МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

В нашем числе 8 цифр. Произведение цифр равно 16875. Произведение не равно 0, следовательно в числе нет цифр 0. $16875 = 5\cdot 3375 = 5\cdot 5\cdot 675 =$
$= 5\cdot 5\cdot 5\cdot 135 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 27 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3 =$
$= 3^3\cdot 5^4$

Заметим, что цифры - это числа от 0 до 9, следовательно никакие комбинации произведений троек и пятерок и девяток нам не подходят (т.е $3\cdot 3\cdot 3 = 27 > 9$, $5\cdot 5 = 25 > 9$, $3\cdot 5 = 15 > 9$), $0 \le 3 \le 9$, $0 \le 5 \le 9$, $0 \le 3\cdot 3 = 9 \le 9$)

Пусть в нашем числе нет девяток, тогда всего из 3 троек и 4 пятёрок можно составить только $3+4=7$-ое число. Следовательно, в нашем числе есть ещё одна единица. Эту одну единицу можно разместить 8 способами (на любое из 8 мест) Три тройки можно разместить $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$ способами (первую на любое из семи оставшихся мест, вторую на любое из шести оставшихся места и третью на любое из 5 оставшихся мест, так как нам не важен порядок, в котором они стоят в нашем числе, поэтому мы делим на $3\cdot 2\cdot 1$ (кол-во способов переставить три тройки), оставшиеся 4 пятёрки мы разместим однозначно на оставшиеся места (нам не важен порядок) Итого: $8\cdot \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 5 = 280$ способов, т.е 280 чисел

$16875 : 5 = 3375$
$3375 : 5 = 675$
$675 : 5 = 135$
$625 \cdot 27 = 16875$

Пусть в нашем числе ровно 1 девятка. 9 это 3·3, т.е. у нас осталось 3-2 = одна тройка и 4 пятёрки. Вместе это 6 цифр. А нам надо восемь, поэтому в числе будут ещё две единицы. Аналогично прошлым ~~рассу~~ рассуждениям, получаем: кол-во способов расставить одну девятку: 8, кол-во способов расставить одну тройку: 7, кол-во способов расставить две единицы: $\frac{6\cdot5}{2\cdot1}$, четыре пятёрки расставляются однозначно единственным способом. Итого $8\cdot7\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 8\cdot7\cdot3\cdot5 = 40\cdot7\cdot3 = 280\cdot3 = 840$.

$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 15 \\ \hline 280 \\ 56\ \ \\ \hline 840 \end{array}$

Если в нашем числе две девятки и более, то это невозможно, т.к. $16875 = 3^3\cdot5^4$ и две девятки означало бы присутствие делителя $9\cdot9 = 3^4$, что больше 3^3, поэтому в нашем числе не может быть две и более девяток. Поэтому, всего чисел может быть $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

Задача 2.

$$\cos(7x) + \cos(3x) - \sqrt{2}\cos(10x) = \sin(7x) + \sin(3x)$$

Воспользуемся формулой $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

И формулой $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

т.е. $\cos(7x) + \cos(3x) = 2\cos(5x)\cos(2x)$; $\sin(7x) + \sin(3x) = 2\sin(5x)\cos(2x)$

$$2\cos(5x)\cos(2x) - 2\sin(5x)\cos(2x) = \sqrt{2}\cos(10x) \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

Распишем $\cos(10x)$ как $\cos(5x+5x) = \cos5x\cos5x - \sin5x\sin5x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$$\cos(2x)\left(\cos(5x) - \sin(5x)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2(5x) - \sin^2(5x)\right)$$

$$\cos(2x)\left(\cos(5x) - \sin(5x)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(5x) - \sin(5x)\right)\left(\cos(5x) + \sin(5x)\right)$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$$ ровно 2 решения.

