МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

~~Понятно, что любое восьмизначное число, содержащее 0 подходит под условие.~~

~~Рассмотрим 2 случая:~~

~~1 случ.: В числе есть хотя бы один ноль.~~

~~Значит, мы выбрали один ноль и остаётся 7 мест для цифр, причём на одно из мест (первая цифра)~~

~~... * * * 0 * * ...~~

~~может идти только 9 чисел (за исключением 0), а на другие места 10 чисел. С учётом этого получаем, что таких чисел $9 \cdot 10^6$~~

~~2 случ.: в числе нет нуля. Тогда у нас есть 4 пятёрки и 3 тройки~~

Т.к. произведение цифр в числе равно $5^3 \cdot 3^3$, то ~~число~~ цифры 0 не может в числе.

Тогда у нас есть варианты:

1 случ.: 5,5,5,5,3,3,3,1 и все перестановки

Тогда способов $\frac{\cancel{8!}\ 5\cdot6\cdot7\cdot8}{\cancel{4!}\,\cancel{3!}\cdot\cancel{1!}} = 35 \cdot 8 = 280$

2 случ.: 5,5,5,5,3,9,1,1 и все перестановки.

способов $\frac{\cancel{8!}\ 5\cdot6\cdot7\cdot8}{2!\cdot\cancel{4!}\cdot\cancel{1!}\cdot\cancel{1!}} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = \underbrace{(6\cdot7)}_{42}\cdot\underbrace{(5\cdot4)}_{20} = 42\cdot20 = 840$

Заметим, что 5^4 мы не можем никак „получить", кроме как пятёрками (~~$5^4 : 5,\ 5^4 : 5^{2,3,4} > 10$~~) ($5^4 : 5$, $5^4 : 5^i$, где $i \in \{2;3;4\}$, но $5^i > 10$).

Также заметим, что 3^3 можно „получить" из 3, 3, 3 или 3, 9 (и 9, 3) по „аналогичной" логике ($3^3 > 10$) $\Rightarrow$ на этих 2 случаях исчерпаны все возможные варианты.

Итого: $840 + 280 = 1120$ таких чисел.

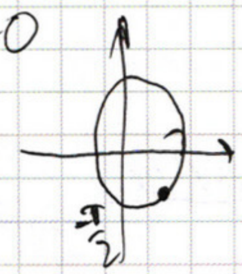
Ответ: 1120 чисел.

№2

$$\cos7x + \cos3x - \sqrt{2}\cos10x = \sin7x + \sin3x$$

$$(\sin7x - \cos7x) + (\sin3x - \cos3x) + \sqrt{2}\cos10x = 0$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cancel{\sqrt{2}}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cancel{\sqrt{2}}\cos10x = 0$$



~~Заметим~~ Замена: $\alpha = 7x - \frac{\pi}{4}$; $\beta = 3x - \frac{\pi}{4}$

$$\alpha + \beta = 10x - \frac{\pi}{2}$$

Заметим, что $\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 10x\right) = \cos10x$

Тогда исходное уравнение перепишется в вид:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 0$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = 0$$

$$\sin\alpha(1 + \cos\beta) + \sin\beta(1 + \cos\alpha) = 0$$

$$\sin\alpha\cdot 2\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin\beta\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{\alpha}{2}=0\\ \sin\frac{\beta}{2}=0\\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

Возврат: $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}+3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n,k,m\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi n\\ \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k\\ \frac{10x-\frac{\pi}{2}}{2}=\pi m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n,k,m\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{4}=2\pi n\\ 3x-\frac{\pi}{4}=2\pi k\\ 10x-\frac{\pi}{2}=2\pi m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n,k,m\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}7x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ 3x=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ 10x=\frac{\pi}{2}+2\pi m\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi m}{5}\end{array}\right.\\ n,m,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7};\ \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi m}{5}\ \middle|\ m,k,n\in\mathbb{Z}\right\}$

$$\sin\alpha\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\beta\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=0$$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\ \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{\alpha}{2}=0\\ \cos\frac{\beta}{2}=0\\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=0\end{array}\right.\ \xRightarrow{(\text{возврат})}\ \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\\ \cos\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\\ \sin\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}+3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n,m,k\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m\\ \frac{10x-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k,m,n\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi n\\ 3x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi m\\ 10x-\frac{\pi}{2}=\pi+2\pi k\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}7x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n\\ 3x=\frac{5\pi}{4}+2\pi m\\ 10x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.\\ k,m,n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}n,m,k\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}\\ x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3}\\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{5\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7};\ \frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi m}{3};\ \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}\ \middle|\ k,n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

