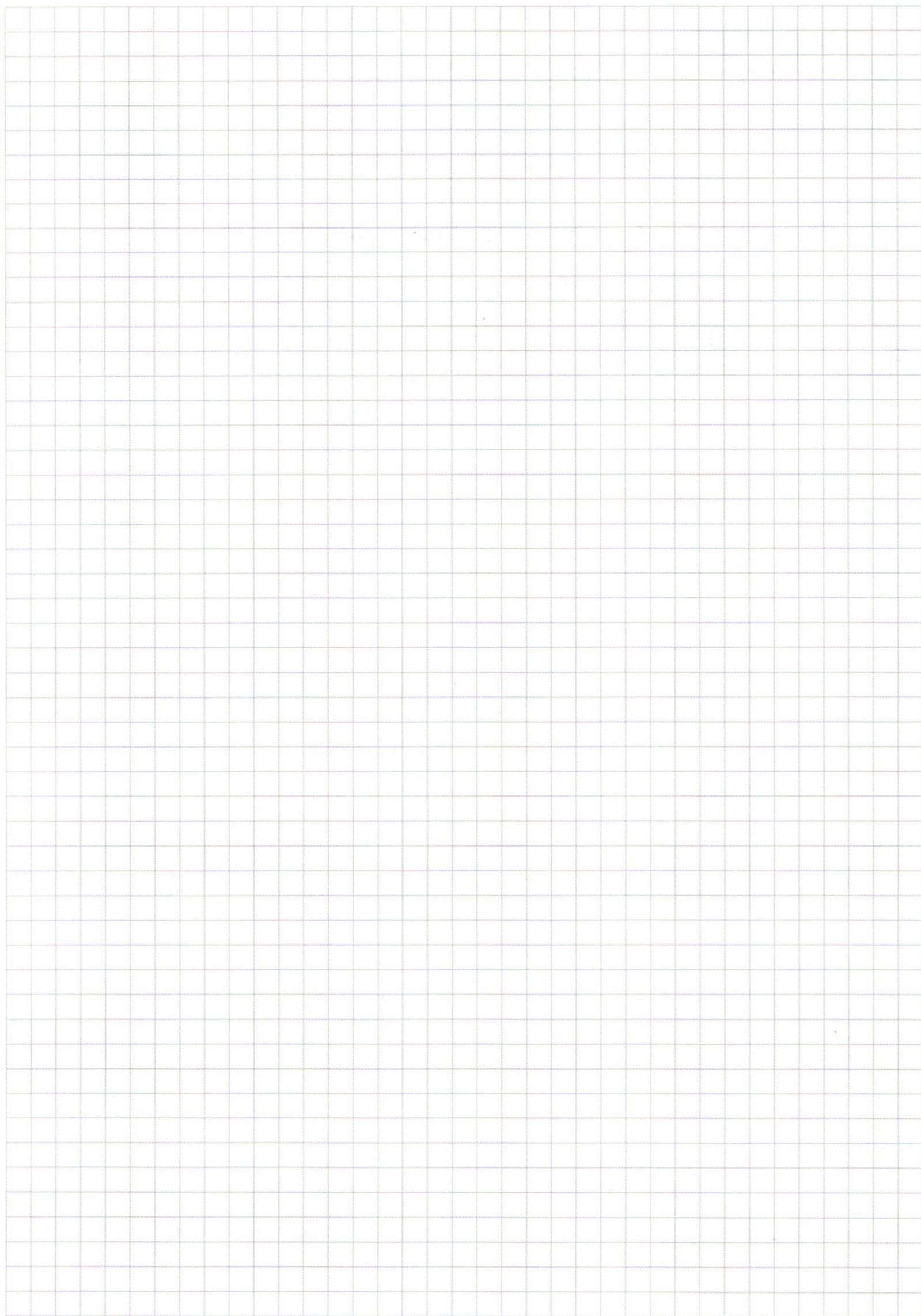
$$\sin(\widehat{BCF} + \frac{\pi}{4}) = 17\sqrt{2} \cdot 13 \cdot \left(\sin(\widehat{BCF}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(\widehat{BCF}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 17 \cdot 13 \cdot \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = 17 \cdot 13 \cdot \frac{17}{13} = 289. \text{ Answer: } 289.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Для каждого x кол-во возм. чистовик

$$\text{пар}(x; y) \text{ равно } [85 + (3^{81} - 1)x] - [3^x + 4 \cdot 3^{81}] =$$
$$= 85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = (3^{81} \cdot x + 85) -$$
$$- (3^x + x + 4 \cdot 3^{81}).$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

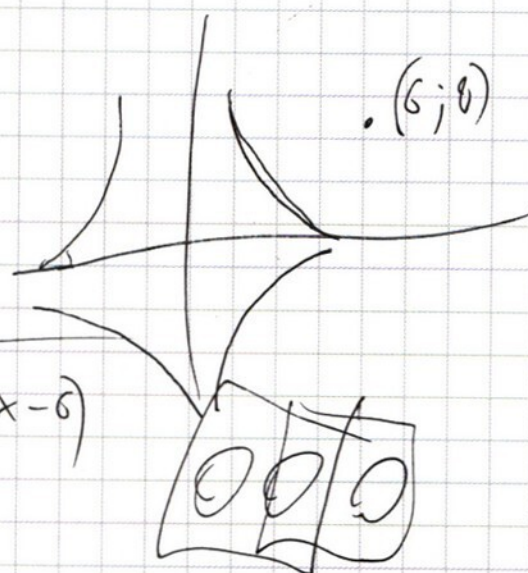
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \rightarrow -x$$