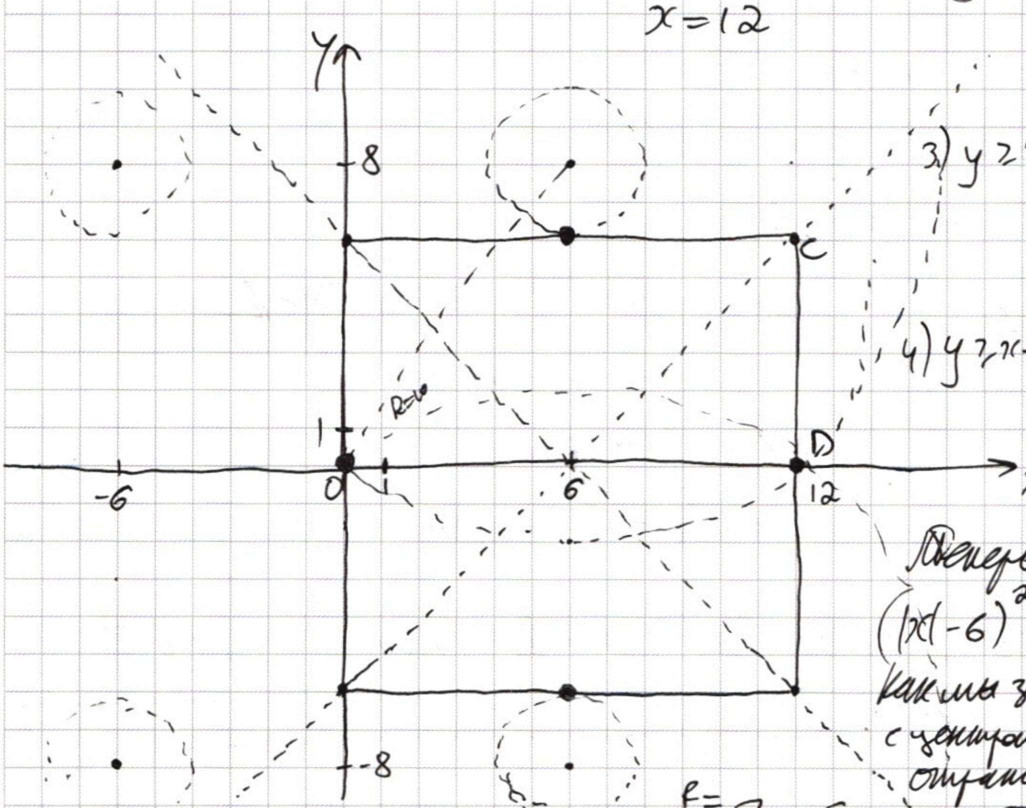
Нарисуем графики этих функций.
Проведём пунктиром прямые $y=x-6$ и $y=6-x$ и рассмотрим 4 случая раскрытия модулей $|x-6-y|$ и $|x-6+y|$

1) $y\le x-6,\ y\ge 6-x$: $x-6-y+x-6+y=12$
$x=12$

2) $y\le x-6,\ y\le 6-x$:
$x-6-y-x+6-y=12$
$y=-6$

3) $y\ge x-6,\ y\ge 6-x$:
$-x+6+y+x-6+y=12$
$y=6$

4) $y\ge x-6,\ y\le 6-x$:
$-x+6+y-x+6-y=12$
$x=0$



Теперь нарисуем $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$
Как мы знаем, это окружность с центром в точке $(6;8)$, отражённая отн. Ox и Oy, т.е. целых 4 окружности с радиусом $R=\sqrt{a}$. Если $R\in[0;2)$ решений нет (нет пересечений окружностей и квадрата). А вот при $R=2$ есть ровно 2 решения.
С увеличением R: Рассмотрим окружность, которая находится там, где $x,y\ge 0$. У неё столько же точек пересечения

Как мы видим, решением будет являться

$\cos(5x) - \sin(5x) = 0$

т.е. $\sin(5x) = \cos(5x)$

Если $\cos(5x)=0$, то $\sin(5x)=\cos(5x)=0$, $\Rightarrow \sin^2(5x)+\cos^2(5x)=0$, что не является истинной ни при каких x, $\Rightarrow \cos(5x)\neq 0$

Сократим обе части на него:

$$\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)} = 1$$

$$\operatorname{tg}(5x) = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},$$

Теперь, сократим обе части нашего уравнения на $\cos(5x) - \sin(5x)$:

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(5x) + \sin(5x)\right)$$

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(5x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(5x)$$

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(5x)$$

$$\cos(2x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k$

$2x = -\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

$2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k$, $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi m$, $n, m, k \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

только и у той, которая лежит там, где $x>0$, $y<0$. Ввиду симметрии ~~Однако как R стал больше 6 это было окружности, но при R > 6 у некоторых точек~~ Следовательно, после того, как R стал больше двух, у верхней (там, где $x,y>0$) окружности будет две точки пересечения и у нижней две, следовательно, решения будет больше двух, что нам не подходит. ~~В точке~~ При радиусе $R=10$ эти две точки совпадут у верхней и нижней окружностей. Точки $(0;0)$ и $(12;0)$ будут общими для них. И также точка $(6;0)$ будет общей ещё для двух окружностей, которые лежат там, где $(x<0, y>0; x,y<0)$. Следовательно, всего будет ровно 2 решения. При $R>10$ пересечений вообще не останется, т.к. для точки C $R=\sqrt{40}<10$ и для точки D $R=10$. То есть подходят только $R=2$, $R=10$ т.е. $a=R^2=4$, $a=100$

Ответ: $\{4;100\}$

Задача 7.

