МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Заметим, что ~~всех~~ наборов цифр чисел ~~...~~, которые нам подходят всего два.

$(3;3;3;7;7;7;1;1)$ и $(3;9;7;7;7;1;1;1)$

Таким образом, нам надо найти кол-во различных всех перестановок ~~для~~ внутри каждой из 2 групп.

Переставить три "3", три "7" и две "1" можно $\left(\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}\right)$ способами

Переставить же ~~...~~ одну "3", одну "9", три "7" и три "1" можно $\left(\frac{8!}{3!\cdot 3!}\right)$ способами.

Причем заметим что данные два мн-ва чисел не пересекаются.

$\Rightarrow$ Общее кол-во восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых 9261 =

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} + \frac{8!}{3!\cdot 3!} = \frac{3}{2}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 3!} = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 5\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{6}} =$$

$$= 6\cdot 5\cdot 7\cdot 8 = 1680$$

Ответ: 1680.

6.

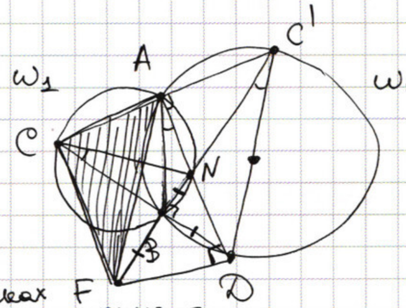


рис 1

* на двух рисунках разное расположение точек возможное

Дано: ω_1 и ω_2

$R_1 = R_2 = 10$

$B \in CD$

$BF \perp CD$ $BF = BD$

а) Найти: CF

б) $BC = 12$ Найти: $S_{\triangle ACF}$

Решение:

~~Вводная принципа.~~

а) Пусть C' — это пересечение прямой AC и ω_2

Заметим, что $\angle C'AD = 180 - \angle CAD = 90^\circ$

$\Rightarrow C'D$ — диаметр в ω_2 $\Rightarrow \angle C'BD = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр

$\Rightarrow F \in BC'$

в зависимости от рисунка * либо $\angle BC'D = \angle BAD$ как вписанные, а $\angle BAD = \angle BCN$ т.к. $BCNA$ — вписанный

Теперь заметим, что $\angle BC'D = \angle BAD = \angle BCN$, как вписанные, где N — т. пересечения AD и $C'B$

По т.sin $\dfrac{BD}{\sin\angle BC'D} = 2R = 20$ и $\dfrac{BN}{\sin\angle BCN} = 2R = 20$

~~т.к.~~, $\sin\angle BC'D = \sin\angle BCN$, т.к. углы равны

$\Rightarrow BD = BN \Rightarrow BF = BN$

Заметим, что $N \in \omega_1$, т.к. $\angle CAN = 90$ и $\angle CBN = 90 \Rightarrow CANB$ — вписанный четырехуг. $\Rightarrow N \in \omega_1$

Т.к. $BF = BN$ и $BC \perp FN$, то BC — серединный перпендикуляр к FN $\Rightarrow$

$\Rightarrow CF = CN = 2R = 20$

б) Заметим, что $\triangle FDN$ — прямоугольный т.к. в нем медиана равна половине стороны к которой она проведена $\Rightarrow \angle FDN = 90^\circ$

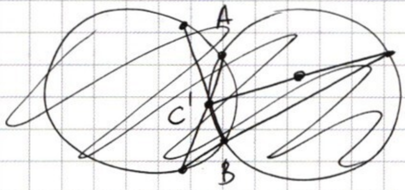
$\Rightarrow FD \parallel CC'$, т.к. $\angle DAC' + \angle ADF = 180$ (соответственные в ~~накрест лежащие~~ сумме ~~равны~~ 180) (сумма односторонних в зав-ти от рисунка)

$\Rightarrow FCC'D$ — равнобокая трапеция $\Rightarrow CD = CF \Rightarrow CB = BC' = 12$

Т.к. $AC \parallel FD$, то $S_{\triangle AFC} = S_{\triangle ACD}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. продолжение