$$y \rightarrow -y$$

$$|-x-6+y| + |-x-6-y| =$$

$$= |x+y+6| + |y-x-6|$$



$$|x-6| + |x-6| = 12$$

$$(|x|-6)^2 = a - 8^2$$

$$12 - 2x$$

$$|x-6| = 6$$

$$(|x|-6)^2 = a - 8^2$$

$$\frac{4}{3+4}$$

$$0, 12$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| \geq$$

$$2x - 12$$

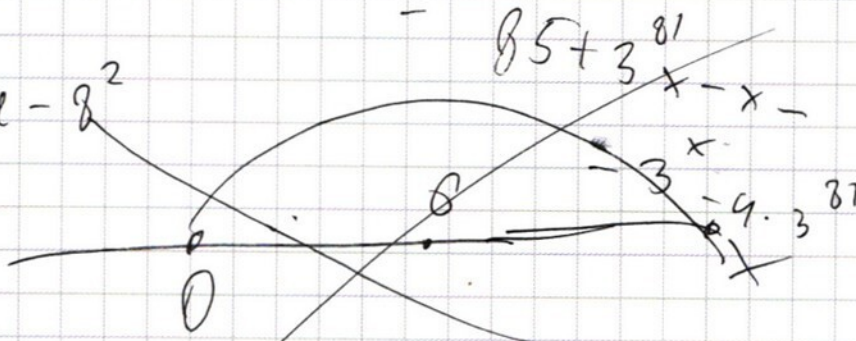
$$2x \geq 2x$$

$$x \rightarrow x \leq 12$$

$$8 \ 13 \ 18 \ 23$$

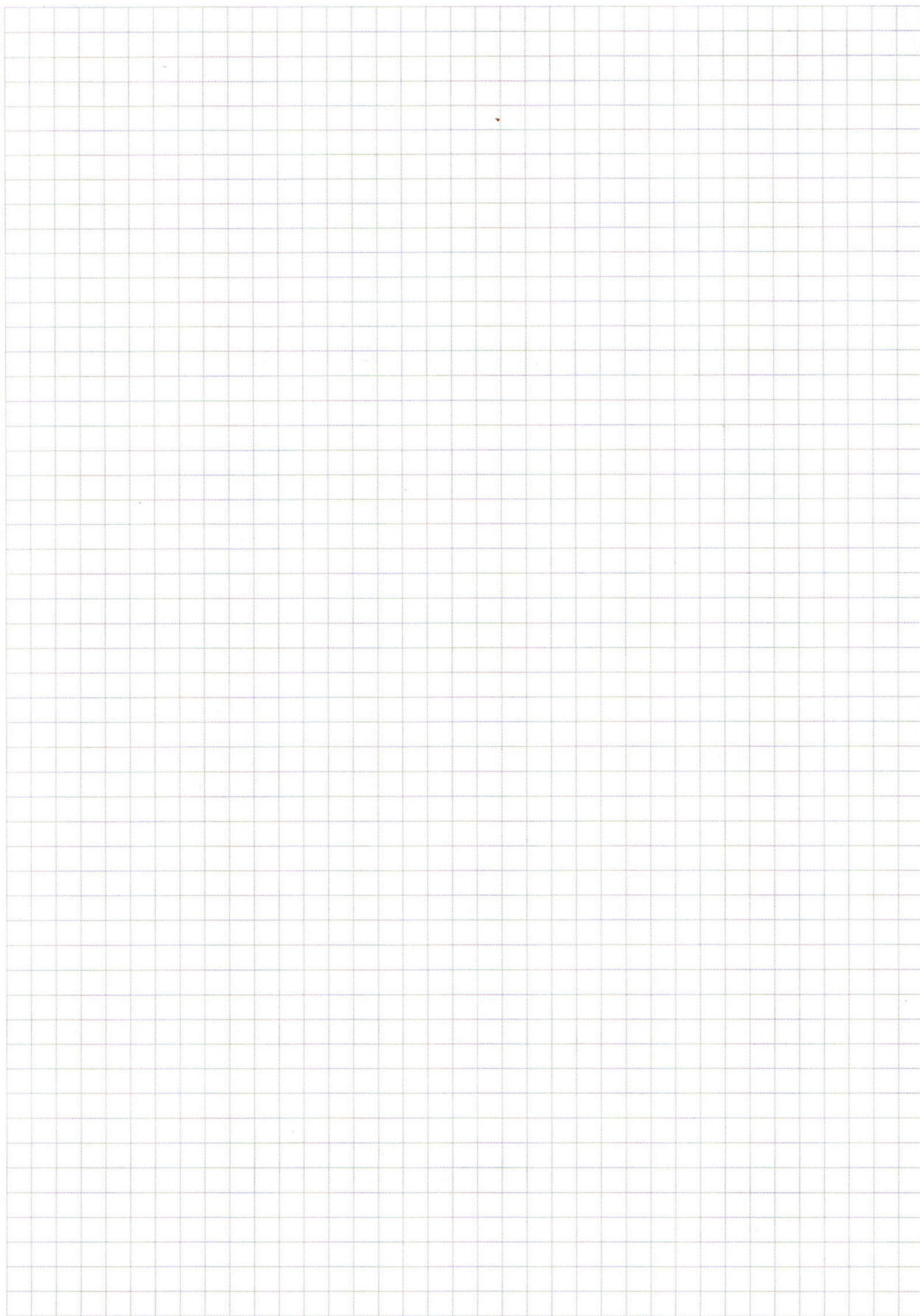
$$3+5+5+5+5+6+6=35$$

$$85 + (3^{81} - 1)x - (3^x + 4 \cdot 3^{81}) =$$



$$|6-x-y| + |6-x+y|$$