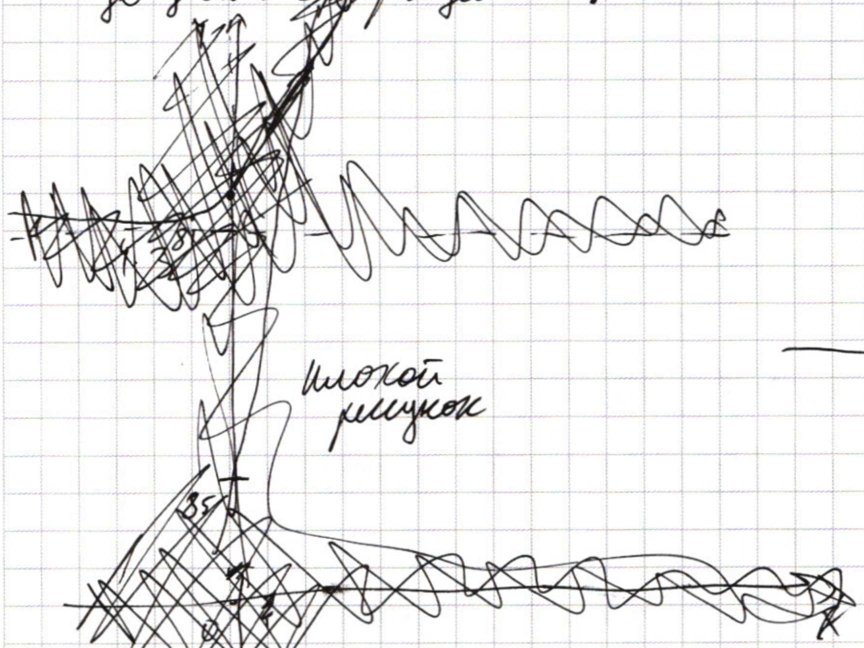
(x,y) $\quad x,y\in\mathbb{Z}$

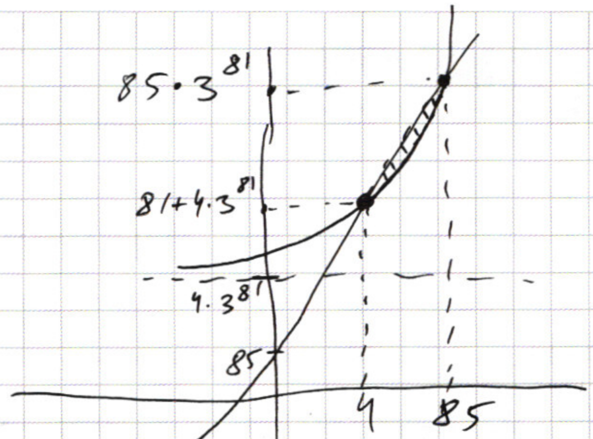
$$\begin{cases} y\geq 3^x+4\cdot 3^{81} \\ y<85+(3^{81}-1)x \end{cases}$$

Первая функция: $f(x)=3^x+4\cdot3^{81}$ $\quad f'(x)=3^x\cdot\ln 3$

Вторая функция: $f(x)=85+(3^{81}-1)x$ $\quad f'(x)=3^{81}-1$

Можно понять, что будет две точки пересечения этих функций, ведь давайте нарисуем их:





нам подходит заштрихованная область без точек

При $x=4$: $3^x+4\cdot3^{81} = 81+4\cdot3^{81} = 85+(3^{81}-1)x = 4\cdot3^{81}+81$

При $x=85$: $3^x+4\cdot3^{81} = 85\cdot3^{81} = 85+(3^{81}-1)x = 85\cdot3^{81}$

сами точки $(4; 81+4\cdot3^{81})$ и $(85; 85\cdot3^{81})$ нам не подходят, т.к. там $y=85+(3^{81}-1)x$, а надо чтобы $y<85+(3^{81}-1)x$

Итого, нам подходят пары $(x;y)$, где $x\in(4;85)$ и $y\in(81+4\cdot3^{81}; 85\cdot3^{81})$

Количество таких пар: $\sum\limits_{i=5}^{84} 85+(3^{81}-1)x_i - 3^{x_i} - 4\cdot3^{81}$