№3

$$\left\{\begin{array}{ll}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)} & (1)\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0 & (2)\end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) ОДЗ: $\begin{cases} -x>0 \\ y>0 \\ -xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$

2) (2): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(4+y) + (8y - 2y^2) = 0$$

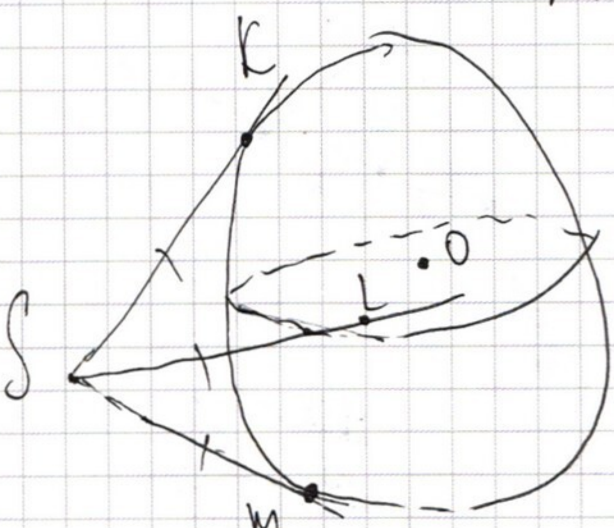
Заметим, что уравнение квадратное отн. x!

$D = (4+y)^2 - 4(8y - 2y^2) = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 =$
$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y)^2 - 2\cdot 3y \cdot 4 + 4^2 = (3y-4)^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-4-y+3y-4}{2} \\ x = \dfrac{-4-y-3y+4}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2y-8}{2} \\ x = \dfrac{-4y}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y-4 \\ x = -2y \end{array}\right.$

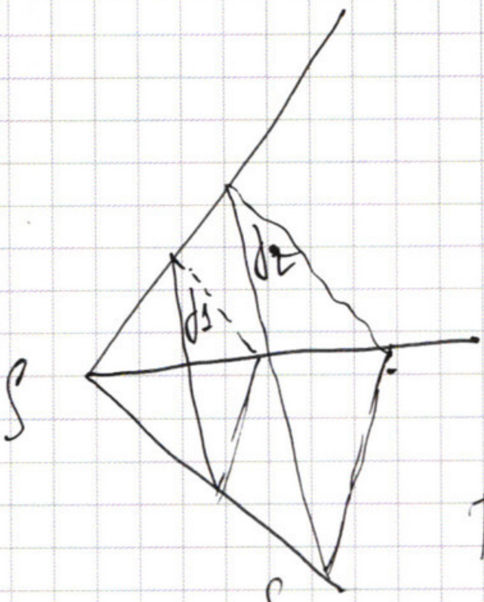
(Продолжение будет ниже)

№4



1) $SK = SL = SM$ (как отр. кас. из одной т.)

2) Пусть те пл-ти, которые $\perp$ прямой SO и касаются сферы — β_1 и β_2.



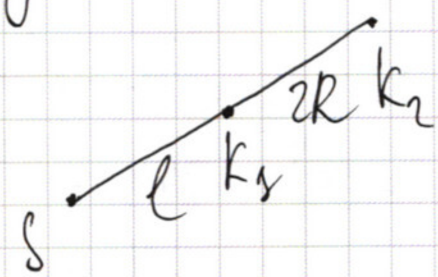
Заметим, что γ_1 и γ_2 пересекают SO в т. касания со сферой (иначе бы из т. O два перпендикуляра на одну и ту же пл-ть γ_i $i \in \{1; 2\}$).

