

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✗ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 7 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2$$

Варианты набора цифр:

3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1 - Набор I

9, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1 - Набор II

Для набора I:

Цифры «3» можно расставить $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$ различными способами

Далее цифры «5» можно расставить $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ различными способами для каждого из случаев с тройками

Единицы заполняют оставшиеся места однозначно. Всего вариантов с набором I цифр $56 \cdot 10 = 560$

Для набора II:

Цифра «9» может занять любое из 8 мест в числе, цифра «3» - одно из 7 оставшихся. $8 \cdot 7 = 56$. Из оставшихся 6 мест «5» может занять три $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ способами, а оставшиеся займут единицы. Всего вариантов с набором II цифр $56 \cdot 20 = 1120$

Всего получилось $560 + 1120 = 1680$ восьмизначных чисел, удовлетворяющих условию.

Ответ: 1680.

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(2): x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4 + 4y + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2 = 4(y-1)^2$$

$$x = y+2 \pm (2y-2),$$

$$\begin{cases} x = 3y, \\ x = -y+4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ x = 4-y \end{cases}$$

Подставим в (1):

$$1) x = 3y:$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}, \quad y \neq 0$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}, \quad y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2},$$

$$y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2},$$

$$y^{2\lg 3 + 2\lg y - \lg y} = 3^{\lg 3 + \lg y},$$

$$y^{2\lg 3} \cdot y^{\lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y},$$

$$y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3} \cdot y^{4\lg y},$$

$$y^{2\lg 3} \cdot y^{\lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3} \cdot y^{4\lg y}, \quad y > 0$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$\log_3(y^{2\lg 3}) = \log_3(3^{\lg 3y}),$$

$$2\lg 3 \log_3 y = \lg 3y,$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \frac{\log_3 y}{\log_3 10} = \log_3 y,$$

$$2 \log y = \log 3 + \log y,$$

$$\log y = \log 3,$$

$$y = 3,$$

$$x = 3y; \quad x = 9$$

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3 \end{cases}$$

$$2) \quad x = 4 - y, \quad x > 0, \quad y < 4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\log(4-y)} = y^{2 \log(4-y)y},$$

$$y^{5 \log(4-y)} = y^{2 \log(4-y)} \cdot y^{2 \log y} \cdot (4-y)^{\log(4-y)},$$

$$y^{3 \log(4-y)} = y^{2 \log y} \cdot (4-y)^{\log(4-y)}$$

$$\log_y(y^{3 \log(4-y)}) = \log_y(y^{2 \log y}) + \log_y((4-y)^{\log(4-y)}),$$

$$3 \log(4-y) = 2 \log y + \log(4-y) \log_y(4-y),$$

~~$$3 \log(4-y)$$~~

$$\log_{4-y}(y^{3 \log(4-y)}) = \log_{4-y}(y^{2 \log y}) + \log_{4-y}((4-y)^{\log(4-y)}),$$

$$3 \log(4-y) \log_{4-y} y = 2 \log y \log_{4-y} y + \log(4-y) \log_{4-y}(4-y)$$

$$\log(4-y) (\log_{4-y} y^3 - \log_{4-y}(4-y)) = 2 \log y \log_{4-y} y,$$

$$\lg(4-y) \lg_{4-y} \frac{y^3}{4-y} = 2 \lg y \lg_{4-y} y,$$

$$\lg(4-y) (\lg_{4-y} y^2 - 1) = 2 \lg y \lg_{4-y} y,$$

$$3 \lg(4-y) \lg_{4-y} y = 2 \lg y \lg_{4-y} y + \lg(4-y),$$

$$3 \frac{\lg_{4-y} y}{\lg_{4-y} 10} = 2 \lg y \lg_{4-y} y + \lg(4-y),$$

$$3 \lg y = 2 \lg y \lg_{4-y} y + \lg(4-y),$$

$$\lg \frac{y^3}{4-y} = 2 \lg y \lg_{4-y} y,$$

$$\lg y^3 + \lg \frac{y}{4-y} = \lg y^2 \lg_{4-y} y$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)},$$