$x=5$: $3^{81}+80-3^5$, $x=6$: $2\cdot3^{81}+79-3^6$, $x=7$: $3\cdot3^{81}+78-3^7$

... $x=84$: $80\cdot3^{81}+1-3^{84}$

Если мы просуммируем всё, то получим: $3^{81}+2\cdot3^{81}+3\cdot3^{81}+\ldots+80\cdot3^{81}$

$+1+2+3+\ldots+80-3^5-3^6-3^7-3^8-\ldots-3^{84} = 3^{81}(1+2+3+\ldots+80)+$

$+1+2+3+\ldots+80-3^5(1+2+3+4+\ldots+79) =$

$(3^{81}+1)(1+2+3+\ldots+80)-3^5(1+2+3+4+\ldots+79+80)+80\cdot3^5 =$

$(3^{81}-3^5+1)(1+2+3+\ldots+80)+80\cdot3^5 = (3^{81}-3^5+1)\cdot\frac{80\cdot81}{2}+80\cdot3^5 =$

$=40\cdot3^4(3^{81}-3^5+1)+80\cdot3^5 = 40\cdot3^{85}-40\cdot3^9+40\cdot3^4+80\cdot3^5 = 40\cdot3^{85}-19683+3240+19440 = 40\cdot3^{85}+2997$

Ответ: $40\cdot3^{85}+2997$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos(7x) + \cos(3x) - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin(3x)$$

$$\cos(7x) - \sin(7x) + \cos(3x) - \sin(3x) = \sqrt{2}\cos(10x)$$

$$\cos(10x) = \cos(7x+3x) = \cos(7x)\cos(3x) - \sin(7x)\sin(3x)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} =$$

$$\sqrt{2}(\cos 5x\cos 2x - \sin 5x \sin 2x)$$

$$= 2\cos 5x\cos 2x - [\text{crossed out}] = 2\sin 5x\cos 2x$$

$$\cos(10x) = \cos(5x+2x) = \cos 5x\cos 2x - \sin(5x)\sin(2x)$$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x\cos 2x = 2\sin 5x\cos 2x - \sqrt{2}\sin 5x\sin 2x$$

$$\boxed{(2-\sqrt{2})}\cos 5x\cos 2x = \boxed{(2-\sqrt{2})}\sin 5x(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\cos 5x\cos 2x = \sin 5x(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\cos(3x+2x)\cos(2x) = \sin(3x+2x)(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \underline{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \underline{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 3x\cos^2 2x - \sin 3x\sin 2x\cos 2x = \sin 3x\cos^2 2x - \sin 3x\cos 2x\sin 2x$$

$$+ \sin 2x\cos 3x\cos 2x -$$

$$- \sin^2 2x\cos 3x$$

$$\cos\alpha + \cos\beta =$$

$$= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$\sin\beta + \cos\alpha$$

$$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y =$$

$$= 2\cos x\cos y$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin x\cos y - \sin y\cos x + \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(7x)-\sin(7x)+\cos(3x)-\sin(3x)=\sqrt{2}\cos(10x) \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(7x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(7x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)=\cos(10x)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos(7x)-\sin\frac{\pi}{4}\sin(7x)+\cos\frac{\pi}{4}\cos(3x)-\sin\frac{\pi}{4}\sin(3x)=\cos(10x)$$

$$\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(10x)$$

$$2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}-3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cos(10x)$$

$$2\cos\left(\frac{10x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos(2x)=\cos(10x)$$

$$2\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x)=\cos(10x)$$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)$
$\cos(2x)$

$\sin 5x=\cos 5x$
$\cos 5x \neq 0$
$\cos^2 5x=0$
$\sin^2 5x=1$
$1\neq 0$
$\operatorname{tg} 5x=1$
$5x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$\cos(7x)+\cos(3x)-\sqrt{2}\cos(10x)=\sin(7x)+\sin(3x)$$

$$\cos(7x)+\cos(3x)-\sqrt{2}\,\cancel{\cos(10x)}=\sin(7x)+\sin(3x)$$

$$2\cos(5x)\cos(2x)-\sqrt{2}\cos(10x)=2\sin 5x\cos 2x$$

$$2\cos(2x)(\cos(5x)-\sin(5x))=\sqrt{2}\cos(10x)$$

$$\cos(2x)(\cos(5x)-\sin(5x))=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(10x)$$

$$\cos(2x)(\cos(5x)-\sin(5x))=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 5x-\sin^2 5x)$$

$$\cos(2x)\underline{(\cos(5x)-\sin(5x))}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(5x)-\sin(5x))(\cos(5x)+\sin(5x))$$

$$\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(5x)+\sin(5x))$$

$$\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(5x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(5x)$$

$$\cos(2x)=\cos\frac{\pi}{4}\cos(5x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(5x)$$

$$\cos(2x)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$2x=5x-\frac{\pi}{4}+2\pi n$ $\quad\to\quad$ $2x=-5x+\frac{\pi}{4}+2\pi n$

