МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) - \cos 10x = 0$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos 2x - \cos 10x = 0$$

$$\cos 10x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\left(\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}\right) = 0$$

I $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \qquad -\frac{\pi}{4} + 5x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$

II $\quad \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \qquad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

III $\quad \cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \qquad \frac{7x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7},\ m \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; $\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}$

$n, k, m \in \mathbb{Z}$

I $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \qquad 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}$

II $\quad \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \qquad -2\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{7x}{2}\right) = 0$

① $\quad \sin\left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \qquad -\frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

② $\quad \sin\left(-\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \qquad -\frac{7x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7},\ m \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$

№4

Дано: трёхгранный угол с вершиной S, сфера $(O;r)$ касается его сторон в т. K, L, M.

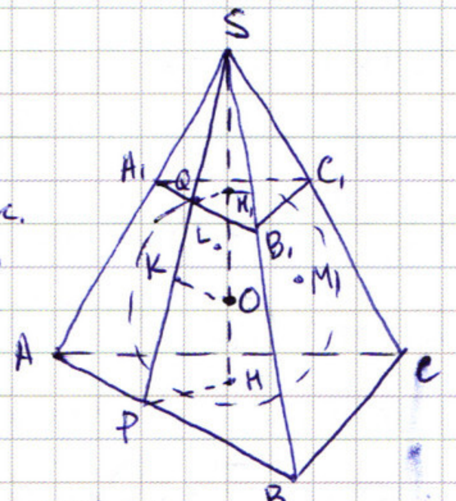
$\angle KSL \neq \angle KSM \neq \angle LSM$

$(ABC) \perp SO \quad (A_1B_1C_1) \perp SO \quad (ABC)$ и $(A_1B_1C_1)$ кас. сферы $(O;r)$

A, B, C, A_1, B_1, C_1 принадлежат сторонам угла. $S_{A_1B_1C_1} = 4 \quad S_{ABC} = 9$

Найти: $\angle KSO$, Sсеч. угла (KLM)

Решение:



$SABC$ – тетраэдр, $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, т.к. эти плоскости обе перпендикулярны SO.

Пусть (ABC) проходит через т. касания H, ~~н~~ значит $OH \perp (ABC)$, при этом $SO \perp (ABC)$, значит $SH \perp (ABC)$.

Пусть $(A_1B_1C_1)$ касается сферы в т. H_1, аналогично $SH_1 \perp (A_1B_1C_1)$.

(A_1B_1C) пересекает тетраэдр параллельно основанию $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{SB_1}{SB}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{SB_1}{SB} = \dfrac{2}{3}$

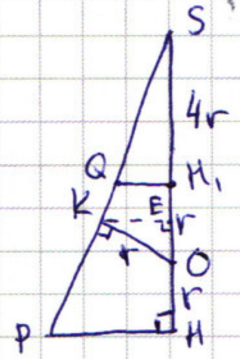
Пров. $HP \perp AB$, $SH \perp (ABC)$ $HP \perp AB \Rightarrow$ по т. о 3х перп.-х $SP \perp AB$.

~~$SP \perp AB \quad HP \perp AB \Rightarrow$~~ (SPH) проведена через SH, $SH \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow (SPH) \perp (ABC)$ по признаку перп.-сти плоскостей.

$SP \perp AB \quad HP \perp AB \Rightarrow (SPH) \perp AB$ по признаку перп.-сти прямой и пл.-ти.

$(SPH) \perp (ABC) \quad AB \perp (SPH) \Rightarrow (SPH) \perp (SAB)$

SP – прямая пересечения перп.-х плоскостей (SAB) и (SPH), $OK \perp (SAB)$, $OK \subset (SPH) \Rightarrow$ $\Rightarrow K \in SP$



Рассм. $\triangle SPH$. Пусть $SP \cap (A_1B_1C_1) = Q$

$\dfrac{SH_1}{SH} = \dfrac{SB_1}{SB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow SH_1 = 4r \quad SH = 6r$

$\sin\angle KSO = \dfrac{KO}{SO} = \dfrac{r}{5r} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\dfrac{1}{5}$

$\cos\angle KSO = \sqrt{1-\sin^2\angle KSO} = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow SK = 2\sqrt{6}\,r$