Тогда т.к. $SO \perp \gamma_2$; $SO \perp \gamma_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_1 \parallel \gamma_2$. $\frac{S_{\gamma_1}}{S_{\gamma_2}} = \frac{4}{9}$ (без ограничения общности)

Пусть SO ~~пересекает~~ $\cap \gamma_1 = K_1$; $SO \cap \gamma_2 = K_2$

Пусть $SK_1 = l$; $K_1K_2 = d = 2R$

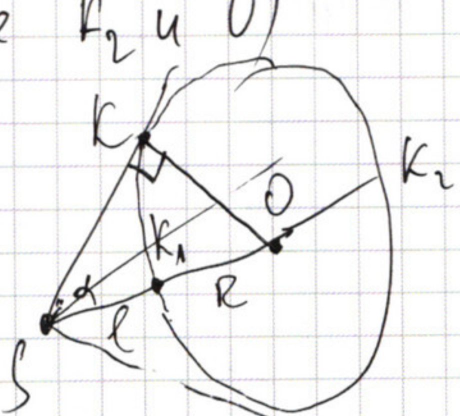


$\frac{SK_1}{SK_2} = \sqrt{\frac{S_{\gamma_1}}{S_{\gamma_2}}} = \frac{2}{3}$, т.е. $\frac{l}{l+2R} = \frac{2}{3}$

$\Downarrow$

$3l = 2l + 4R$, $\underline{l = 4R}$

В пл-ти KSK₁ (в ней же K_2 и O) по т. о квадрате кас.:



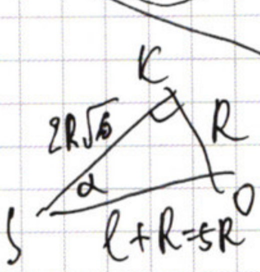
$SK^2 = SK_1 \cdot SK_2$

$SK^2 = l \cdot (l + 2R) = 4R(4R + 2R) =$

$= 4R \cdot 6R = 24R^2$; $SK = R\sqrt{24} = 2R\sqrt{6}$

Пусть $\angle KSO = \alpha$ | из $\triangle OKS$

$\sin\alpha = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

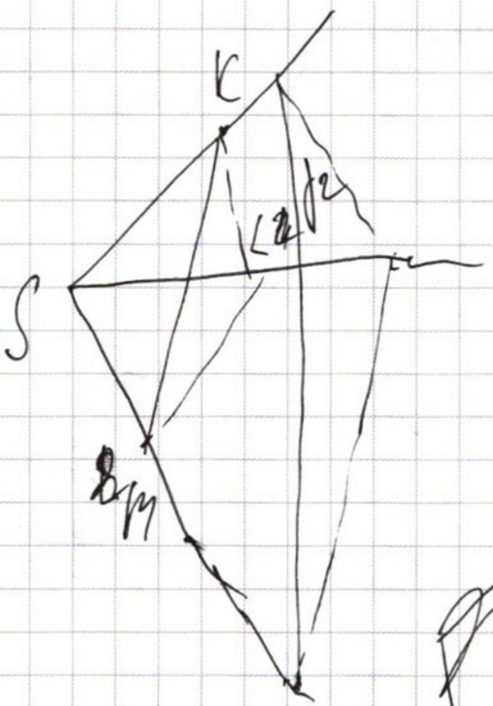


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Найдём $\frac{V_{SKLM}}{V_{\beta_2}}$~~

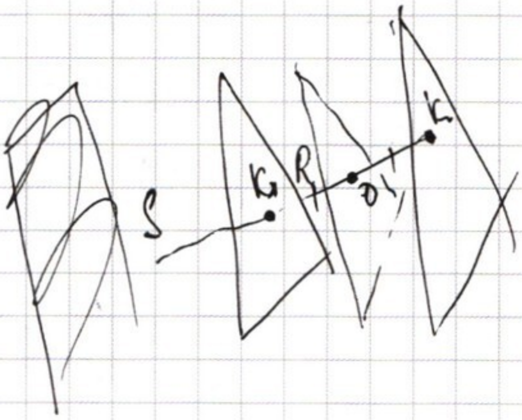
~~тетраэдр, содержащий пл-ть β_2 и т. S.~~

$\rho(S; KLM)$



Из гомотетии

$S_{KLM} = \frac{S_{\beta_1}+S_{\beta_2}}{2} = \frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$



№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81}-1)x & (2) \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad 85 + (3^{81}-1)x > 3^x + 4\cdot 3^{81}$

~~1) Пусть $x \geq 4$, то $\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 \end{cases}$~~

~~1) Заметим, что x не может быть > 4~~

1) Заметим, что x не может быть < 0

т.к. из (1): $y > 4\cdot 3^{81}$, а из (2): $y < 85$ (!)