$$(3 \lg(4-y) - 2 \lg y) \lg$$

$$y^{2(\lg(4-y) - \lg y)} = \left(\frac{4-y}{y}\right)^{\lg(4-y)},$$

$$y^{2 \lg \frac{4-y}{y}} = \left(\frac{4-y}{y}\right)^{\lg(4-y)}$$

$$2 \lg \frac{4-y}{y} \lg_{4-y} y = \lg(4-y),$$

$$2 \frac{\lg_{4-y} y}{\lg_{4-y} 10} = \lg(4-y),$$

$$2 \lg y = \lg(4-y),$$

$$\lg y^2 = \lg(4-y),$$

$$y^2 = 4-y,$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 + y - 4 = 0,$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \end{cases} \quad 0 < y < 4; \quad y = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ не удовн.}$$

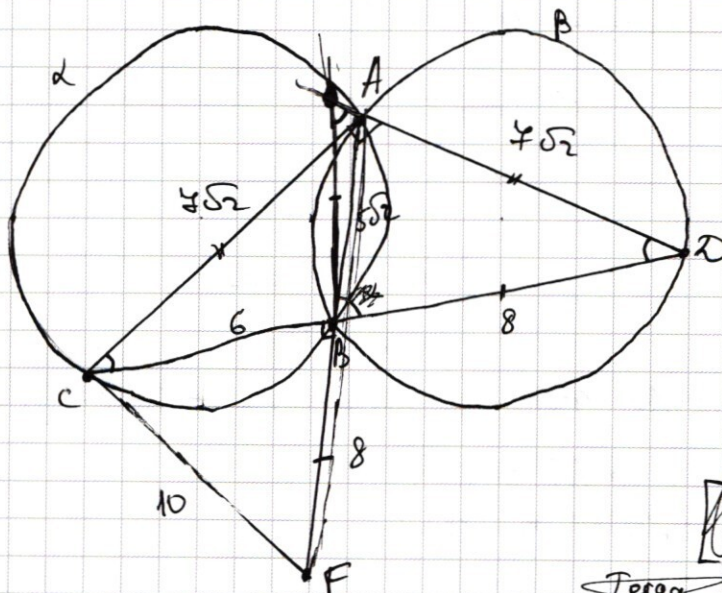
$$y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2},$$

$$x = 4 - y, \quad x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \quad x = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(9; 3), (\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$.

Задание 6.



AB-общая хорда для
окружностей, их радиусы равны,
следовательно хорда AB делит
равные дуги. Тогда вписанные
углы, опирающиеся на эти дуги
равны, т.е. $\angle D = \angle C = 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle ACD - \text{р/б}, AC = AD$

Т.к. окружности равны и
 $AD = AC$, то $\begin{cases} \alpha = \beta, \\ \alpha + \beta = 360^\circ \end{cases}$
 $\angle AAD + \angle AAB = 180^\circ$, - очевидно, верно
 $\angle AAD = \angle AAB$

Тогда $2\angle AAB = 2\angle AAD + 90^\circ \Rightarrow \angle AAB = \angle AAD + 45^\circ$, $\angle AAD = 135^\circ = \angle AAD$

В $\triangle ABD$ по Т. синусов $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2 \cdot 5 \Rightarrow AB = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

По Т. косинусов

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \alpha$, где $\alpha = \angle ABD$

$AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2AB \cdot BC \cos \alpha$

$AD = AC$;

$AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \alpha = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cos \alpha$,
 $(BD - BC)(BD + BC) = 2AB \cos \alpha (BD + BC)$

$BD - BC = 2AB \cos \alpha$

$CD = \sqrt{2} AC$

$\frac{BD}{\sin \gamma} = 2R = \frac{BC}{\cos \gamma} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \tan \gamma$

$\alpha + \gamma = 135^\circ$

$BC(\tan \gamma - 1) = 2AB \cos(135^\circ - \gamma)$;

$BC(\tan \gamma - 1) = 2AB \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \gamma\right)$,