$$|x|-6 = |12-x|-6$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



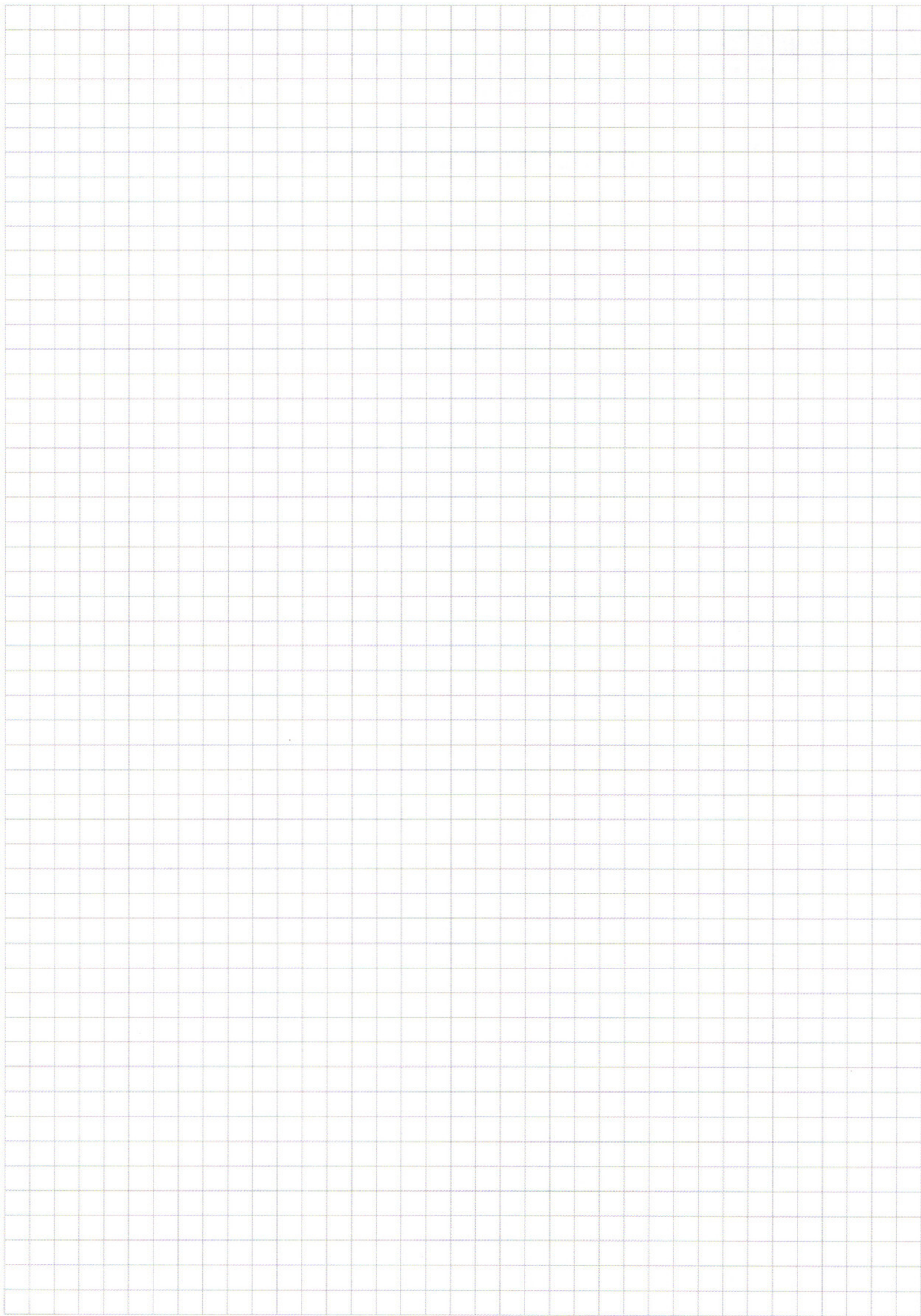
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

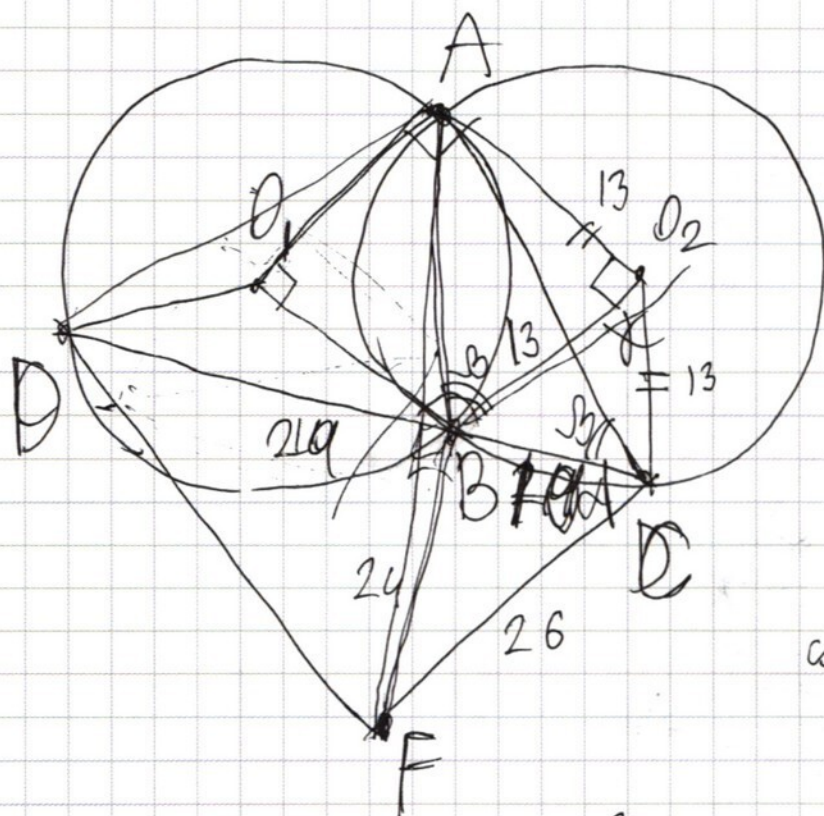
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{26^2 - 10^2} \text{ cm} \\ &= \sqrt{16 \cdot 36} \text{ cm} \\ &= 4 \cdot 6 = 24 \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$10^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} 169^2 - 119^2 &= \\ &= (169 - 119) \cdot (169 + 119) = \\ &= 50 \cdot 288 = \end{aligned}$$