$3x=\frac{\pi}{4}-2\pi n$ $\quad\quad$ $7x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$

$x=\frac{\pi}{12}-\frac{2}{3}\pi n$ $\quad\quad$ $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2}{7}\pi n$

$$\cos(2x)-\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$\log_{10} y$ $\quad y>0$ $\quad \log_{10} -xy$ $\quad -xy>0$

$y>0$

$\Rightarrow -x>0$

$x<0$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

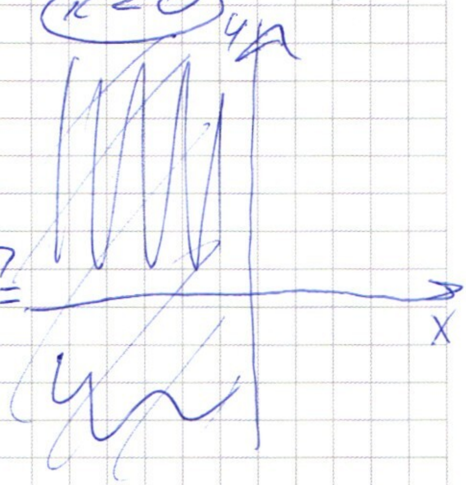
$R = 13$

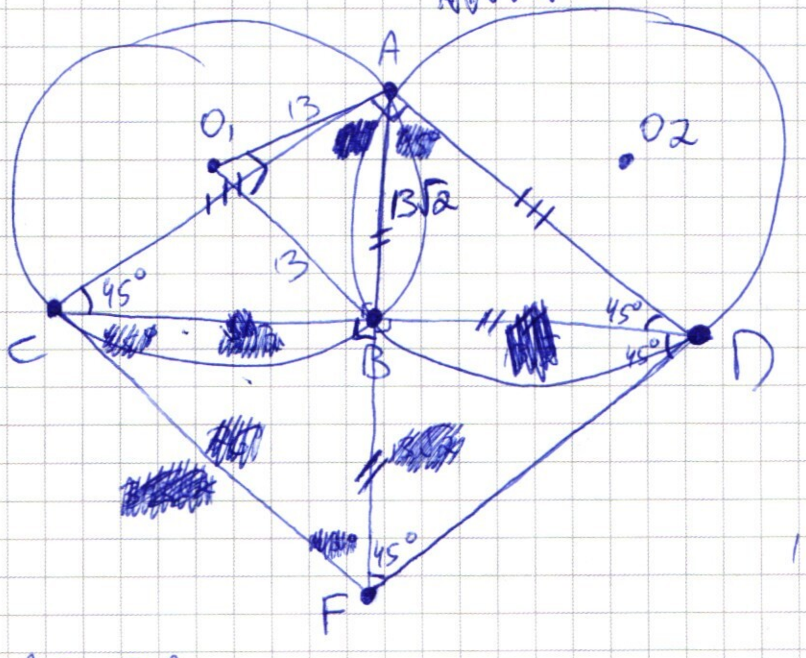
$13^2 = 169$

$13^2 + 13^2 = 169 + 169 =$

$\sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$

$169 + 169 = 338$





$\sqrt{338 + 338} =$

$338 + 338 = 676$

$13\sqrt{2+2} = 13 \cdot 2 = 26$

$26 \cdot 26 = 676$

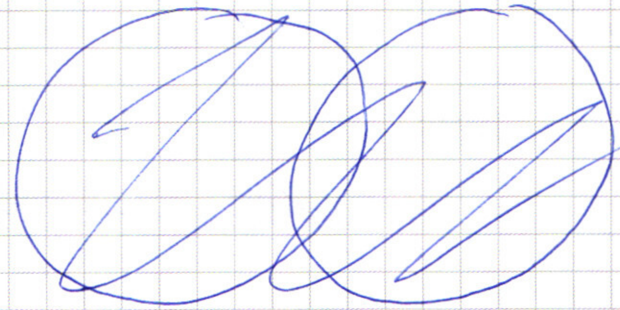
$AC = 26$

$BC = 10$

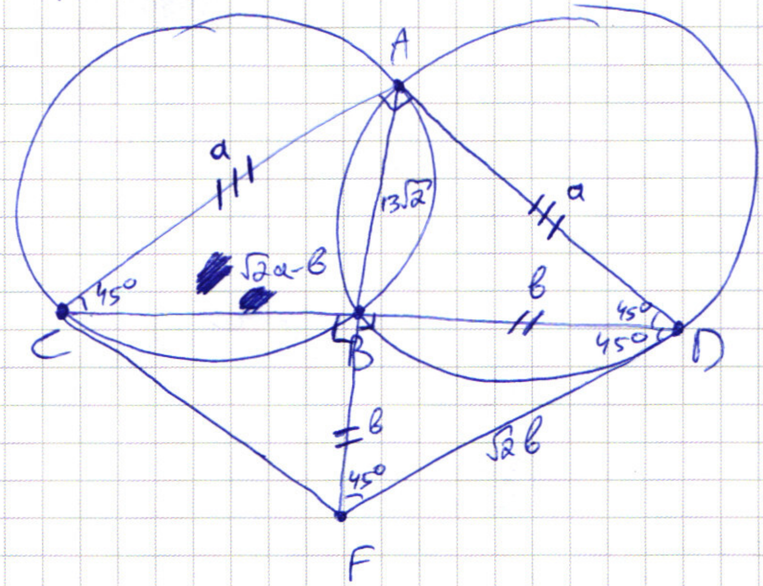
☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$R = 13$



$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 338$$

$$\text{I}\quad a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab = 338$$

$$\text{II}\quad a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac = 338$$

$$\text{I} - \text{II}:\ b^2 - c^2 - \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ac = 0$$

$$(b-c)(b+c) - \sqrt{2}a(b-c) = 0$$

$$(b-c)(b+c-\sqrt{2}a) = 0$$

$$b = c \quad \text{или} \quad b + c = \sqrt{2}a$$

$$\sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ab + b^2 + b^2} = \sqrt{2a^2 - 2\sqrt{2}ab + 2b^2} =$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = -x^{\log_{10} -xy} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^{4\log_{10} y}}{y^{2\log_{10} y}} = -x^{\log_{10} -xy}$$

$$\frac{x^{\log_{10} y^4}}{y^{\log_{10} y^2}}$$

$$x^{\log_{10} y^4} = y^{\log_{10} y^2} \cdot (-x)^{\log_{10} -xy}$$

$$y^{2\log_{10} x} = y^{2\log_{10} y} \cdot (-xy)^{\log_{10} -x}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^2 = \frac{x^8}{y^4}$$