$BC(\tan \gamma - 1) = \sqrt{2} AB (\sin \gamma - \cos \gamma)$;

$BC(\tan \gamma - 1) = 10(\sin \gamma - \cos \gamma)$

~~Если $BC = 6$; то $BD = 6 = 10\sqrt{2}$.~~

Если $BC = 6$, то $10 = \frac{6}{\cos \gamma} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan \gamma = \frac{4}{3} \Rightarrow BD = 8$;

$AD = AC = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

$CF = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$8 - 6 = 10\sqrt{2} \cos \alpha$;

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$;

$AF^2 = AB^2 + BF^2 + 2AB \cdot BF \cdot \cos \alpha \Rightarrow AF^2 = 50 + 64 - 80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow AF^2 = 114 - 16 \Rightarrow AF^2 = 98 \Rightarrow AF = 7\sqrt{2}$

$S = \sqrt{(7\sqrt{2} + 5)(7\sqrt{2} - 5) \cdot 5^2} = 5\sqrt{98 - 25} = 5\sqrt{73}$

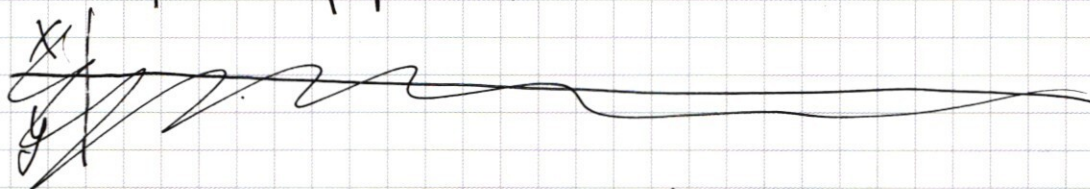
Ответ: $5\sqrt{73}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

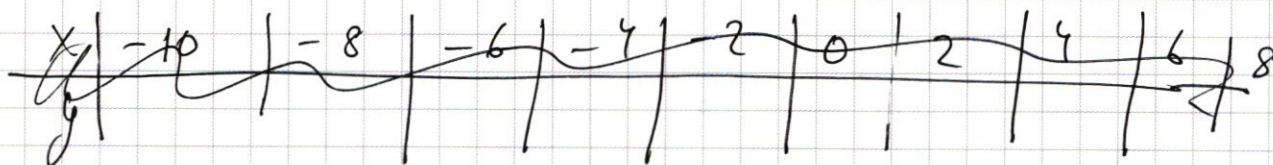
Задание 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9; \end{cases}$$

Построим графически:



$$\begin{aligned} (y-3-x)^2 + (y-3+x)^2 + 2|(y-3)^2 - x^2| &= 36, \\ (y-3)^2 + x^2 - 2x(y-3) + (y-3)^2 + x^2 + 2x(y-3) + 2(y-3)^2 - 2x^2 &= 36, \\ 2(y-3)^2 + 2x^2 + 2|(y-3)^2 - x^2| &= 36, \\ \begin{cases} (y-3)^2 = 9, \\ x^2 = 9; \end{cases} &\begin{cases} y = 6 \\ y = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