$$= 400.144$$

$$\frac{578}{2}$$

$$578 = 2 \cdot 289 = 2 \cdot$$

$$100 = 169 + 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos(\gamma)$$

$$\underline{100 - 338} = -338 \cdot \cos(8)$$

~~$7238 = 338 \cos(x)$~~

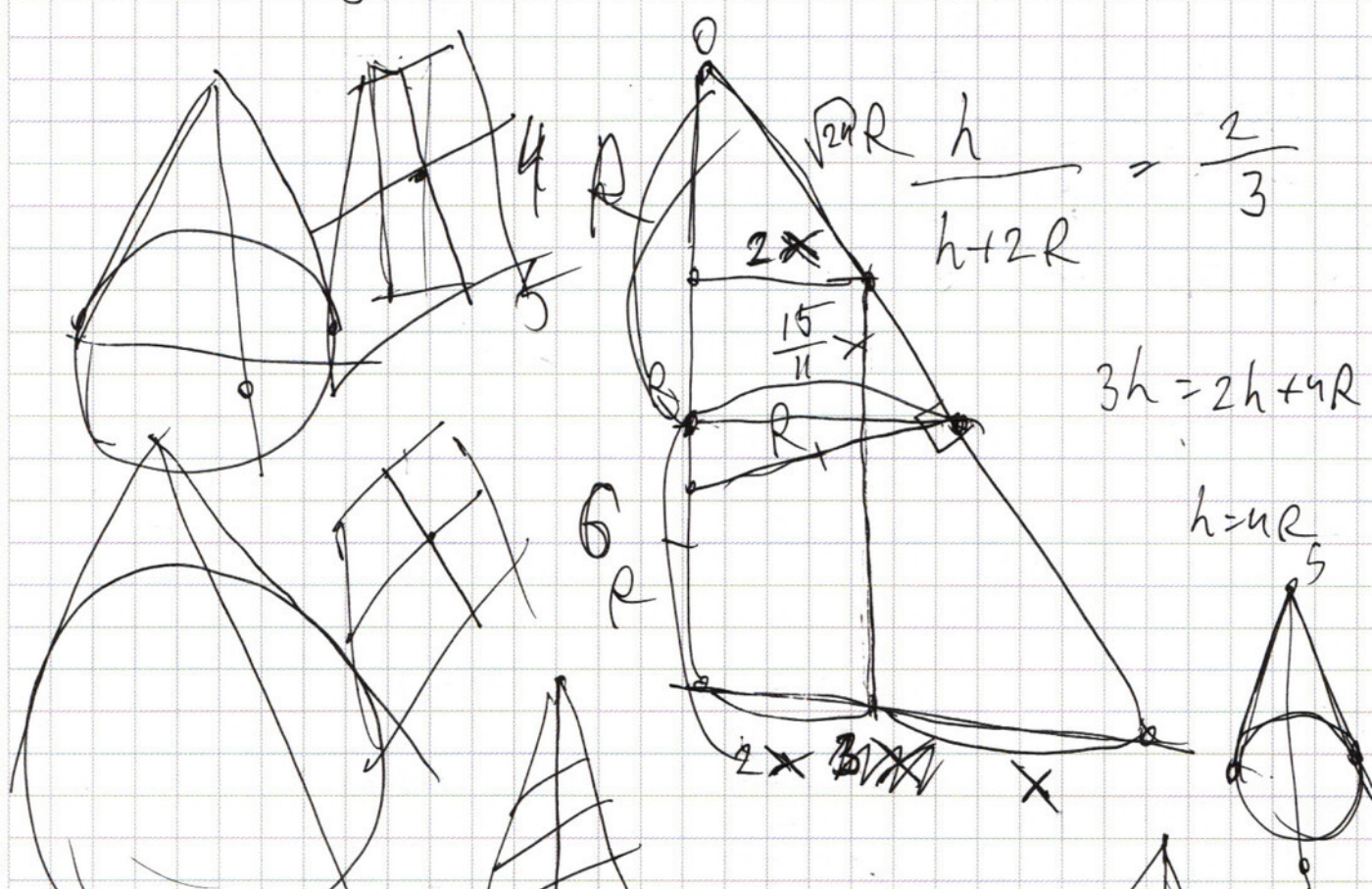
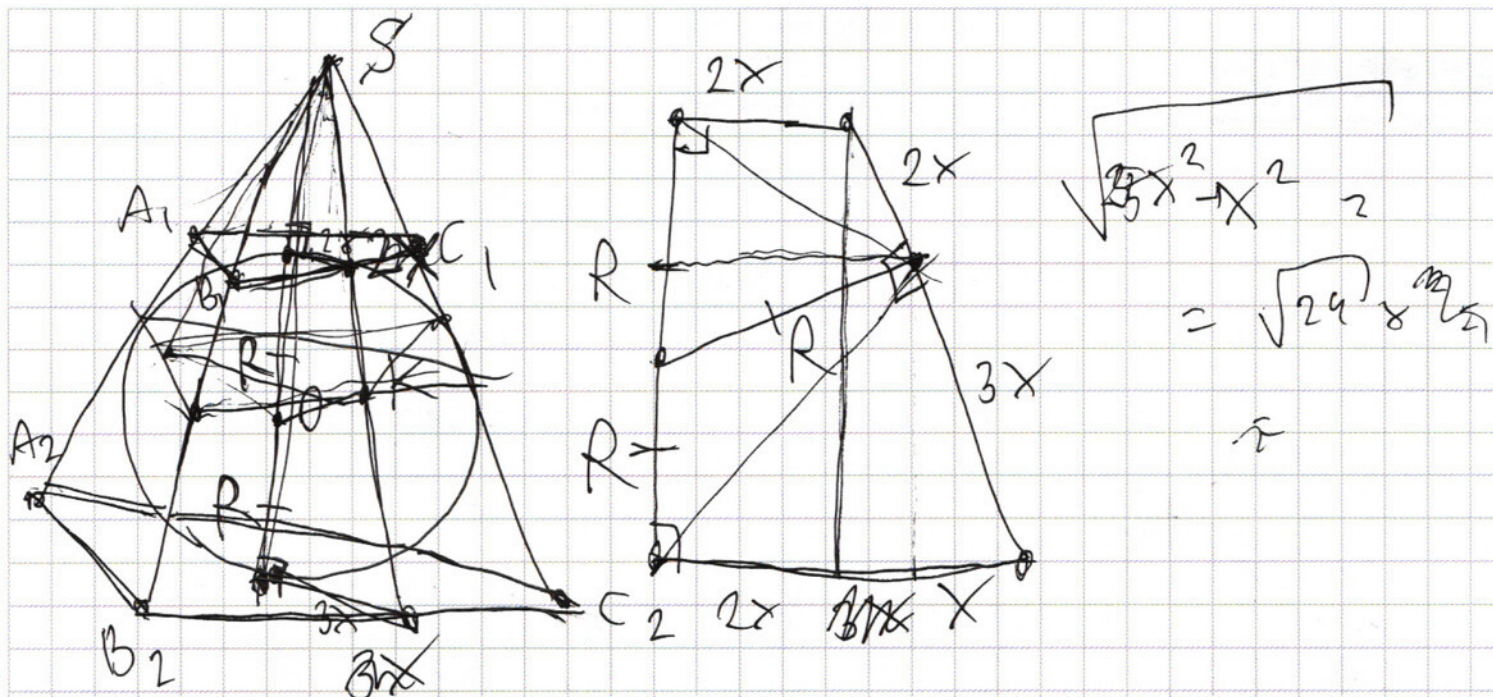
~~119 =~~