2) $x = 0$ $(-)$

4) $x = 1,2,3$ $(-)$ → убеждаемся проверкой

$x, y \in \mathbb{Z}$ №7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases} \Rightarrow 85 + (3^{81}-1)x > y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$$

1) ~~ни 0,1,2~~ Понятно, что $x \geq 0$, иначе $\begin{cases} y > 4\cdot 3^{81} \\ y < 0 \end{cases}$

в убеждаемся $x \neq 0$ → проверкой

Рассм. ф-цию $f(x) = 85 + (3^{81}-1)x - 3^x - 4\cdot 3^{81}$

$$f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x \ln 3 \vee 0$$

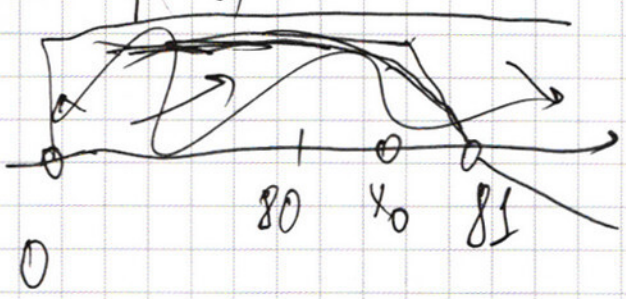
$\ln 3 > 1$, но $\ln 3 < 2$

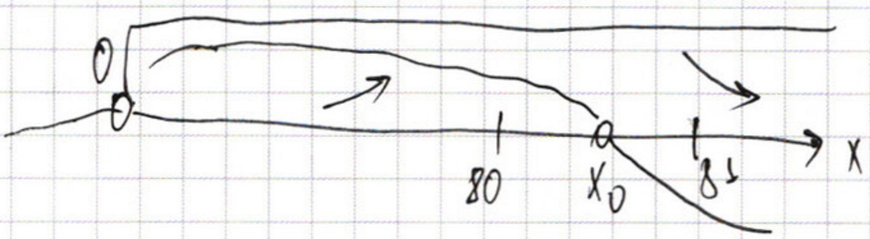
При $x \leq 80$: $f'(x) > 0$

При $x = 81$ $f'(x) < 0$

По т. Больцано-Коши (т.к. $f'(x)$ - непр. и на $(0; +\infty)$) ⇒

⇒ $\exists x_0 \in (80; 81)$: $f'(x_0) = 0$





ф-ция возр. на $[0; 80]$ и убывает на $[81; +\infty)$

$$f(85) = 85 + (3^{81}-1)85 - 3^{85} - 4\cdot 3^{81} =$$

$$= 81\cdot 3^{81} + \cancel{4\cdot 3^{81}} - \cancel{85} + \cancel{85} - 3^{85} - \cancel{4\cdot 3^{81}} = 0$$

~~f(86) < 0~~ $\forall x \in [85; +\infty)$: $f(x) \leq 0$ ⊖

Заметим, что $f(4) = 0 \Rightarrow \forall x \in [5; 84]$:

$f(x) > 0$ → подходит

Т.е. нам подходят все целые x ~~от~~ $\in [5; 84]$ → 80 зна-

☐ черновик ☒ чистовик Страница №8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

генит x $f(x)=85+(3^{81}-1)x-3^x-4\cdot 3^{81}$

Рассмотрим $f(x)+f(89-x)=$

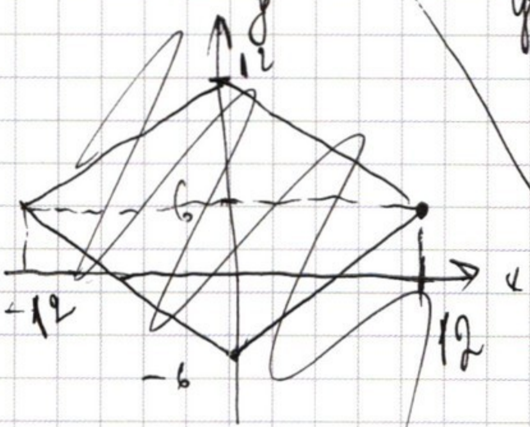
$=85+(3^{81}-1)x-3^x-4\cdot3^{81}+85+(3^{81}-1)(89-x)-3^{89-x}-$
$-4\cdot3^{81}=85-3^x-4\cdot3^{81}+\cancel{85}+89\cdot3^{81}-\cancel{85}-3^{89-x}-4\cdot3^{81}=$
$=85-3^x+81\cdot3^{81}-3^{89-x}$