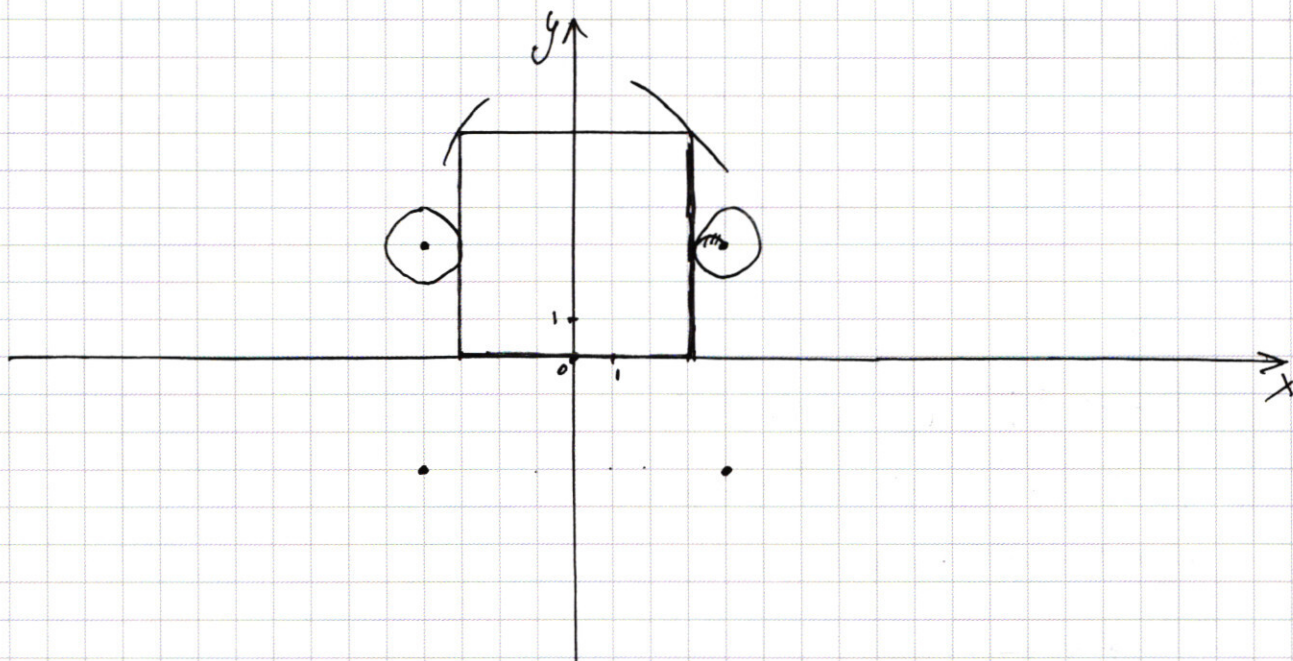


$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6; \quad \begin{aligned} &2y-6 \geq 6, \\ &y \geq 6 \text{ нет} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &6-2y \geq 6, \\ &y \leq 0 \text{ нет} \end{aligned}$$

$$y = 6: |3-x| + |3+x| = 6 \quad -3 \leq x \leq 3$$

$$\begin{aligned} y = 0: |-3-x| + |-3+x| &= 6, \\ |x+3| + |x-3| &= 6, \quad -3 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

$$x = \pm 3: |y-6| + |y| = 6; \quad 0 < y < 6$$



$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

в I четверти окр-ть $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$,

центр $(4; 3)$ радиус $\sqrt{a}$

в II четверти $(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$, центр $(-4; 3)$

в III четверти $(x+4)^2 + (y+3)^2 = a$, центр $(-4; -3)$;

в IV четверти $(x-4)^2 + (y+3)^2 = a$ центр $(4; -3)$

либо обе верхние окружности касаются сторон, либо нижние окружности проходят через углы.

1) $r = \sqrt{a} = 1$; $a = 1$.

2) $r = \sqrt{a} = \sqrt{49+81}$, $a = 130$

В других случаях более двух решений, либо ни одного

Ответ: $a \in \{1; 130\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x,$$

~~$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 14x,$$~~

~~$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos(11x + 3x),$$~~

~~$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin(4x) = \cos(14x)$$~~

$$\cos 11x = \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x$$

$$\cos 3x = \cos 7x \cos 4x + \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 11x = \sin 7x \cos 4x + \sin 4x \cos 7x$$