$$\cos(\beta) = \frac{12}{13} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{119}{169} = \cos(\theta)$$

$$100 \cdot 7.169 (1 \cdot \cos \alpha)$$

$$\frac{238}{238} = \cos(\gamma)$$



$$\frac{5R}{6R} = \frac{5}{6}$$

$$3 \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{11}x$$

$$9 \cdot \left(\frac{3}{\left(\frac{15}{11} \right)} \right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(45^\circ) \cos(7x) + \sin(45^\circ) \cos(3x) - \cos(10x) =$$

$$= \sin(7x) \cdot \cos(45^\circ) + \sin(3x) \cdot \cos(45^\circ)$$

$$\sin(45^\circ)$$

$$\sin(45^\circ - 7x) + \sin(45^\circ - 3x) - \cos(10x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos(10x)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\alpha + \beta = \alpha$$

$$\alpha - \beta = \beta$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(10x)$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) =$$

$$\alpha + \beta = \alpha$$

$$\alpha - \beta = \beta$$

$$= \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right) =$$

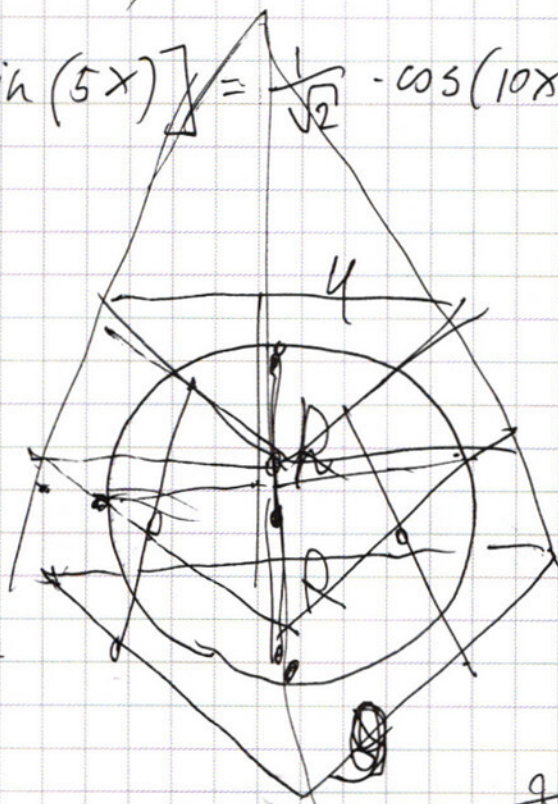
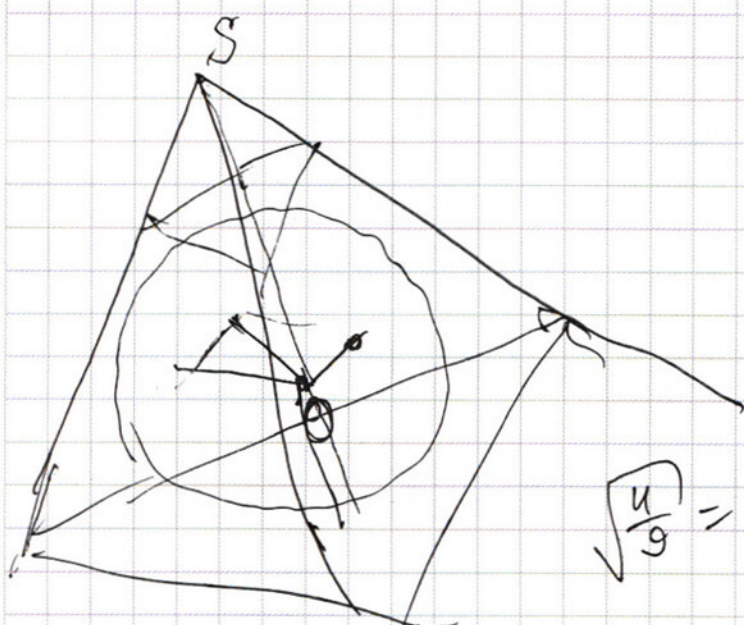
$$= \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2}$$

