

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Сначала разложим число 9261 на простые множители.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3.$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ \hline 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Так как произведение восьми однозначных чисел равно $3^3 \cdot 7^3$, то эти числа могут быть либо 1, либо 3, либо 7, либо 9. Иначе быть не может, т.к. $3 \cdot 7 > 9$ и $7 \cdot 7 > 9$ (неоднократные числа). Итого из этого могут быть различные перестановки цифр наборов чисел: 1) 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 2) 1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 9.

Рассмотрим оба варианта. 1) Число перестановок набора

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3!} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 6 \cdot 6} = 560.$$

2) Число перестановок набора: $\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!} = 2 \cdot 560 = 1120.$

Всего существует вариантов $560 + 1120 = 1680.$

Ответ: 1680.

№3

$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}.$ Про логарифмируем:

$$-\ln(x^2 y^4) \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln(y/x^2)$$

$$(2 \ln x + 4 \ln y) \cdot \ln x + \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln y + \ln^2 y = 0. \text{ Поделим на } \ln^2 x$$

$$\frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0; \quad \frac{\ln y}{\ln x} = t - \text{замена}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{2} \in \left[\frac{1}{2} \right] \Rightarrow (1) \ln y = \ln x \Rightarrow x = y$$

$$(2) \ln y = 2\ln x \Rightarrow y = x^2.$$

Случай 1:

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$2x^2 - 8x + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 2$$

$x_2 = 0 \quad y_2 = 0$ - не подходит по ОДЗ.

(2; 2)

$$(x-2)(x^2 + x - 4) = 0$$

$x = 2; y = 4$ - подходит.

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ОДЗ:

$$\ln x \Rightarrow x > 0;$$

$$\ln y(x^2) \Rightarrow y/x^2 > 0; \quad y > 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Было произведено деление на $\ln x$.
Надо проверить $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Случай 2:

$$y = x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$x_1 = 0$ - не подходит по ОДЗ!

$$x^3 - x^2 - 8x + 8 = 0$$

$x = 2$ - корень ур-ва

$$y = 4$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 \mid x - 2$$

$$x^3 - 2x^2 \mid x^2 + 8x - 4$$

$$x^2 - 6x$$

$$x^2 - 2x$$

$$-4x + 8$$

$$-4x + 8$$

$$0$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ - не}$$

подходит по ОДЗ.

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = x^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(y')^0 = y^{\text{вн}} y$$

$$y^0 = y^{\text{вн}} y \Rightarrow y = 1.$$

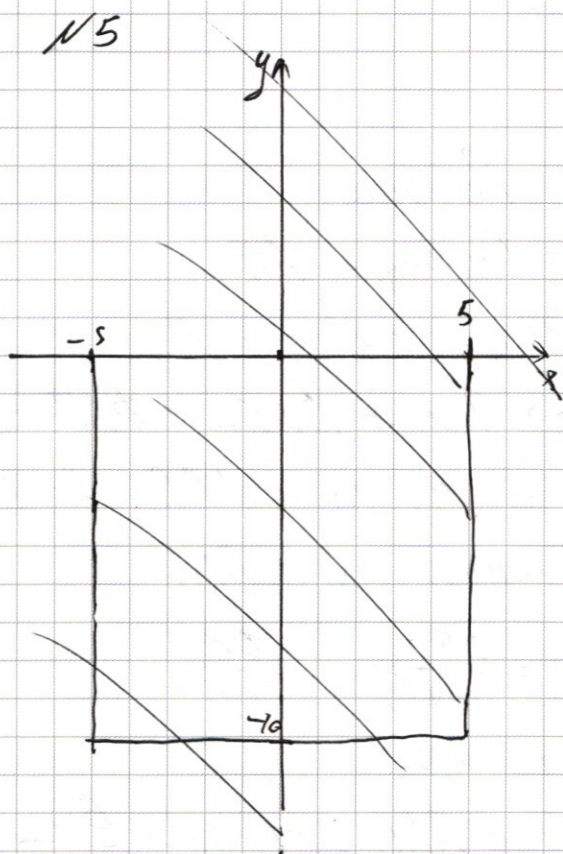
$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$1 - 1 - 2 + 8 - 4 \neq 0 \quad \text{не}$$