Пусть $(KLM) \cap SH = E$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$SE = SK \cdot \cos\angle KSO = \frac{2\sqrt6}{}r \cdot \frac{2\sqrt6}{5} = \frac{24}{5}r$

$\frac{SE}{SH} = \frac{\overset{4}{\cancel{24}}r}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{6r}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S_{сеч.}}{S_{ABC}} = \frac{16}{25}$

$S_{сеч.} = \frac{16}{25} \cdot 9 = \frac{144}{25}$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{5}$; $\frac{144}{25}$

№1

$16875 = 3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot1 = 9\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot1\cdot1$

$5\cdot5$ не может быть цифрой; $3\cdot3\cdot3$ и $3\cdot5$ тоже не
(и больше пятерок)
могут быть цифрами.

Значит ~~или одно из~~ число, соотв. условию, может содержать цифры 1, 3, 5, 9.

I 1 3 3 3 5 5 5 5 — цифры в числах

Количество чисел равно: $C_8^1 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 =$

$= 8 \cdot \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} \cdot 1 = 8\cdot35 = 280$

II 1 1 3 5 5 5 5 9 — цифры в числах

Количество чисел равно: $C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^4 \cdot C_1^1 =$

$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot7}{1\cdot\cancel{2}} \cdot 6 \cdot 5 = 28\cdot30 = 840$

$840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

(1) I $x - y \le 6$ $x + y \le 6$

$-x+y-y-x+12 = 12$ $x = 0$ $y \ge -6$ $y \le 6$

II $x+y \geq 6$ $x-y \leq 6$

$x-6+y-x+6+y=12$ $y=6$ $x \geq 0$ $x \leq 12$

III $x-y \geq 6$ $x+y \leq 6$

$x-6-y-x+6-y=12$ $y=-6$ $x \geq 0$ $x \leq 12$

IV $x-y \geq 6$ $x+y \geq 6$

$x-6-y+x-6+y=12$ $x=12$ $y \leq 6$ $y \geq -6$

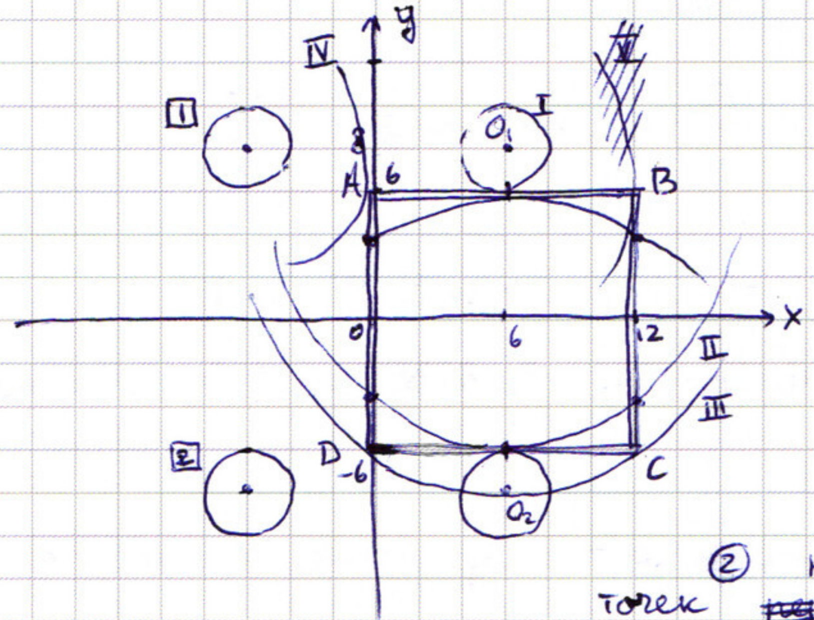


График ① — прямоугольник

График ② симметричен отн. осей Oy и Ox, получается симметрией отн. этих осей графика

$$(x-6)^2+(y-8)^2=a$$

(окр.-ть с центром (6; 8) и радиусом $\sqrt{a}$)

При $\sqrt{a} < 2$ графики ① и ② не пересекаются. При $\sqrt{a} = 2$ точек ~~на~~ пересечения две (положение I). При $2 < \sqrt{a} < 14$ пересечений ~~больше~~ не менее 4 (положение II), при $14 < \sqrt{a} < 16$ пересечений ~~больше~~ не менее 8 (положение II – III)

Заметим, что т. A и B, ~~равноудалены~~ C и D симм.-ны относительно пр. O_1O_2 (см. рисунок). Значит, если график ② проходит через A, то он проходит и через B, C, D. Если же положение графика промежуточное между прохождением через A, B, C, D и касанием AB и CD, пересечений больше 2.