черновик

$$\cos(5x + 2x) + \cos(5x - 2x) - \sqrt{2} \cdot \cos(10x) = \sin(5x + 2x) + \sin(5x - 2x)$$

$$2 \cdot \cos(5x) \cos(2x) - \sqrt{2} \cdot \cos(10x) = 2 \cdot \sin(5x) \cdot \cos(2x)$$

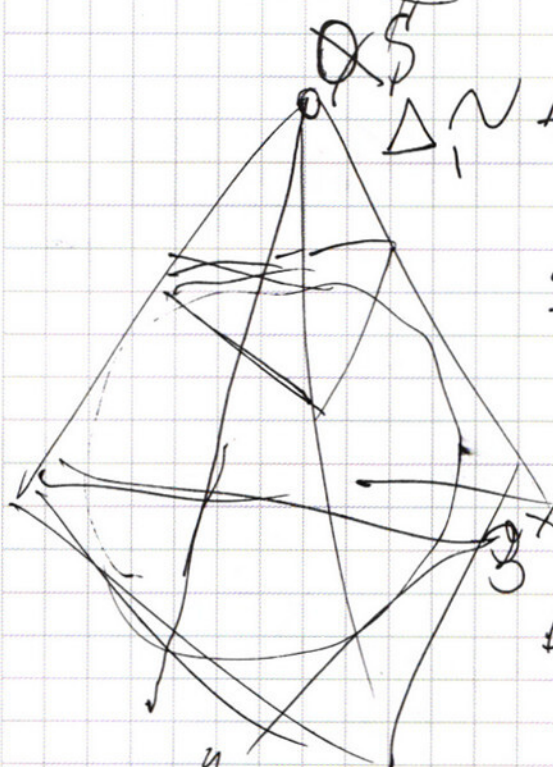
$$\cos(2x) \cdot [\cos(5x) - \sin(5x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(10x)$$



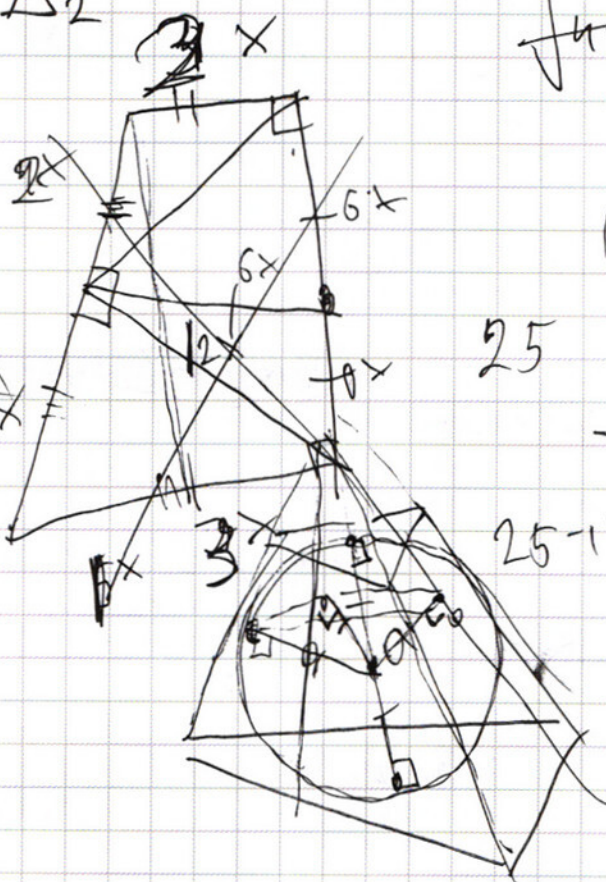
$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$8 + 16$$

$$\sqrt{4-9} = 36?$$



$$\Delta_1 \sim \Delta_2$$

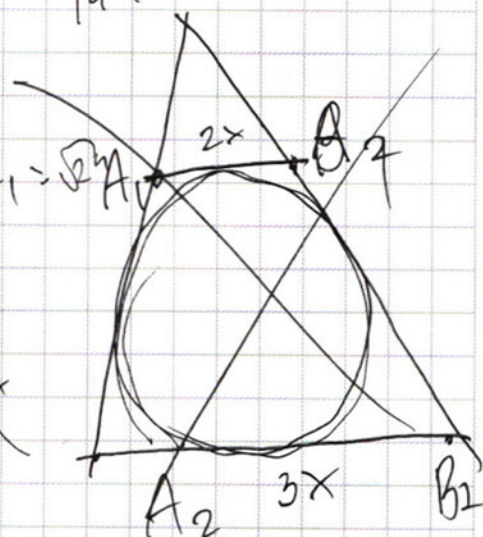


$$169$$

$$25$$

$$144$$

$$25 - 1 = 24$$



$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$$\begin{array}{r}
 16875 \overline{) 5} \\
 \underline{15} \\
 18 \\
 \underline{15} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3375 \overline{) 5} \\
 \underline{30} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}$$