$$\frac{y > 0}{x < 0}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

R^2 $\quad a = R^2$, $R = \sqrt{a}$

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$

1) $x-6-y \geq 0 \iff$ ~~[illegible]~~ $y \leq x-6$

$x-6+y \geq 0 \iff \quad y \geq 6-x$

$\underline{x}-6-\underline{y}+\underline{x}-6+\underline{y} = 12$

$2x-12=12$

$2x=24$

$x=12$

$y \leq x-6 = 6$

$y \geq 6-x = 6-12 = -6$

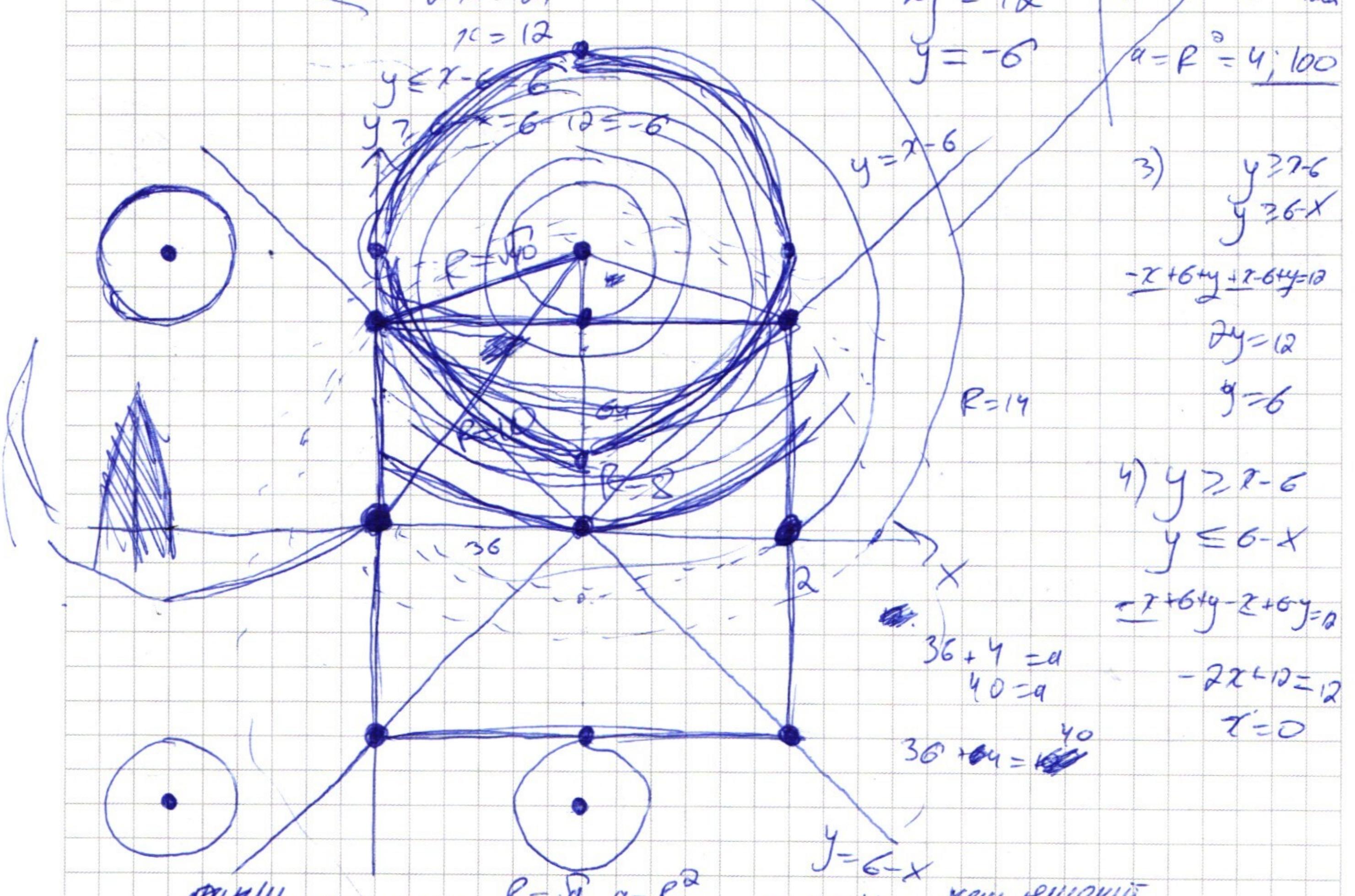
2) $x-6-y \geq 0 \quad y \leq x-6$

$x-6+y \leq 0 \quad y \leq 6-x$

$\underline{x}-6-y-\underline{x}+6-y = 12$

$-2y = 12$

$y = -6$