подходит $\Rightarrow$

$(1; 1)$ -не корень. $\Rightarrow$

Ответ: $(2; 2) \vee (2; 4) \vee \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.



$$1) x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y=0; x \in [-5; 5].$$

$$2) x+y+5 - y+x-5 = 10$$

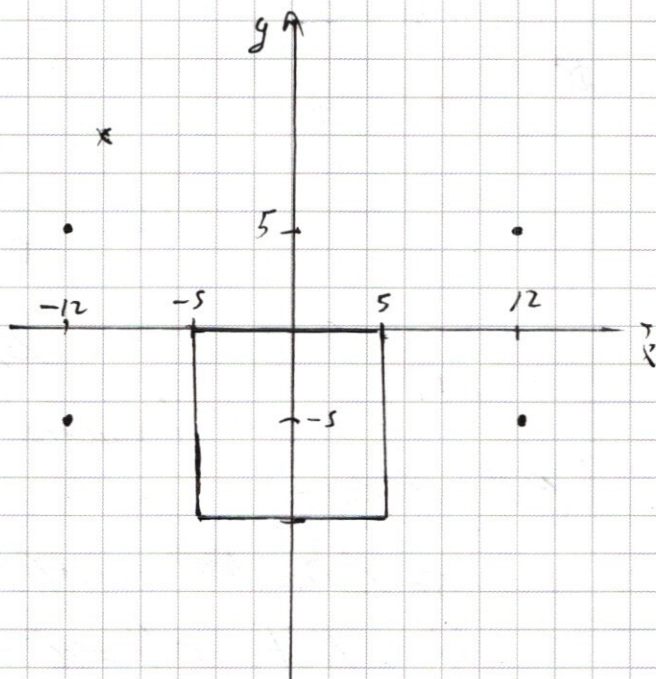
$$x=5; y \in [-5; 0].$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(12-12)^2 + (14-5)^2 = 81 \quad (2)$$

Рассмотрим ур-е 1.

Модули могут быть раскрыты
или 4-мя способами.



(2) Ур-е окружности

$$3) -x - y - 5 + y - x + 5 = 0$$

$$x = -5; y \in [-10; 0]$$

$$4) -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

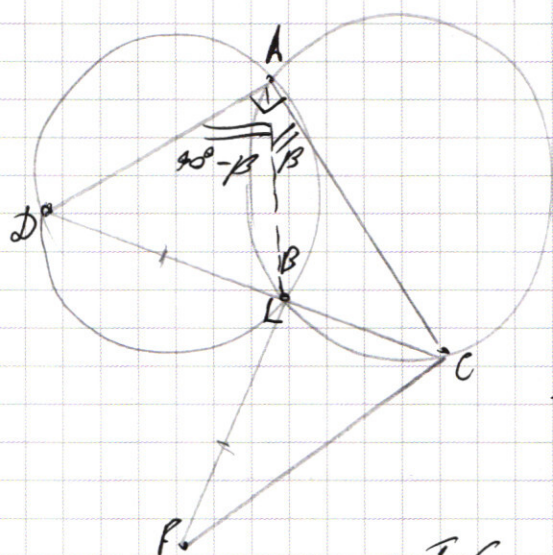
$$y = -10; x \in [-5; +5]$$

График функции - квадрат.

Заметим, что обе ф-ии симметричны относительно Oy.