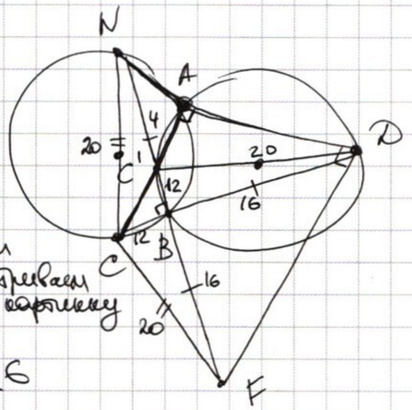


рис 2

Т.к. $BC < BN$, то во втором пункте мы рассматриваем вторую картинку

По т. Пифагора

$BD = BF = \sqrt{400-144} = 16$

~~Пусть $AN = x$~~

~~$\Rightarrow AC = \sqrt{400-x^2}$ по т. Пифагора~~

~~$AD = \sqrt{28^2 - 400 + x^2} = \sqrt{384+x^2}$~~

~~$S_{ACDN} = \frac{16 \cdot 28}{2} = \left(\sqrt{400-x^2} \cdot x + \sqrt{384+x^2} \cdot \sqrt{400-x^2}\right) \cdot \frac{1}{2}$~~

~~$16 \cdot 28 = \sqrt{400-x^2} \cdot \left(x + \sqrt{384+x^2}\right)$~~

~~$\frac{16 \cdot 28}{\sqrt{400-x^2}} = x + \sqrt{384+x^2}$~~

$DN = 16\sqrt{2}$ по т. Пифагора для $\triangle BND$

$\frac{AC \cdot 16\sqrt{2}}{2} = \frac{16 \cdot 28}{2} = S_{\triangle CND} \Rightarrow AC = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$

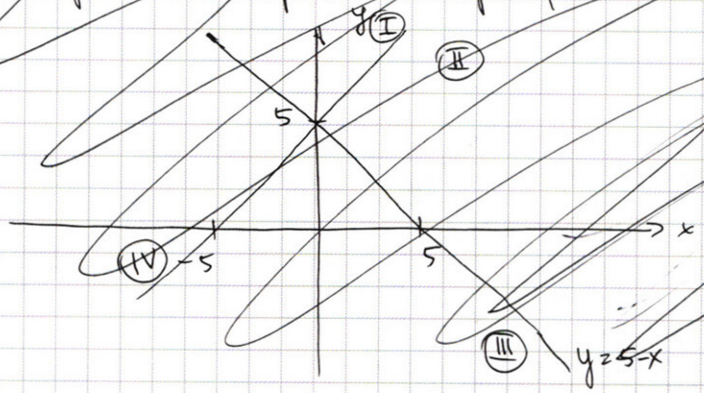
~~$\Rightarrow AC = \frac{14\sqrt{16}}{\sqrt{14^2}} \Rightarrow AD = \sqrt{28^2 - 14^2 \cdot 16} =$~~

$AD = \sqrt{28^2 - 14^2 \cdot 2} = 14\sqrt{2}$ по т. Пифагора

$= S_{\triangle ACD} = \frac{AC \cdot AD}{2} = 14^2 = S_{\triangle ACF}$ Ответ: а) 20 б) 196