$R=2$ 2 решения

$R=10$ 2 решения

$a = R^2 = 4; 100$

3) $y \geq x-6$

$y \geq 6-x$

$-x+6+y+x-6+y=12$

$2y=12$

$y=6$

4) $y \geq x-6$

$y \leq 6-x$

$-x+6+y-x+6-y=12$

$-2x+12=12$

$x=0$

$36+4=a$

$40=a$

$36+64=$ ~~100~~ 40

~~[illegible]~~ решений нет $\quad R=\sqrt{a} \quad a=R^2 \quad 0 \leq a < 4$ нет решений

$R=\sqrt{40}$ $\quad a=4 \quad R=2$ 2 решения

$a=40$ ~~[illegible]~~ $a \in (4; 40)$ ~~[illegible]~~ более 2 решений

☑ черновик ☐ чистовик

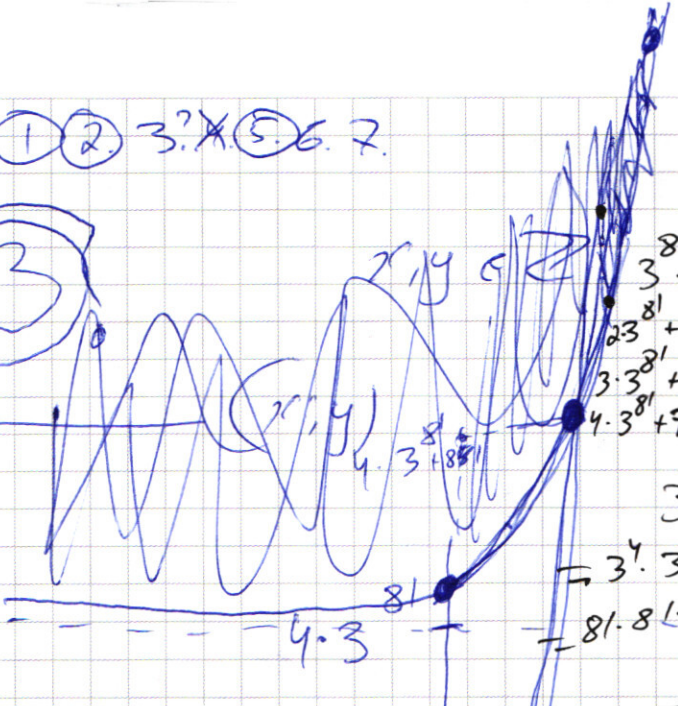
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1 2 3? 4 5. 6. 7.