Значит, если (x_0, y_0) - решение, то $(-x_0, y_0)$ - тоже решение. Значит, корней было 2 корня, если 2 случая: 1) касание окружности с квадратом. $R = 12 - 5 = 7$
 $\Rightarrow a = R^2 = 49$. 2) 4 корня ур-я $(x \neq 0, y \neq 0)$ и $(0; 0)$ и $(0; -10)$. Тогда $a = R^2 = 5^2 + 12^2 = 144 + 25 = 169$.
 Ответ: $\{49\} \cup \{169\}$.

№6



Решение:

1) Проведем AB.

Пусть $\angle BAC = \beta$.

2) Т.к. $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = \beta$, то $\angle DAB = 90^\circ - \beta$

3) Т. Синусов для $\triangle ABD$.

$$2R = 20 = \frac{DB}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{DB}{\cos \beta}$$

$$DB = 20 \cos \beta$$

4) Т. Синусов для $\triangle ABC$. $2R = 20 = \frac{BC}{\sin \beta}$.

$$BC = 20 \sin \beta$$

$$5) BD = BF = 20 \cos \beta$$

$$6) \triangle BCF. \angle B = 90^\circ \Rightarrow CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{400 \sin^2 \beta + 400 \cos^2 \beta} = 20$$

Ответ: 20.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x \end{cases}$$

Замечание: $z = y + 6 \cdot 2^{33}$

$$\begin{cases} z \geq 2^x \\ z < 76 + 2^{33}x - 2 \cdot 6 \cdot 2^{33} \end{cases} \quad \begin{cases} z \geq 2^x \\ z < 76 + 2^{33}(x-6) - 2x \end{cases}$$

$$76 - 2x + 2^{33}(x-6) \geq 2^x$$

Ф-ция 2^x растёт быстрее. Равенство достигается при

$$76 - 2x + 2^{33}(x-6) - 2^x > 0 \quad \text{При } x > 37$$

$$\frac{d 2^x}{dx} > \frac{d(76 - 2x + 2^{33}(x-6))}{dx}$$

$$2^x = 76 - 2x + 2^{33}(x-6) - 2^x$$

$$\text{при } x = 38 \Rightarrow$$

~~закон~~ $x < 38$.

При $x < 6$ из 1-го $z > 0$, а из

$$2\text{-го } z < 0 \Rightarrow x \in [6; 37]$$

Посчитаем кол-во решений (x, z) в целых числах. Это и будет ответ.

$$\sum_{x=6}^{37} 76 - 2x + 2^{33}(x-6) - 2^x = \sum_{x=6}^{37} 76 - 2 \sum_{x=6}^{37} x + 2^{33} \sum_{x=6}^{37} x - 2^{33} \sum_{x=6}^{37} 6 - \sum_{x=6}^{37} 2^x$$

$$1) \sum_{x=6}^{37} 76 = 76 \cdot (37 - 6 + 1) = 2432;$$

$$2) 2 \sum_{x=6}^{37} x = 13764 = \frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2};$$

$$3) 2^{33} \sum_{x=6}^{37} x = 2^{38} - 1 - 2^6 + 1 = 2^{38} - 2^6$$

$$4) 2^{33} \cdot \sum_{x=6}^{31} (x-6) = 2^{33} \cdot \sum_{x=0}^{31} x = 2^{33} \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} = 2^{33} \cdot 496$$

$$2432 - 1376 + 2^{38} - 2^6 + 2^{33} \cdot 496 =$$

$$= 992 + 2^{33} \cdot 560$$

Order: $992 + 2^{33} \cdot 560$

$$\begin{array}{r} 2432 \\ - 1376 \\ \hline 1056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1056 \\ - 64 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 496 \\ \times 64 \\ \hline 560 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

1580

$$\begin{array}{r} 92613 \\ 9 \quad | \quad 3 \\ 2 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

~~1 1 3 3 3 7 7 7~~
~~2 1 1 1 9 3 7 7 7~~

~~$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$$~~

$$= \frac{C_3^2 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 \cdot \frac{3! \cdot 5!}{8!} \cdot \frac{3! \cdot 2!}{5!}}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{7^4 \cdot 35}$$