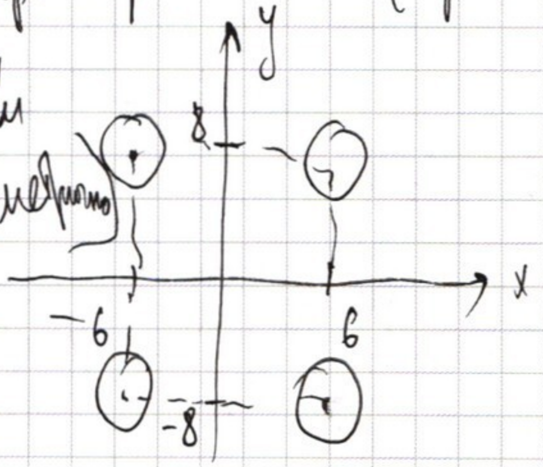
N 5

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 & (1)\\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (2)\end{cases}$$

(2): – уравнение 4 окр. при $a>0$ (при $a=0$ – 4 точки)

Построим (1): сначала раскроем модуль в одном из случаев далее симметрично





уравнение ромба

№ 3 (продолжение)

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = y - 4 \\ x = -2y \end{array}\right. \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}$$

Подставим по случаям

1 случ.: $x = -2y$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}; \quad \left(\frac{4y^2}{y}\right)^{2\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

не равны 0 ($y>0$)

$$(16y^2)^{\lg y} = (4y^2)^{\lg 2y}; \quad \cancel{(4y^2)^{\lg y}} \cdot y^{\lg y} = \cancel{(4y^2)^{\lg y}} \cdot (4y^2)^{\lg 2}$$

~~$y = 1 \Rightarrow x = -2$~~!

$$4^{\lg y} = (4y^2)^{\lg 2}$$

$\Downarrow$ $\cancel{0}$

2 случ.: $x = y - 4$

$$\left(\frac{y^2 - 8y + 16}{y}\right)^{\lg y} = (4 - y)^{\lg((4-y)y)}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)\end{cases}$$

(2): $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$

$x^2 + x(4+y) + (8y - 2y^2) = 0$

$D = (4+y)^2 - 4(8y-2y^2) = 16 + 8y + y^2 - 32y + 8y^2 =$

$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y)^2 - 2\cdot(3y)\cdot 4 + 16 = (3y-4)^2$

~~$x = 3y - 4$~~

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-4-y+3y-4}{2} \\ x = \frac{-4-y-3y+4}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-8+2y}{2} \\ x = \frac{-4y}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y-4 \\ x = -2y \end{array}\right.$$

$y=2$

$(x-(y-4))\cdot(x-(-2y)) = 0$

$(x-y+4)(x+2y) = 0$

$x^2 + 2xy - yx - 2y^2 + 4x + 8y = 0$

$x^2 + xy - 2y^2 + 4x + 8y = 0$

$4^{\lg y} = 4y^2$

1) $x<0$ $y>0$

$$\left[\begin{array}{l} x = y-4 \\ x \neq -2y \end{array}\right.$$

$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$\left(\frac{4y^2}{y}\right)^{2\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$

$(4y)^{2\lg y} = 2y^{2\lg 2y}$

$(16y^2)^{\lg y} = (4y^2)^{\lg 2y}$

$(16y^2)^{\lg y} =$

$\frac{(16y^2)^{\lg y}}{4y^2\cdot(4y^2)^{\lg y}} = \frac{4^{\lg y}}{4y^2}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x=y-4$
$[x=-2y$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}$