$$16875 = 5^2 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

1, 3, 9, 5

$$|x - 6 - y| + |6 - x - y| = 12$$

$$|y + 6 - x| + |6 - x - y| = 12$$

$$C_8^4 \cdot (C_4^3 + 4 \cdot 3)$$



$$\begin{array}{r}
 1120 \\
 \underline{1120} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg(y)} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$\frac{(x^4)^{\lg(y)}}{y^{2\lg(y)}} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(y)}$$

$$\begin{aligned}
 x^{\lg(y)} &= 1000 \cdot (-x)^{\lg(y)} \\
 [(-x)^{\lg(y)}]^4 &= 1000 \cdot (-x)^{\lg(y)}
 \end{aligned}$$

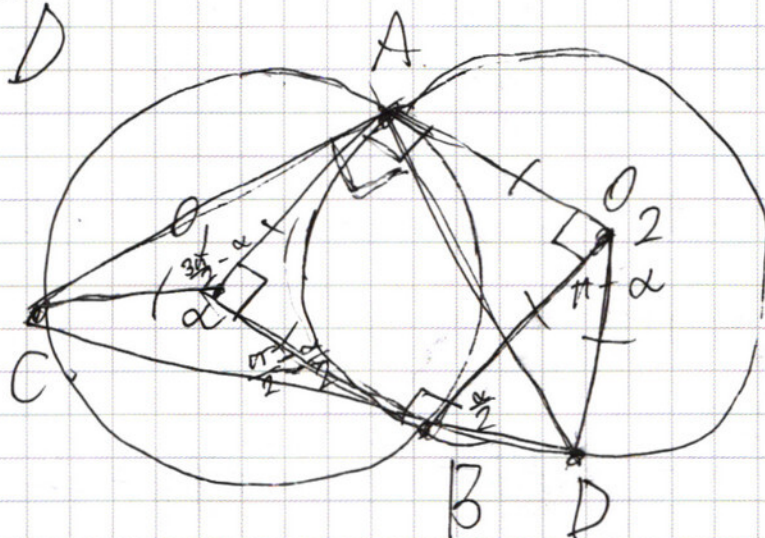
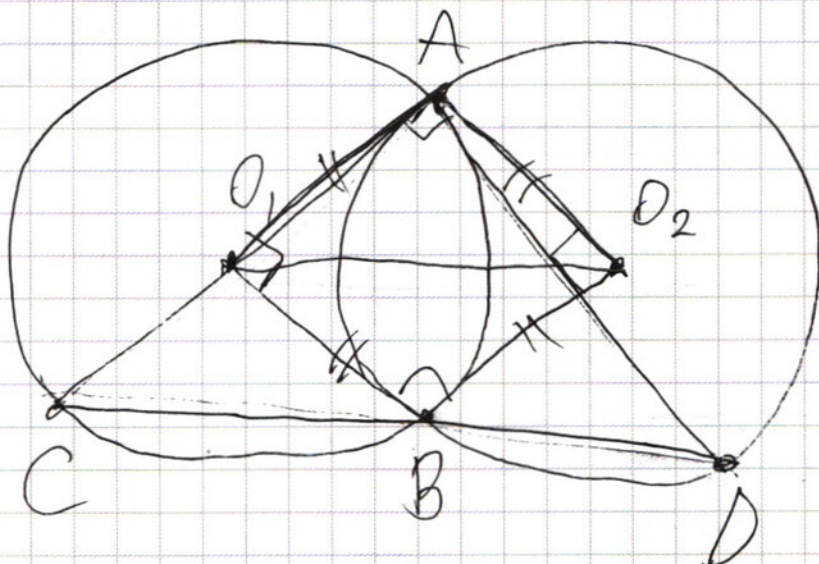
$$y > 0$$

$$x < 0 \quad (-x)^{\lg(y)} = 10$$

$$-x = y$$

$$\frac{x^{\lg(y)}}{100} = 10 \cdot (-x)^{\lg(y)}$$

Черновик



$$\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \cos(7x) + \cos(3x) &= \\ &= \sqrt{2} (\cos(7x) \cdot \cos(3x)) = \\ &= \sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cdot \sin(7x) \cdot \sin(3x) = 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CB^2 &= 13^2 + 13^2 - \\ BD^2 &= 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \\ &= \cos(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CB^2 + BD^2 &= 4 \cdot 13^2 = \\ &= 26^2 \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 - \sqrt{2} a_1 b_1 &= \\ &= a_2 + b_2 - \sqrt{2} a_2 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$|(x-6)-y| + |-y-(x+6)| \geq -2y$$~~