~~$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1120$$~~
~~$$\frac{560}{1120}$$~~

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 343 \\ \times 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

~~$$(x y^4)^{\ln x} = y^{\ln(y x^7)}$$~~

~~$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7 \ln x}$$~~

~~$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{2 \ln x}$$~~

$$x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

~~$$y^2 - xy - z^2 + 2x - 4y - y(x+4) - 2x(x+4) + y^2 =$$
$$= -(y+2x)(x+4) + y^2 = 0$$~~ ~~$$\frac{P}{1/2} \text{ (4)}$$~~

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{3 \ln y}$$

~~$x^{-2 \ln 8} \cdot x^{3 \ln 2} = x^{\ln 2}$~~

~~$|x+y+5| + |y-x+5|$~~

~~e~~ en b = b

~~$a^{\ln b} = b^{\ln a}$~~

~~P~~ ~~1/1~~ (2)

~~1/2~~

~~1/3~~

~~1/4~~

~~5~~ ~~1/5~~ (5)

2 1/6 (2)

2 1/7 ✓

$$3 + 2 + 5 + 2$$

205 205,42

$$Z_0 = \frac{d}{5.4(23P)} \sin 20.9^\circ$$

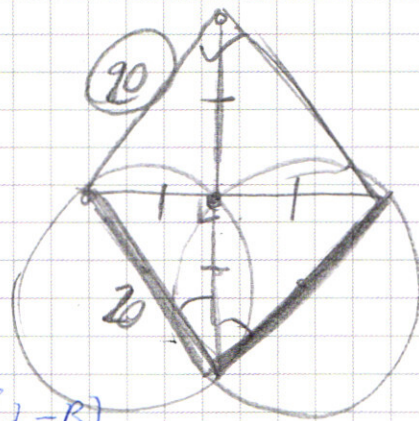
~~$d = 205.41 (27.3)$~~

~~$$AF^2 = 400 + 400 \sin^2(2+3) - 800 \cos(2-3)$$~~

$$AR^2: 400(1 + \frac{5}{2}n^2(2+\beta) - \cos(L-\beta))$$

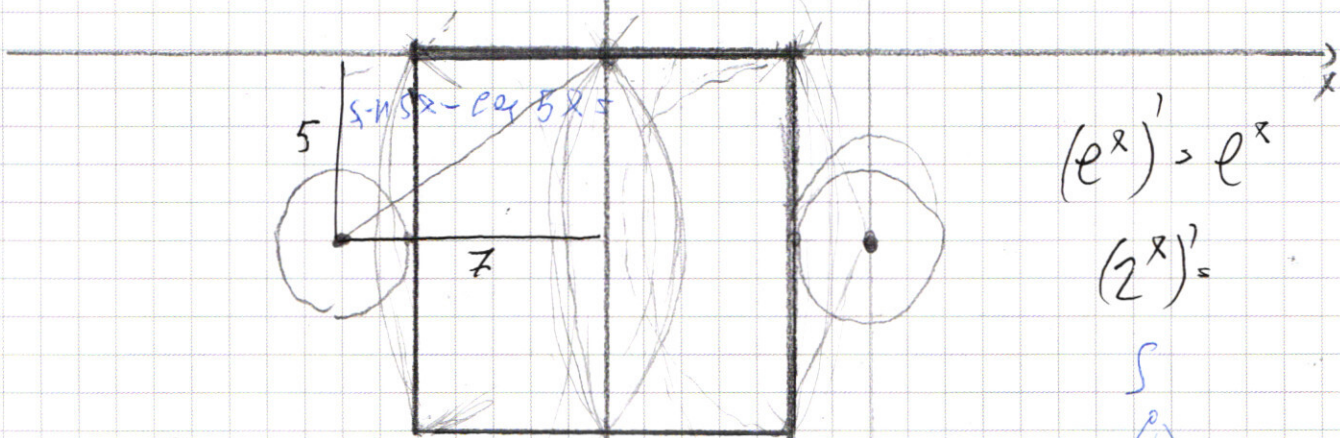
$$\left(\frac{3}{5} \sin 2 + \frac{4}{5} \cos 2\right)^2 - 2 \times$$