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y^2}$

$(16y^2)^{\lg y}=(2y)^{2\lg 2y}$

$(4y)^{2\lg y}=(2y)^{\cancel{2\lg 2y}+1+2\lg y}$

$|a|+|b|=12$

$\begin{cases}|x-6-y|=0\\|x-6+y|=12\end{cases}$

$x=6+y$
$[x-6+y=12$

$\begin{cases}x=6+y\\x=18-y\end{cases}$

$18-y=6+y$

$x=12$
$y=6$

$x-6+y=-12$

$\begin{cases}x+y=-6\\x=6+y\end{cases}$

$6+2y=-6$
$y=-6$
$x=0$

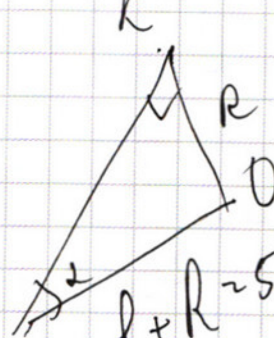
$x=-12;\ y=-6$

$\begin{cases}|x-6-y|=12\\|x-6+y|=0\end{cases}$

$x+y=6$

$\begin{cases}x-y=18\end{cases}$ SK $x-6$

$\begin{cases}x=12\\y=-6\end{cases}$



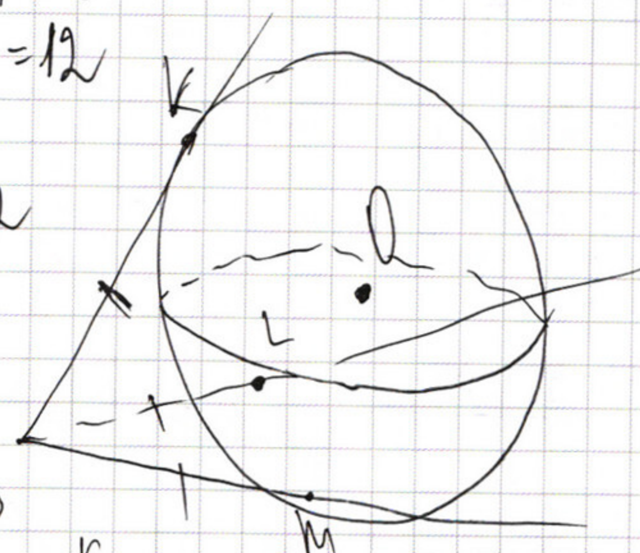
$\frac{1}{\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}=1$

$\sin\alpha=\frac{R}{5R}$

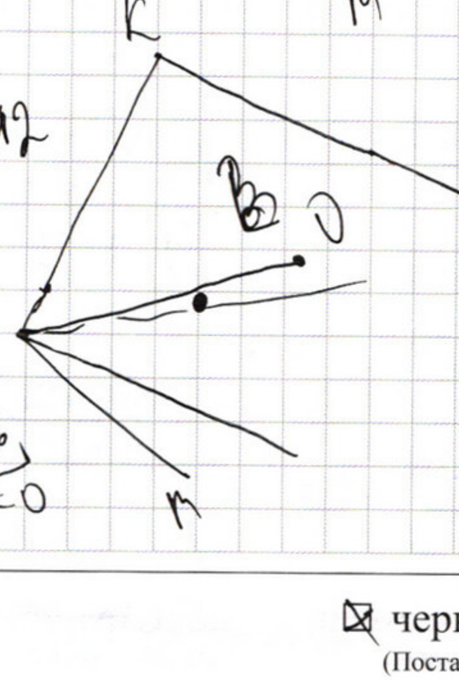
$l+R=5R$

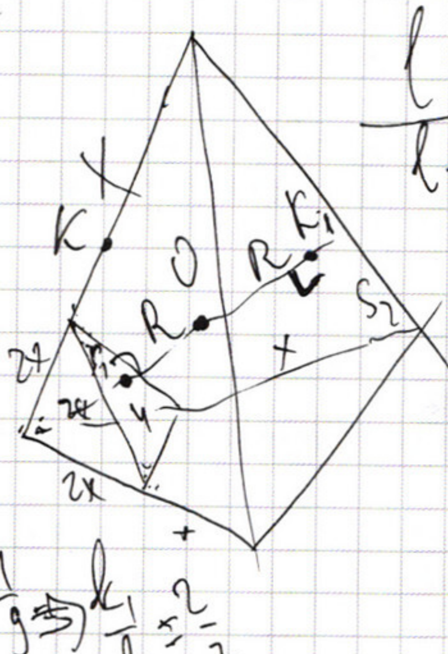
$=\frac{1}{5}$

$\alpha\neq\frac{\pi}{3}\neq$



Рассм. биссекторную пл-ть.