~~$$\cos \sin 3x = \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x$$~~

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x),$$

Правая часть: $\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x = (\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x) -$

$$+ (\cos 7x \cos 4x + \sin 7x \sin 4x) - (\sin 7x \cos 4x + \sin 4x \cos 7x) (\sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x) =$$

$$= \cos^2 7x \cos^2 4x + \sin^2 7x \sin^2 4x + \cos^2 7x \cos^2 4x - \sin^2 7x \sin^2 4x -$$

$$- \sin^2 7x \cos^2 4x + \sin^2 4x \cos^2 7x$$

$$- \sqrt{2} \sin 7x \sin 4x - \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x = \cos^2 7x \cos^2 4x - \sin^2 7x \sin^2 4x -$$

$$- \sin^2 7x \cos^2 4x + \sin^2 4x \cos^2 7x,$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \sin 4x + \sqrt{2} \sin 4x \cos 7x + \cos^2 7x \cos^2 4x - \sin^2 7x \sin^2 4x -$$

$$- \sin^2 7x \cos^2 4x + \sin^2 4x \cos^2 7x = 0,$$

$$\sin 4x \sin 7x (\sqrt{2} - \sin 7x \sin 4x) + \sin 4x \cos 7x (\sqrt{2} + \sin 4x \cos 7x) +$$

$$+ \cos^2 4x \cos 14x = 0,$$

Задача 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

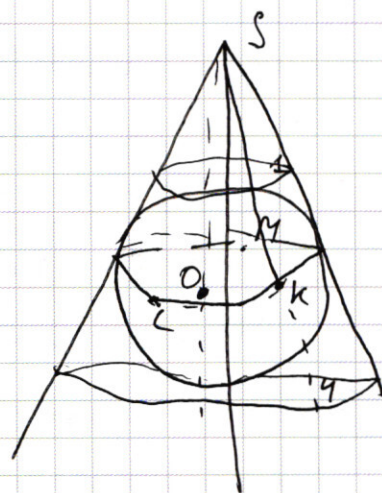
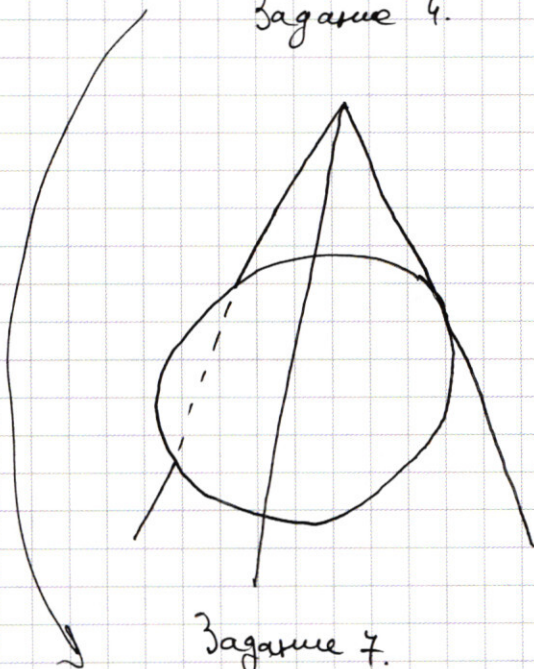
$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$6 + 64 + (2^{64} - 1)x - 6 \cdot 2^{64} > 2^x$$

$$(2^{64} - 1)(x - 6) > 2^x - 2^6$$

$$(2^{64} - 1)(x - 6) > 2^x - 2^6$$

Задача 4.



Задача 7.

~~$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$~~

$$(2^x - 2^6)' = 2^x \ln x$$

$$2^x \ln x = 2^{64} - 1$$

При $x=1$:

$$2 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} - 1;$$

$$2 + 2^{65} + 2^{66} < y \leq 2^6 + 5 + 2^{64};$$

невыполнимо

При $x=5$:

$$2^5 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 5 \cdot 2^{64} - 5,$$

$$2^5 + 2^{65} + 2^{66} < y \leq 2^6 + 1 + 2^{66} + 2^{64}$$

невыполнимо

~~З~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $x=6$:

$$2^6 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + 2^{64} - 6 - 6,$$

$$2^6 + 2^{65} + 2^{66} < y \leq 2^6 + 2^{66} + 2^{65}$$

При $x=6$ не существует пара $(x; y)$

$$70 + (2^{64} - 1)x - (70 + (2^{64} - 1)(x + 1)) < -(2^{64} - 1)$$

Левая часть возрастает на $2^{64} - 1$ с $\Delta x = 1$

$$3 \cdot 2^{65} + 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{65} - 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$$