3



$3^{81}+80-3^5$

$2\cdot 3^{81}+79-3^6$

$3\cdot 3^{81}+78-3^7$

$4\cdot 3^{81}+77-3^8$

$3^9=$

$=3^4\cdot 3^4\cdot 3=$

$=81\cdot 81\cdot 3$

$4\cdot 3^{81}$

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81}-1)x = 85 + 3^{81}x - x$

$3^x + 4\cdot 3^{81} \to 3^{x+1}\cdot 4\cdot 3^{81}$

$5:\ 85 + 5\cdot 3^{81} - 5 - 3^5 - 4\cdot 3^{81}$

85:

$3^{85} + 4\cdot 3^{81} =$

$= 81\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} =$

$= 5$

$= 3^{81} + 80 - 243$

$= 3\cdot 3$

$3^{81} = 163$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 240 \\ \hline 324 \\ 162 \\ \hline 19440 \end{array}$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 40 \\ \hline 3240 \end{array}$

$3^{81} + 4\cdot 3^{81} =$

$= 5\cdot 3^{81}$

$\boxed{\begin{array}{l} 3^{81}+80-3^5 \\ 2\cdot 3^{81}+79-3^6 \end{array}}$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$

$\begin{array}{r} 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \end{array}$

19683

729

650

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$

$3^{81} \leq y - 4\cdot 3^{81}$

$3^4 = 81$

$6:\ 85 + 6\cdot 3^{81} - 6 - 3^6 - 4\cdot 3^{81}$

4, 85

$3, 6561$

$\begin{array}{r} + 3240 \\ 12960 \\ \hline 22680 \\ -19683 \\ \hline 2997 \end{array}$

$3^x \leq \log_3 (y - 4\cdot 3^{81})$

$x \leq$

$= 2\cdot 3^{81} + 79 - 729$

$85 + (3^{81}-1)\cdot 81$

$\times 6561$

$5-3$

85

$2\cdot 3^{81} - 650$

5 - 1

6 - 2

84 - 80

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$243 + 4\cdot 3^{81} = 4\cdot 3^{81} + 243$

1

0

$(3^{81}-3^5+1)\cdot 3240 + 80\cdot 3^5 =$

$= 85 + 5\cdot 3^{81} - 5 =$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 40 \\ \hline 3240 \end{array}$

4

85

5 80

6 79

7 78

$y < 85 + (3^{81}-1)x$

$= 3^{81}\cdot 3240 - 3^5\cdot 3240 + 3240 + 80\cdot 3^5 =$

$= 80 + 5\cdot 3^{81}$

$81\cdot 40$

3^{84}

$40\cdot 3^4\cdot 3^{81}$

$3^x + 4\cdot 3^{81} = 85 + (3^{81}-1)x$

$3^x + 4\cdot 3^{81} - 85 - (3^{81}-1)x = 0$

$(3^{81}-1)$

$y - 3^x - 4\cdot 3^{81} \geq 0$

$85 + 3^{81}x - x$

84 1

$= 3240\cdot 3^{81} - 3160\cdot 3^5 + 3240$

$80 + 5\cdot 3^{81} - 4\cdot 3^{81} - 243 =$

$1 + 2 + \ldots + 80$

$80 + 79 + \ldots + 1$

$y - 85 - 3^{81}x + x < 0$

$\begin{array}{r} 3240 \\ - 80 \\ \hline 3160 \end{array}$

$y = (3^{81}-1)x + 85$

$\frac{81\cdot 80}{2}$

$= 40\cdot 3^{85} - 3160\cdot 3^5 + $

$85 + 6\cdot 3^{81} - 6$

$40\cdot 3^4$

$= 3^{81} - 163$

$4\cdot 3^{81} - 4 + 85$

$y' = 3^{81} - 1$

$243\cdot 3 + 4\cdot 3^{81}$

$40\cdot 3^4 (3^{81}+1) - 3160\cdot 3^5 + 81$

$4\cdot 3^{81}$

$y' = 3^x \cdot \ln 3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)