Если окр. $\boxed{1}$ или $\boxed{2}$ касаются графика ① в одной точке, то $\sqrt{a}$ принимает такое значение, при котором окр.-ти с центрами O_1 и O_2 пересекают график ① более 2х раз (положение IV) ~~Если радиус окр.-ти 1 больше, то она пересечёт график ①~~

~~За положением~~ График ② может касаться графика ① (то есть AB и CD), проходя по другую сторону от AB, но тогда появится ещё два пересечения (см. положение II)

Таким образом, $\sqrt{a} = 2$

$a = 4$

~~Ответ~~

Ответ: 4

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $y > 0$, $x < 0$

(2) $(2y + x)(y - x) = (2y + x)\cdot 4$

$(2y+x)(y-x-4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2y \\ y = x+4 \end{array}\right.$

I $x = -2y$ $-x = 2y$

Замена: $-x = t$ $t > 0$

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = t^{\lg t \cdot \lg y}$ $(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$

$2^{4\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 2^{2\lg y + \lg 2} \cdot y^{2\lg y + \lg 2}$ $\Big| : y^{2\lg y}$

$2^{4\lg y} = 2^{2\lg y + \lg 2} \cdot y^{\lg 2}$ $\Big| : 2^{2\lg y}$

$2^{2\lg y} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2}$

Замена: $q = \lg y$ $y = 10^q$

$2^{2q} = 2^{\lg 2} \cdot 10^{q\lg 2}$

Пусть $-x = t$, $t > 0$.

Если $t = 1$:

I $y = 2t$ $y = 2$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\lg 2} = 1^{\lg 2}$ – неверно $x \neq 1$

II $y = 4 - t$ $y = 3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{\lg 3}$ неверно $x \neq 1$

$t \neq 1$.

$\log_t\left(\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y}\right) = \log_t\left(t^{\lg y + \lg t}\right)$

$4\lg y - 2\lg y \cdot \log_t y = \lg y + \lg t$

$3 \cdot \frac{\log_t y}{\log_t 10} - 2 \cdot \frac{\log_t y^2}{\log_t 10} - \frac{1}{\log_t 10} = 0$

Замена: $\log_t y = q$

$2q^2 - 3q + 1 = 0 \qquad (2q-1)(q-1) = 0$

$q = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

I $\begin{cases} \log_t y = 1 \\ t = 2y \end{cases} \qquad 2y = y \qquad y = 0$

$y > 0 \Rightarrow x, y \in \varnothing$

II $\begin{cases} \log_t y = 1 \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad 4 - t = t \qquad t = 2 \quad y = 2$

$x = -2$

III $\begin{cases} \log_t y = \frac{1}{2} \\ t = 2y \end{cases} \qquad \sqrt{2y} = y \qquad y > 0 \Rightarrow$ можно обе части возвести в квадрат

$y^2 - 2y = 0 \qquad y \neq 0$, т.к. $y > 0$

$y = 2 \qquad t = 4 \qquad x = -4$

IV $\begin{cases} \log_t y = \frac{1}{2} \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad \sqrt{t} = 4 - t$

$t = t^2 - 8t + 16$

$t^2 - 9t + 16 = 0 \qquad D = 81 - 64 = 17$

$t = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2} \qquad 4 - t > 0 \qquad t < 4,\ t > 0$

$\frac{9 + \sqrt{17}}{2} > 0 \qquad \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \vee 4 \qquad 9 - \sqrt{17} \vee 8 \qquad 1 \vee \sqrt{17}$

$1 < \sqrt{14} \Rightarrow \frac{9 - \sqrt{17}}{2} < 0 \qquad t = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \qquad x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$

$y = \frac{8 + \sqrt{17} - 9}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