$\frac{l}{l+2R}=\frac{2}{3}$

$3l=2l+4R$

$l=4R$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{k_1}{k_2}=\frac{2}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$-\sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$-\cos 10x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$-\cos 10x = 2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}$

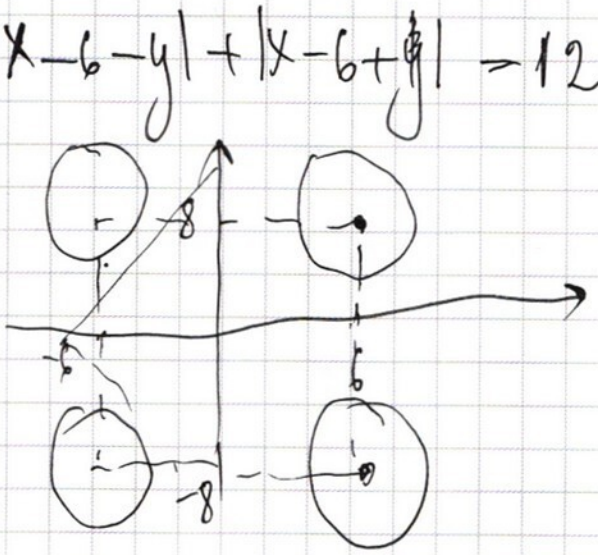
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$-\cos 10x = 2\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2x$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

<u>1 случ.</u>: $x \geq 0$, $y \geq 0$

$|x-y| + |x+y| = 12$



$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

1) 5, 5, 5, 5, 3, 9, ...

2) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3

3) 5, 5, 5, 5, 3, 6, 9

$$\boxed{\begin{cases} y \geq 3^x + 4a \\ y < 85 + (a-1)x \end{cases}}$$

$$\frac{7!}{4!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{} = 35$$

C

5, 5, 5, 5

9 $\quad \frac{}{8!}$

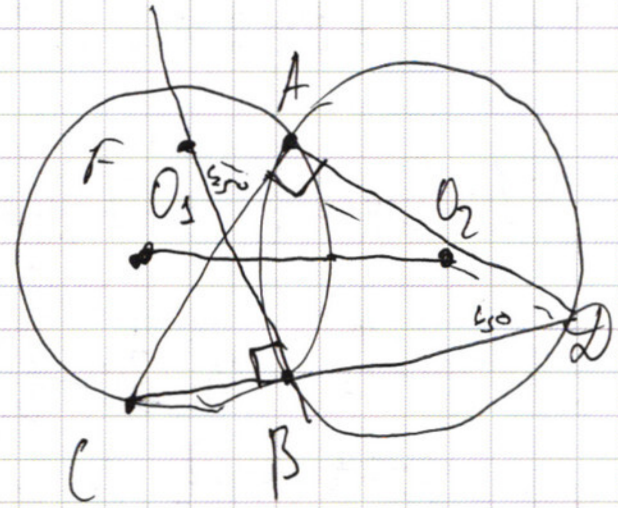
$\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\, 5\;\; 3\, 3\, 3}$

3^3

3, 6, 9

3, 3, 3

3, 9



$\angle CAD = 90^\circ$

Все числа, имеющие хотя бы один корень

№ 1

$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$

$168.75 = 5^2\cdot 5^2\cdot 3^3 = \underbrace{5^4\cdot 3^3}$

16875 | 5 → 3375

3375 | 5 → 675

16875 | 25 → 675

675 | 5 → 135

135 | 5 → 27

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 10x$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cancel{\sqrt{2}}\cos 10x$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 840 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \alpha$$

$$\frac{\pi}{4} + 3x = \beta$$

$$\alpha + \beta = 10x + \frac{\pi}{2}$$

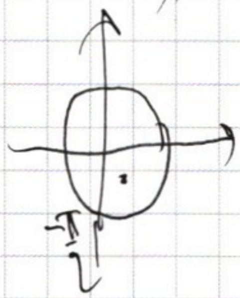
$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 8 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$-\sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}\left(\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\alpha = 7x - \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = 3x - \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = 10x - \frac{\pi}{2}$$



$$\sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 10x\right) = -\cos 10x$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha - \sin\beta = 0$$

$$(\sin\alpha - 1)\cos\beta + (\sin\beta - 1)\cos\alpha = 0$$

$$(1 - \sin\alpha)\cos\beta + (1 - \sin\beta)\cos\alpha = 0 \quad \Big| : \cos$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{array}\right.$$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos(10x) = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(10x+\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(10x+\frac{\pi}{4}\right)\right.$