черновик

1) $(x \geq 6): |x|$

$$x \geq 0: |x| - 6 = x - 6 \Rightarrow t \geq -6$$

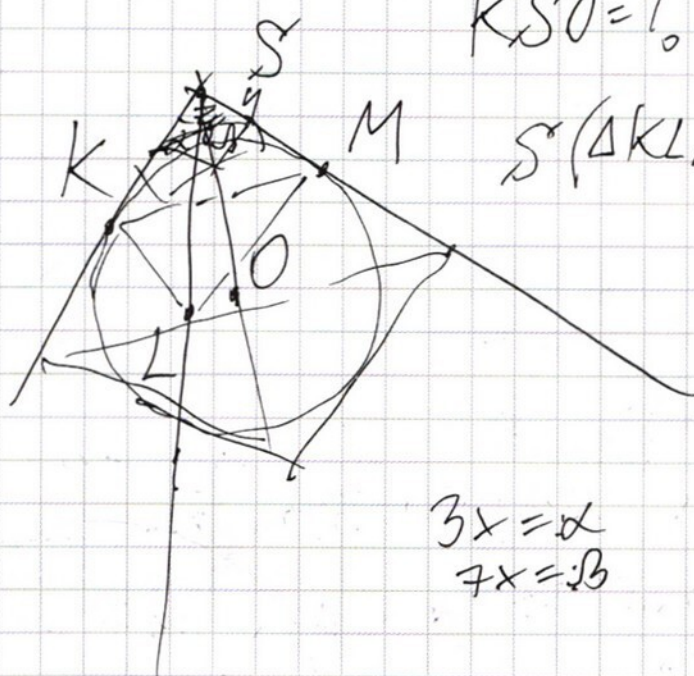
$$|t-y| + |t+y| = 12,$$

$$t^2 + (|y|-8)^2 = d.$$

$$d \geq 0$$

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$(0, 0)$$

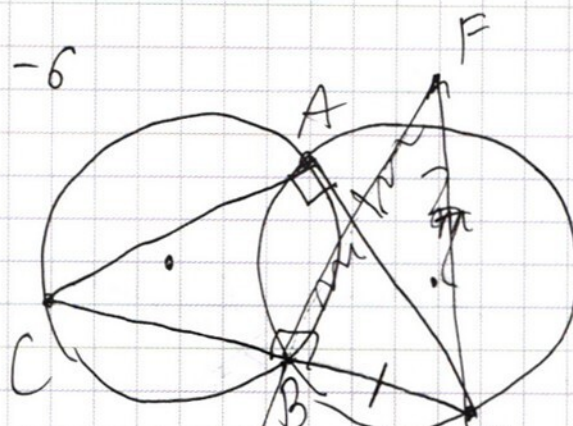


$$KSO = ?$$

$$S(\Delta KLM) = ?$$

$$3x = \alpha$$

$$7x = \beta$$



~~$$(\cos(\alpha) + \frac{1}{2}) + (\cos(\beta) + \frac{1}{2})$$~~

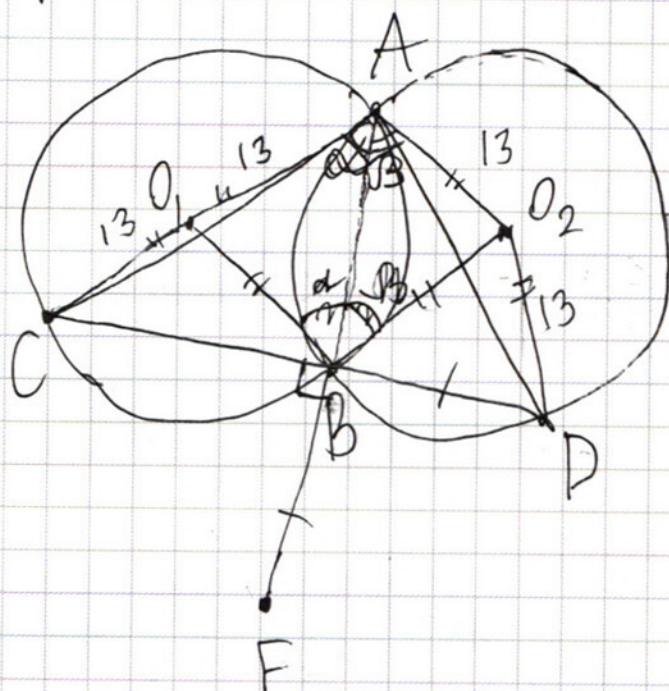
$$[\cos(\alpha) - \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\beta)] + [-1 - \sin(\alpha) - \frac{1}{2}] = 0$$

$$\cos(\beta) + \cos(\alpha) - \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\beta) + \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) - \sqrt{2} \cdot (\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) = -\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 0$$

черновик

$$R_1 = R_2 = 13$$



$$CF = ?$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

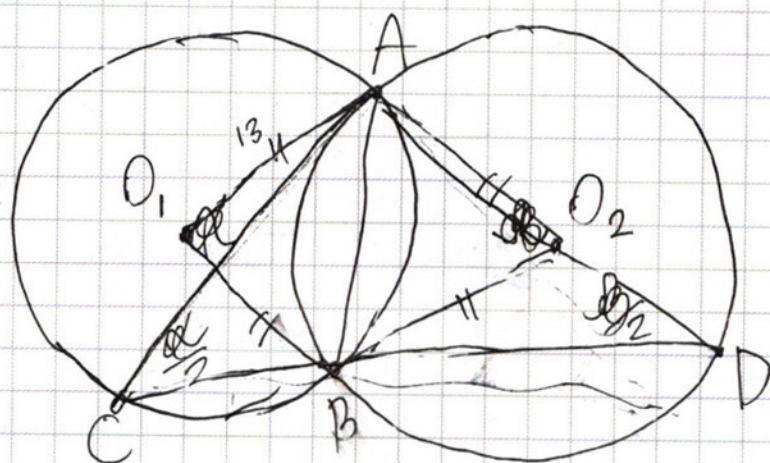
$$CD^2 = CA^2 + AD^2$$

$$CA^2 = CB \cdot (CB + BD) =$$

$$= CB^2 + CB \cdot BD$$

$$AD^2 = DB \cdot (DB + BC) =$$

$$= DB^2 + DB \cdot BC$$



$$\frac{\varphi}{2} = 45^\circ \quad \varphi = 90^\circ$$

$$\sqrt{13^2 + 13^2}$$

$$CF = 26$$



$$\alpha + \beta = \pi$$

$$BD^2 + CB^2 = \text{const}$$