левая возрастает на 2^x

$$2^{64} - 1 > 2^x, \quad x \leq 63$$

$$X \in [\underline{7}, 63]$$

Typu $x = 8$:

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 2^6 - 1 + 2^{69} \cdot 7,$$

$$2^4 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 2^6 - 1 + 3 \cdot 2^{65} + 2^{64}$$

$$2^4 < 2^6 - 1 + 2^6$$

$$k = 2^{64} + 2^6 - 1 - 2^7 = 2^{64} - 1 - 2^6 = 2^{64} - 2^6 - 1$$

Then $x = 8$:

$$2^8 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 2^6 + 6 + 2^{64} \cdot 2^3 - 2^3$$

$$2^8 + 2^{65} + 2^{66} < y \leq 2^6 + 2 + 2^{67}$$

$$K = 2^{67} + 2^6 - 2 - 2^{66} - 2^{65} - 2^8$$

One $x=4$: 

Второй вариант

$$\begin{array}{cc} 10^6 & 10^0 \\ \sim & \sim \\ 57 & 5 \end{array}$$

Ответ: $2^{63} + 2^{126}$ натур. чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 6 \cdot 2^{64} < 64 + 6(1 - 2^{64}) + (2^{64} - 1)x - 2^x$$

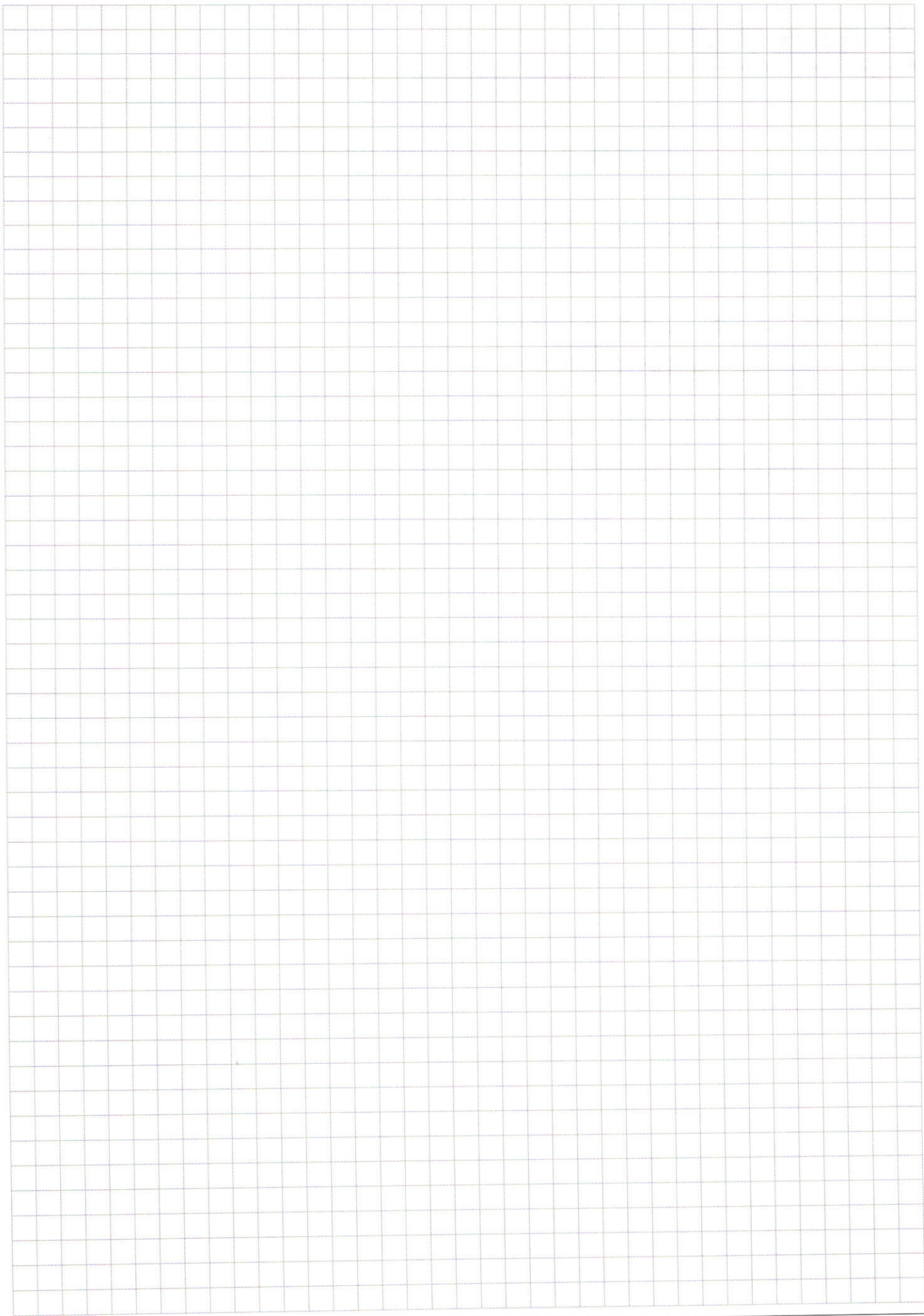
$$\Leftrightarrow 2^6 - 2^x + (2^{64} - 1)(x - 6)$$