Ответ: $(-2; 2)$ $(-4; 2)$ $\left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

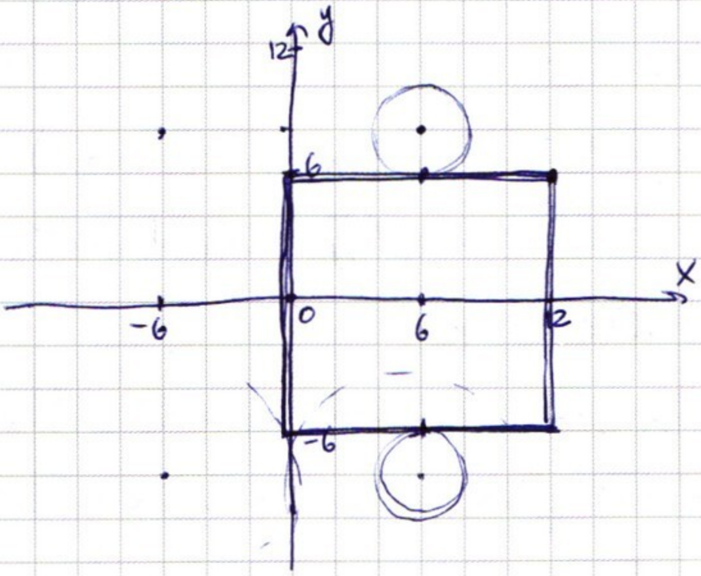
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

III $x-y\geqslant 6 \quad x+y<6$

$\cancel{x-6}-y\cancel{-x+6}-y=12$

$y=-6 \quad x\geqslant 0 \quad x<12$



IV $x-y\geqslant 6 \quad x+y\geqslant 6$ $\quad -y\geqslant -6$ $\quad y\geqslant -6$

$x-6-\cancel{y}+x-6+\cancel{y}=12 \quad x=12$

$y\leqslant 6 \quad y\geqslant -6$

$x=\pm 6 \quad y=\pm 6$

$4\lg y-2\lg y\cdot \log_t y=\lg t+\lg y$

$3\lg y-2\lg y\cdot \log_t y-\lg t=0$

$3\cdot \frac{\log_t y}{\log_t 10}-2\cdot\frac{\log_t y^2}{\log_t 10}-\frac{1}{\log_t 10}=0$

$2q^2-3q+1=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+7x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)-\cos 10x=0$

$\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x-\cos 10x=0$

$\cos 2x$

$\cancel{\sin} \ \frac{1}{\sqrt2}\sin 5x^2+\frac{1}{\sqrt2}\cos 5x\cos 2x-$

$\cos 7x+\sqrt2\,\cancel{\sin}\,\sin 7x\sin 3x+\cos 3x-\cancel{\sqrt2}\cos 7x\cos 3x-\sin 7x-\sin 3x=0$

$\cos 7x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-10x\right)$

$\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+10x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

$\cos 7x+\cos 3x=2\cos 5x\cos 2x$

$\sin 7x+\sin 3x=2\sin 5x\cos 2x$

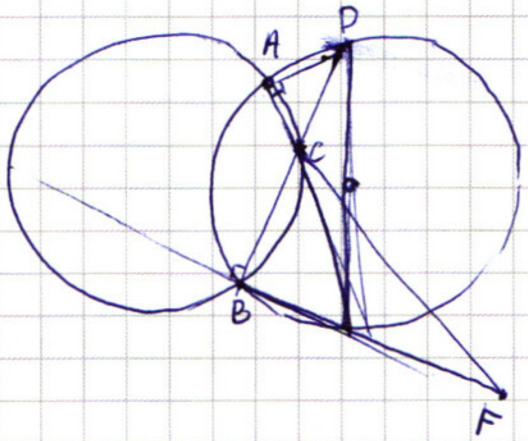
$\cancel{2\cos 5x(}\ 2\cancel{\cos 5x}\cos 2x\,(\cos 5x-\sin 5x)-\sqrt2\cos 10x=0$