5. $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

~~Начертим первый график~~

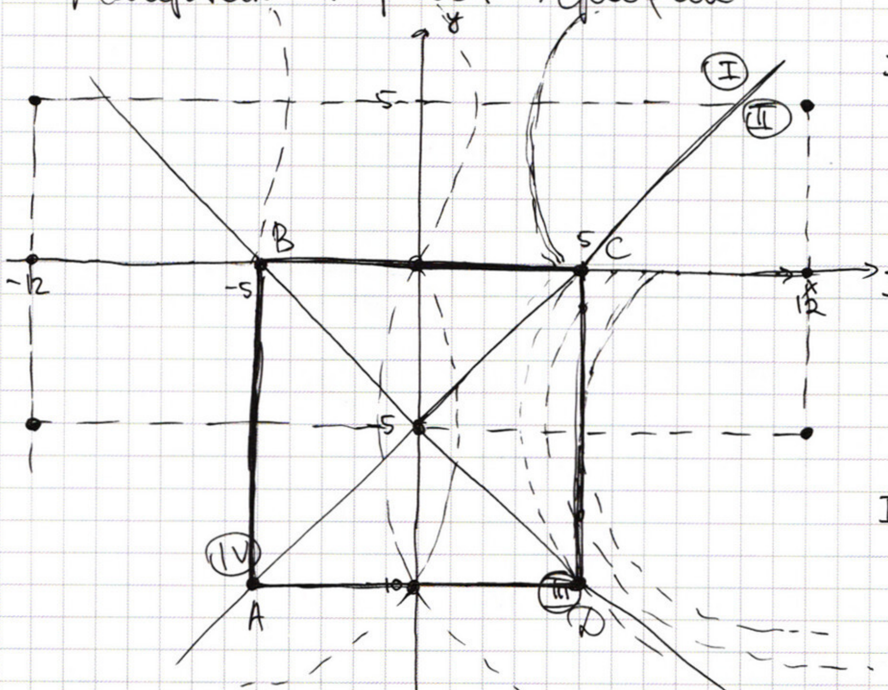


~~I) $x+y \geq 5$~~
~~$y-x \geq 5$~~

~~$x+y+5+y-x+5=10$~~
~~$\Rightarrow y=0$ не лежит в области~~

~~II) $x+y \geq 5$~~
~~$y-x<5$~~
~~$x+y+8$~~

Начертим первый график



I) $x+y \geq -5$
$y-x \geq -5$

$x+y+5+y-x+5=10$
$y=0$
x любой

II) $x+y \geq -5$
$y-x < -5$

$x+\cancel{y}+\cancel{5}-\cancel{y}+x-\cancel{5}=10$
$x=5$
y любой

III) $x+y<-5$
$y-x<-5$

$-\cancel{x}-y-5-y+\cancel{x}-5=10$
$-2y=20$
$y=-10$
x любой

IV) $x+y<-5$
$y-x \geq -5$

$-x-y-5+y-x+5=10$
$x=-5$
y – любой

Первый график – квадрат ABCD
Второй график без модулей – окружность
~~[illegible]~~ С модулями ~~окружность~~
часть окружности в четверти $x \geq 0$, $y \geq 0$
отраженная во все остальные 3 четверти.
с центрами $(\pm 12; \pm 5)$, радиуса $\sqrt{a}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$

$$(x^{\ln x})^{-2} \cdot y^{-4\ln x} = y^{(\ln y - \ln x^7)}$$

$$\frac{1}{e^2} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}} = \frac{e}{y^{7\ln x}} \quad \Big| \cdot y^{7\ln x} \neq 0$$

$$\frac{1}{e^2} \cdot y^{3\ln x} = e$$

$$(y^{\ln x})^3 = e^3$$

$$y^{\ln x} = e = x^{\ln x} \Rightarrow x = y$$

(2): $x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x(x-2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ x = 2 = y \end{array}\right.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$ решение

Ответ: $(2;2)$

5. продолжение

Заметим что вторая функция четная
$\Rightarrow$ если при $x \geq 0$ есть решение, то и при $x \leq 0$ тоже будет столько же решений

$\Rightarrow$ Чтобы было два решения при $x > 0$ должно быть одно решение.

При $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$ одно решение будет если

радиус окружности ~~...~~ $\in [\sqrt{60}; 13]$
$\Rightarrow a \in [60; 169]$

При $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{matrix}$ одно решение когда окружность касается стороны квадрата внешним образом $\Rightarrow$ когда $r = 7$
$\Rightarrow a = 49$

~~либо когда~~ при больших a решений больше 1, т.е. пересекается либо только вертикальная сторона ($x=5$), либо два раза пересекаются и верхняя и нижняя сторона т.е. центр квадрата по Oy находится там же, где и центр окружности

Значит, при ~~...~~ $a \in [60; 169]$ решений будет два при $x \geq 0$
Они могут совпадать только если $x = 0$
$x=0$ решение когда $a = 169$, тогда мы имеем всего два решения $(0;0)$ и $(0;-10)$
Итак, значит система имеет два решения при $a = 169$ и 49.
Ответ: $169; 49$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(x^{-\ln x}\right)^2 \cdot y^{-4\cdot\ln x} = y^{(\ln y - \ln x^7)}$$

$$2^{1-2} = \frac{2^1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^2 \cdot y^{-4\ln x} = \frac{e}{y^{\ln x^7}}$$

$$y^{\ln x^7 - 4\ln x} = e^3$$

$$y^{3\ln x} = e^3$$

$$\left(y^{\ln x}\right)^3 = e^3$$

$$y^{\ln x} = e = x^{\ln x} \Rightarrow x = y$$

$$\cancel{y^{\ln x} = e}$$

$\cos(x+y) =$
$\cancel{\cos}\ \sin x \cdot \sin y$
$+ \cos x \cdot \cos y$

$\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \cos 4x \cdot \sin 5x + \sin 5x = \sin 4x \cdot \sin 5x + \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x$$