~~$$2^6 - 2^x + (2^{64} - 1)(x - 6)$$~~

$$2^6 - 2^x + (2^{64} - 1)(x - 6) > 0,$$

$$(2^{64} - 1)(x - 6) > 2^x - 2^6$$

$$(2^{64} - 1)(x - 6) > 2^x - 2^6$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \lg 3 \log_3 y = \lg 3 + \lg y,$$

$$\lg 3 - \lg 3 \log_3 y - \lg 3 \log_3 y + \lg y = 0;$$

$$2 \frac{\log_3 y}{\log_3 10} = \lg 3 + \lg y,$$

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = y^{2 \lg 4} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{4-y}{y}$$

$$3 \lg(4-y) = 2 \lg 4 + \lg(4-y) \log_y(4-y);$$

$$3 \lg(4-y) + 2 \lg(4-y) \log_y(4-y) - 3 \lg(4-y) \log_y(4-y) - 2 \lg 4 = 0;$$

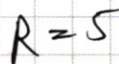
$$3 \lg(4-y) \log_{4-y} y = (\log_{4-y} y) \cdot 2 \lg 4 + \lg(4-y)$$

$$3 \lg y = 2 \lg 4 \log_{4-y} y + \lg(4-y)$$

$$3 \lg(4-y)$$

$$3 \lg(4-y)$$

42



CF-?

$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \sqrt{2} \cos(11x+3x).$$

$$-2\sin^4 x (\sin 7x + \cos 7x) = \cancel{\sqrt{2} \cos 7x \cos} \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$= (x-6)(2^{64} - 1) + (2^6 - 2^x)$$

$$(x-6)(2^{64}-1) > 2^x - 2^6$$

$x > 6;$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2$$

~~$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2$$~~

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6}$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

~~$$5$$~~

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 5 & 5 & & & & \\ 5 & 5 & & 5 & & & \\ 5 & 5 & & & 5 & & \\ 5 & & 5 & 5 & & & \\ 5 & & 5 & & 5 & & \\ 5 & & & 5 & 5 & & \\ & 5 & 5 & 5 & & & \\ & 5 & 5 & & 5 & & \\ & 5 & & 5 & 5 & & \\ & & 5 & 5 & 5 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & y^{2 \lg 3 y^2} \\ & = y^{2(\lg 3 + 2 \lg y)} = \\ & = y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{aligned} & \cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) - \sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = \\ &= \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \cancel{\sin 7x \sin 4x} - \cancel{\cos 7x \cos 4x} - \cancel{\sin 7x \sin 4x} - \\ & - \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \cancel{\cos 7x \sin 4x} + \cancel{\sin 7x \cos 4x} - \\ & - \cancel{\cos 7x \sin 4x} = -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \\ &= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x; \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = 0;$$