$\cancel{\frac{81+17-18\sqrt{17}}{4}=}$

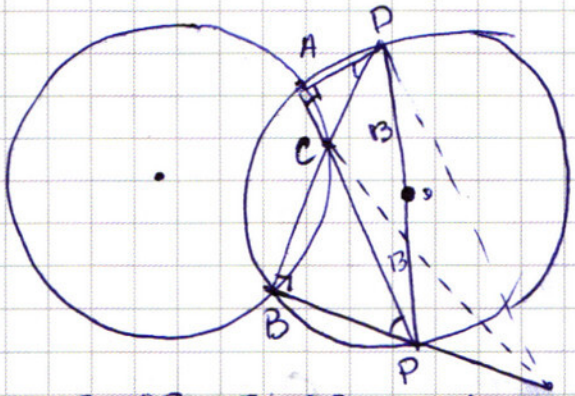
$\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$BD = BF \qquad R = 13 \qquad CF = ?$



$\cos 7x + \cos 3x + \sqrt{2}\cos^2 7x + \sqrt{2}\sin^2 7x + \sqrt{2}\cos^2 3x + \sqrt{2}\sin^2 3x - \sin 7x - \sin 3x -$

$- \sqrt{2}\cos 7x \cos 3x - \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x = 0$

$\cos 7x(\sqrt{2}\cos 7x - \sqrt{2}\cos 3x + 1) + \cos 3x(\sqrt{2}\cos 3x - \sqrt{2}\cos 7x + 1)$

$2^{2\lg y - \lg 2} = y^{\lg 2}$

$2^{2\lg y} = 2y^{\lg 2}$

$2^{2q} = 2 \cdot 10^{q \cdot \lg 2}$

$\cancel{1 = 2^{2q+1+q \cdot \lg 2}}$

$\cos(\frac{\pi}{4} + 7x) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) - \sqrt{2}\cos 10x = 0$

$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$\sin 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x + \sqrt{2}\sin^2 5x = 0$

$\sqrt{2}\,tg^2 5x + \cos 2x\, tg 5x - \sqrt{2} = 0$

$D = \cos^2 2x + 8$

~~$\cos 3x - \sin 7x =$~~

$\sqrt{2}\sin 7x \sin 3x - \sqrt{2}\cos 7x \cos 3x + \cos 7x + \cos 3x - \sin 7x - \sin 3x$

$\sqrt{2}\,tg 7x\, tg 3x - \sqrt{2} + \frac{\cos 7x}{\cos 3x} + \frac{\cos 3x}{\cos 7x} - tg 7x - tg 3x = 0$

$2\sin 5x \cos 2x = 2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x$

$y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x \qquad x, y \in Z$

$-y > -85 - 3^{81} \cdot x + x$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 3^{81} \cdot x - 85 + x < 0$

$\left(\frac{t^2}{y}\right)^{2\lg y} = t^{\lg t} \cdot t^{\lg y}$

$\left(\frac{t^3}{y}\right)^{\lg y} = t^{\lg t}$

$t = 2y \qquad \lg t = \lg 2y$

$t^{\lg 2} = \left(\frac{t^2}{y}\right)^{\lg y}$

$\frac{t^2}{y} = 4y \qquad 2^{\lg 2} = 4y^{\lg y}$

$\cos 10x = \sin(\frac{\pi}{2} - 10x) = 2\sin(\frac{\pi}{4} - 5x)\cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$

$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 8_4} = \frac{5}{12}$

$\frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 8_4} = \frac{5}{21}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 7x\cos 3x + \sqrt{2}\sin 7x\sin 3x - \sin 7x - \sin 3x = 0$

$\cancel{\cos 7x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right) + \cos 3x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x\right)}$

$\cos 7x - \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$

$\cos 3x - \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$

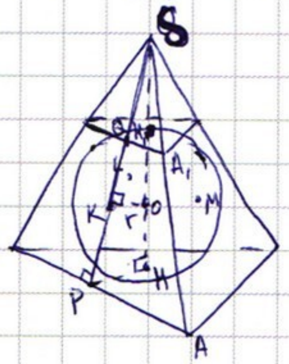
$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(10x + \frac{\pi}{2}\right)\cos 4x =$

$\cancel{2\sin(10x+}$ $\sqrt{2}\sin 10x\cos 4x - \sqrt{2}\cos 10x = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)\cos(-4x) =$