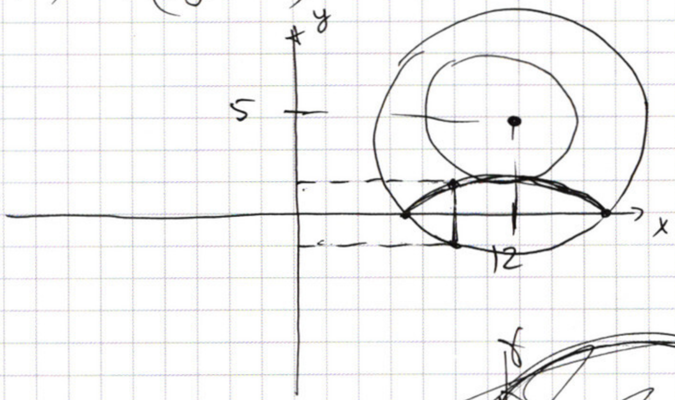
$$\cos 4x\left(\cos 5x - \sqrt{2} + \sin 5x\right) - \sin 4x\left(\sin 5x - \cos 5x\right) - \cos 5x + \sin 5x = 0$$

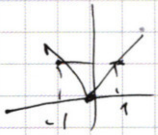
$$\cos 4x\left(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}\right) = \left(\sin 4x - 1\right)\left(\sin 5x - \cos 5x\right)$$

$$\cancel{\cos 5x + \sin 5x}$$

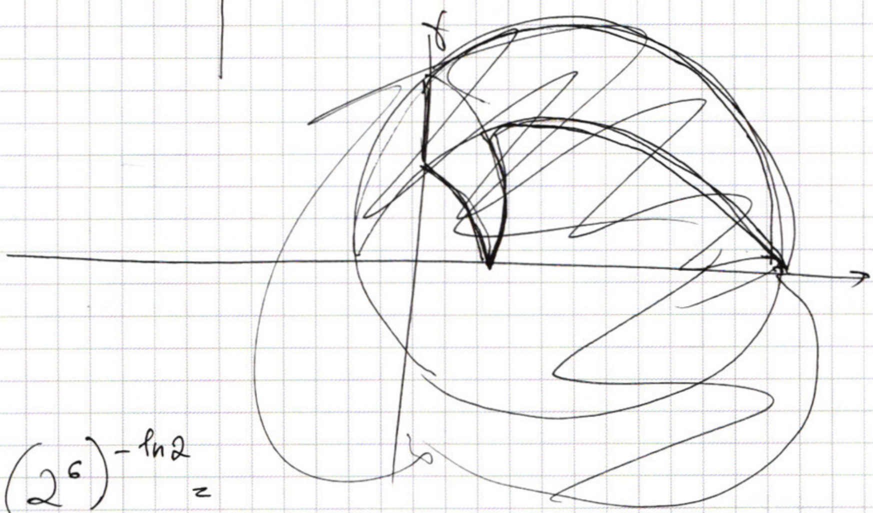
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

(1):





$x(y)$



$(2^6)^{-\ln 2} =$

$= 2^{\ln 2^{-6}}$

$2^{-6\ln 2} - 2^{-6\ln 2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

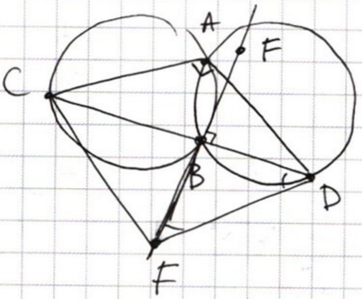
9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
	7