$$2 \frac{1}{2} \text{ B}$$



$a = 169$

$$G \supset H$$



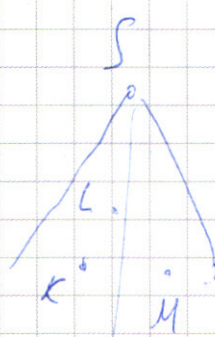
$$(e^x)' = e^x$$

$$(Z^X)^Y$$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$s_1 45x \cos 5x + 5 \sin 4x \cos 5x - 4 \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

~~$$+ \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$~~



$$78-12 = \underline{66}$$

$$z < 54$$

$7 > 37$

$$\int \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}^*$$

$$9 \quad Z < 76 + 7^{33} - 2x - 2^{59} \cdot 3$$

$$\underline{\underline{Z > 0 \Rightarrow \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^R}}$$

$$7 \leq 76 - 28 + 2^{33}(x-6)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

1) $>$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y \geq 0$$

$$x+5 \geq 0, -x+5 \geq 0$$

$$x \geq -5, x \leq 5$$

2) $<$

$$x+y+5 - (y-x+5) = 10$$

$$x = 5$$

$$y+10 \geq 0$$

$$y \geq -10$$

3) $<$

$$-x-y+5 + y-x+5 = 10$$

$$x = -5$$

$$y < 0$$

$$y+10 > 0$$

$$y > -10$$

4) $<$

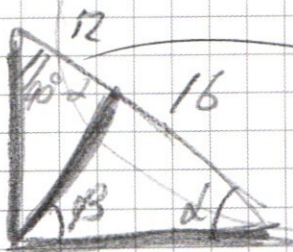
$$x+y+5 - (y-x+5) = -10$$

$$y = -10$$

$$\frac{12}{\cos \beta} = 20 \quad \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\frac{a}{\sin \beta} = 20 \quad \sin \beta = \frac{4}{5}$$

(20)



$$76 - 28 + 2^{33}(x-6) > 0$$

$$76 - 28 + 2^{33} \cdot x - 6 \cdot 2^{33} > 0$$

$$2^x \leq 76 - 28 + 2^{33}(x-6)$$

$$2^{38} \leq 76 - 28 + 2^{38}$$

$$x \in [2^x; 76 - 28 + 2^{33}(x-6)]$$

$$EQ \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{37} = 2^{38} - 1 - 2^{-1} - 2^{-2} - \dots - 2^{-37} = 2^{38} - 1 - (2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-37}) = 2^{38} - 62$$

$$\begin{array}{r} \times 76 \\ 32 \\ \hline 152 \\ 228 \\ \hline 2432 \end{array}$$

$$-1376$$

2

$$\begin{array}{r} \times 496 \\ 3 \\ \hline 1488 \end{array}$$

$$37 - 641 = 32$$

$$76 - 32 = 2432$$

$$EQ \cdot x = \frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{5 \cdot 8}{2} = 703 - 15 = 688$$

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 19 \\ \hline 338 \\ 703 \\ \hline 703 \end{array}$$

$$x - 6 = 1 - 31$$

$$\frac{31 \cdot 22496}{2} = 31 \cdot 165496$$

$$(496)2^{33} =$$

$$2432 - 1376 + 2^{33} \cdot 496 - 32 \cdot 2^{33} + 62$$

$$-\ln(x^2 y^4) \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln(y/x^7)$$

$$\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) + \ln y (\ln y - 7 \ln x) = 0$$

$$2 \ln^2 x + 4 \ln x \ln y + \ln^2 y - 7 \ln x \ln y = 0$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y + \ln^2 y = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$