$= \cos 10x \cos 4x$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos 2x$

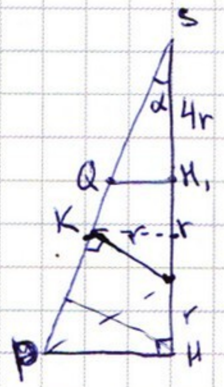


$S_1 = 4 \quad S_2 = 9$

$\frac{SA_1}{SA} = \frac{2}{3}$

$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k$

$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi k$



$\frac{SH_1}{2r} = \frac{2}{1}$

$SH_1 = 4r \quad SH = 6r$

$\sin\alpha = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$

$16875 : 25 = 675$

$675 : 25 = 27$

$16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

$\frac{4.3}{1.2}$

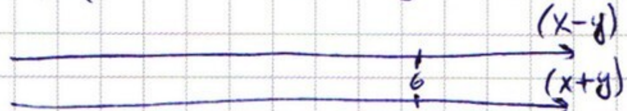
$625 \times 27 = 16875$

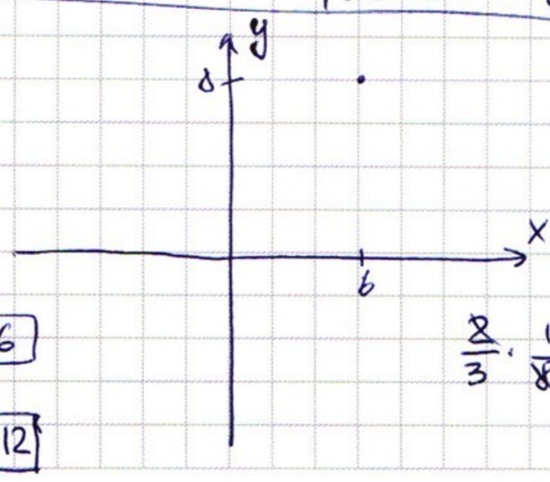
$35 \times 8 = 280$

$7\cdot6\cdot5$

$28 \times 30 = 840$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$





I $\quad (x-y) < 6 \quad (x+y) < 6$

$-x + y - y - x + 12 = 12$ $\boxed{x = 0 \quad y > -6 \; y < 6}$

II $\quad x + y \geq 6 \qquad x - y < 6$

$\cancel{x} - \cancel{6} + y - \cancel{x} + \cancel{6} + y = 12$ $\boxed{y = 6 \quad x \geq 0 \quad x < 12}$

$\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{84}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ $\qquad x(-x+y-4)$

$2y(y-x-4) - x(x-y-4)$ $\qquad 2y(y-x-4)$

$(2y+x)(y-x) = 4(x+2y)$ $\qquad$ ОДЗ: $y>0$, $x<0$

$(2y+x)(y-x-4) = 0$

I $\quad x = -2y$

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$

$2^{4\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 2^{\lg 2 + 2\lg y} \cdot y^{\lg 2 + 2\lg y}$ $\qquad \lg y = t \quad y = 10^t$

$2^{4t} \cdot 10^{t \cdot 2t} = 2^{\lg 2 + 2t} \cdot 10^{t(\lg 2 + 2t)}$ $\qquad | : 10^{2t^2}$

$2^{4t} = 2^{\lg 2 + 2t} \cdot 10^{\lg 2 \cdot t}$ $\qquad | : 2^{2t}$

$1 = 2^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 2 \cdot t}$

$10^t = \frac{1}{2^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 2}}$ $\qquad 10^t = 20^{-\lg 2}$ $\qquad t = \lg 20^{-\lg 2}$

$\lg y = \lg 20^{-\lg 2}$ $\qquad y = 20^{-\lg 2}$

II $\quad y = x+4$ $\qquad \begin{cases} x+4>0 \\ x<0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x>-4 \\ x<0 \end{cases}$

$t = -x$

$t^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = t^{\lg y} \cdot t^{\lg t}$ $\qquad | : t^{\lg y}$

$t^{3\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = t^{\lg t}$ $\qquad x^{\lg x} = \cancel{x^{\frac{1}{\log_x 10}}}$

$y^{-2\lg y} = \cancel{t^{\log_t y}}$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)