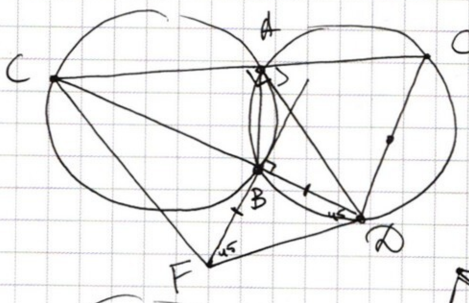
$3^3 \cdot 7^3$

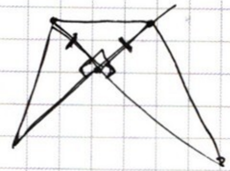
93777111

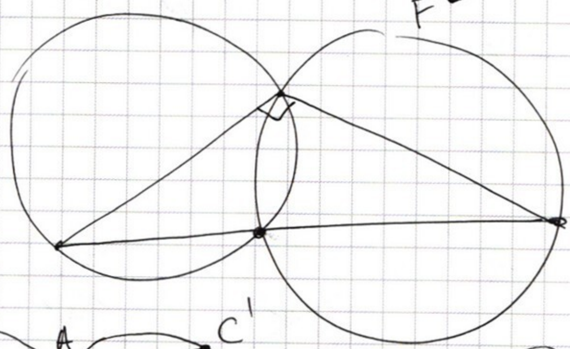
33377711

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 30 \\ \hline 1680 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times\ 48 \\ \hline 280 \\ 140 \\ \hline 1680 \end{array}$$

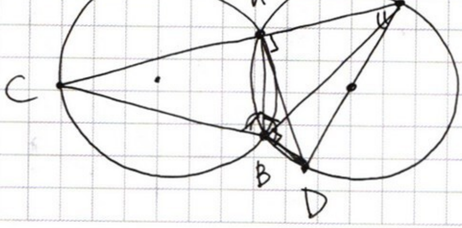


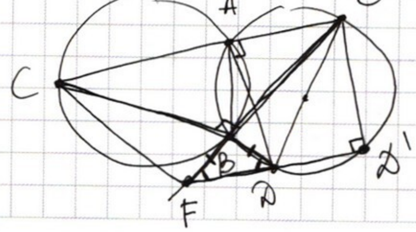






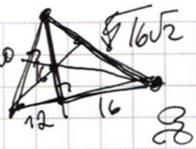
$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 25 \\ \hline 169 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \end{array}$$

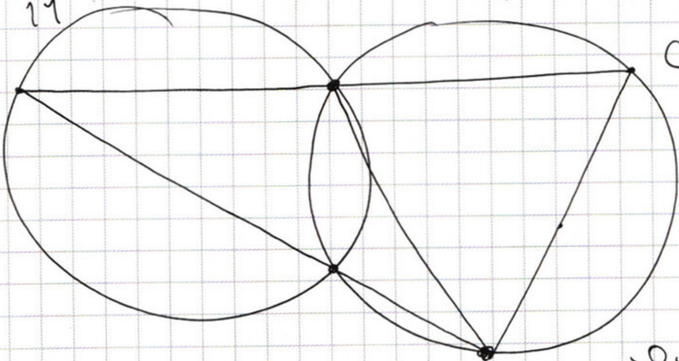




14
14
56
14

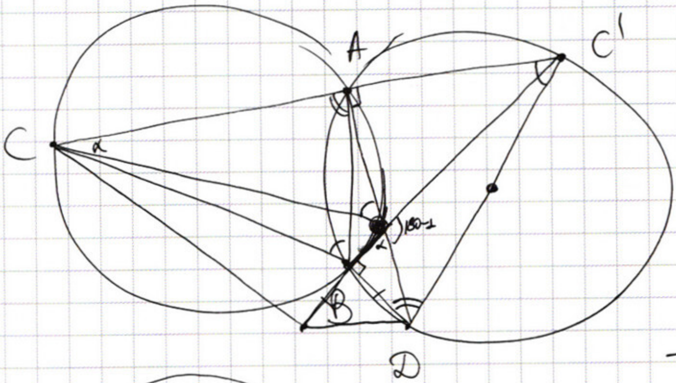
$x+y=5$
$y=5-x$





$\frac{AB}{\sin 45} = 28$

$AB = 10\sqrt{2}$



$\frac{a}{\sin 45} = 2R$

$400 - 144 = 256$