$$\sqrt{2} \cos^2 7x - \sqrt{2} \sin^2 7x + 2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = 0,$$

$$\sqrt{2} (2 \cos^2 7x - 1) + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0,$$

$$2\sqrt{2} \cos^2 7x - \sqrt{2} + 2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin 4x \cos 7x = 0,$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x,$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x = 0,$$

$$a - \sqrt{2} ab - b = \cancel{a-b} (a-b) = \cancel{a}b - \cancel{a}b - \cancel{b}a + \cancel{b}a$$

$$= \cancel{(1-a)(1-b)} = 1 - \cancel{a}b - \cancel{a}b$$

$$\cos 11x - \sin 11x$$

$$(\cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \cos 3x - (\sin 11x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x - \sin 3x))$$

$$\cos 11x - \sin 11x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) = \sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-\cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x,$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x;$$

$$2 \sin \frac{14x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4} - 11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x,$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(-4x \right) = \cos 14x;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} (\cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\beta-\alpha}{2}) - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} (\sin \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\beta-\alpha}{2})$$

$$\cancel{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} - \cancel{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}} - 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y} = \frac{1}{y^{\lg 3}}$$

$$y^{\lg y} = 3^{\lg 3y}$$

$$\frac{\lg 3y}{\lg 3y} = \frac{2 \lg 3 + \lg y}{\lg 3 + \lg y}$$

$$\cancel{y^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3y}} = 3^{\lg 3y}$$

$$\cancel{y^{\lg 3}} = \left(\frac{y}{3}\right)^{\lg 3y}$$

$$(\log_3 y)(\lg 3 + \lg 3y) = \lg 3y,$$

$$\cancel{2 \lg 3 + 2 \lg 3y - \lg 3y} = 0, \quad \frac{2 \lg 3 + \lg y}{\log_3 3} = \log_3 3 + \log_3 y,$$

$$\frac{2 \lg 3 + \lg y - \log_3 3 \lg 3 - \log_3 3 \lg y}{\log_3 3} = 0,$$

$$2 \lg 3 + \lg y - \frac{1}{\log_3 y \log_3 10} - \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = 0,$$

$$\lg 3 - \log_3 3 \lg 3 + \lg y = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2\lg x y}, \quad (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0; \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$(1): \frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = (y^2)^{\lg x + \lg y}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3\lg x} = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$(2) \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; \quad \text{--- } x+y$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{2x} \cdot \frac{y}{\cancel{x}} - 4\cancel{x} - 3\frac{y^2}{\cancel{x}} + 12\frac{y}{\cancel{x}} = 0;$$

$$x^2 - 4x - 2xy + 12y - 3y^2 = 0,$$

$$x^2 - 2x(2+y) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{D}{4} = (2+y)^2 + 3y^2 - 12y = 4 + y^2 + 4y + 3y^2 - 12y =$$

$$= 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$$

$$y^{4\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \cdot 3^{\lg 3y},$$

$$\cancel{y^{4\lg 3y}} = \cancel{y^{2\lg 3y^2}} \cdot y^{4\lg 3 + 4\lg y} = y^{2\lg 3 + 4\lg y} \cdot 3^{\lg 3 + \lg y},$$

$$y^{4\lg 3} \cdot y^{4\lg y} = y^{2\lg 3} \cdot y^{4\lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y},$$

$$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}; \quad y^{\lg 3} = 3^{\lg 3y}$$

$$\log_3(y^{\lg 3}) = \lg 3y, \quad 2\lg 3 \log_3 y = \lg 3 + \lg y$$

$$\cancel{2\lg 3} = (\cancel{\log_3 3}) \cdot (\lg 3 + \lg y)$$

$$y^{2\lg 3 + 2\lg y} = 3^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^{\lg y},$$

$$y^{2\lg 3 + \lg y} = 3^{\lg 3 + \lg y}$$

$$y^{\lg 3} = \left(\frac{3}{y}\right)^{\lg 3 + \lg y}$$

$$y^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3 + \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot \cancel{3^{\lg y}}$$