$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4} - 7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\cos 10x = \sqrt{2}$

$\cos 4x - \sin 10x < 0$

$\cos\left(10x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 10x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\right.$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$

π

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$0 < 3x - \frac{\pi}{4} < \pi$

$2\cos 2x \sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 10x$

π

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right.$

$\sqrt{2}\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 10x = 0$

$\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0$

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 0$

$\sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 10x$

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = 0$

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1-\cos\alpha) = 0$

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$

$>0 \quad < 0 \quad >0 \quad >0$

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$\cos$

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) > 0$

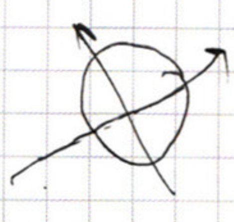
$\sin\alpha \cdot \sin\beta < 0$

$\left\{\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) > 0\right.$

$\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\geq 0 \qquad \leq 0$

$\sin\alpha(1-\cos\beta) = (\cos\alpha - 1)\sin\beta$

черновик ☐ чистовик Страница №___

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha(1-\cos\beta)+\sin\beta(1-\cos\alpha)=0$

$\sin\alpha\, 2\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin\beta\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$

$4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=0$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=0\right.$

$\sin(10x-\frac{\pi}{2})=\sin 10x\cdot\cos(-\frac{\pi}{2})+\cos 10x\cdot\sin(-\frac{\pi}{2})=-\cos 10x$

$1-\cos 2\theta=1-(2\cos^2\theta-1)=1-(1-2\sin^2\theta)=2\sin^2\theta$

$1+\cos 2\theta=1+(2\cos^2\theta-1)=2\cos^2\theta$

$\sin\alpha\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\beta\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=0 \quad x=\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$

$\sin(3x-\frac{\pi}{4})\left(1+\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\right)+\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1+\cos(3x-\frac{\pi}{4})\right)=0$

$\sin\left(\frac{9\pi}{20}-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi k}{5}\right)\left(1+\cos\left(\frac{21\pi}{20}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{5}\right.\right.$

$\sin\frac{\pi}{5}$

$(x^2+xy+\frac{y^2}{4})+4x+8y-\frac{9}{4}y^2$ $(\frac{3}{2}y)^2$

$(x+\frac{1}{2}y)^2$

$2y^2-xy-x^2-4x-8y=0$

$x^2+4x+8y+xy-2y^2=0$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}; \quad -xy = x^2 + 4x + 8y - 2y^2$$

ОДЗ: $-x > 0 \Rightarrow x < 0$

$y > 0$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$-xy > 0$ (+)

$-2(y^2-$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = -x$$

$$-xy = (x^2+4x+4) - 2(y^2-4y) - 4$$

$\lg = \log_{10}(-xy)$

$$-xy = (x+2)^2 - 2(y-2)^2 + 4$$

$D - ?$

$$y^{\lg\frac{x^4}{y^2}} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \mid \times 2$$

$$x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$4y^2 - 2xy - 2x^2 - 8x - 16y = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 - 4(8y - 2y^2) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y)^2 - 2\cdot 3y\cdot 4$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) - 3x^2 + 3y^2 - 8x - 16y = 0$$

$$2y^2 - xy - 8y - x^2 - 4x = 0$$

$$2y^2 - (x+8)y - (x^2+4x) = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8(x^2+4x) = 9x^2 + 48x + 64$$

$$= (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 8 + 64$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

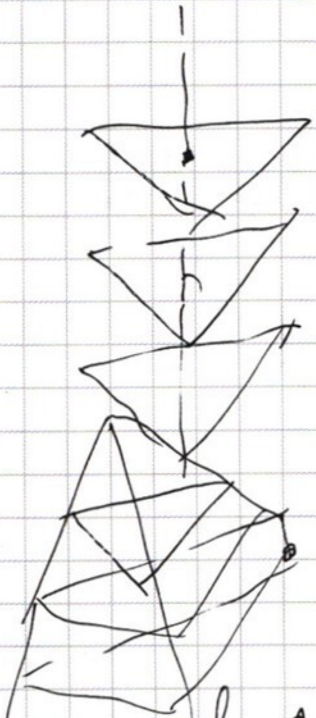
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

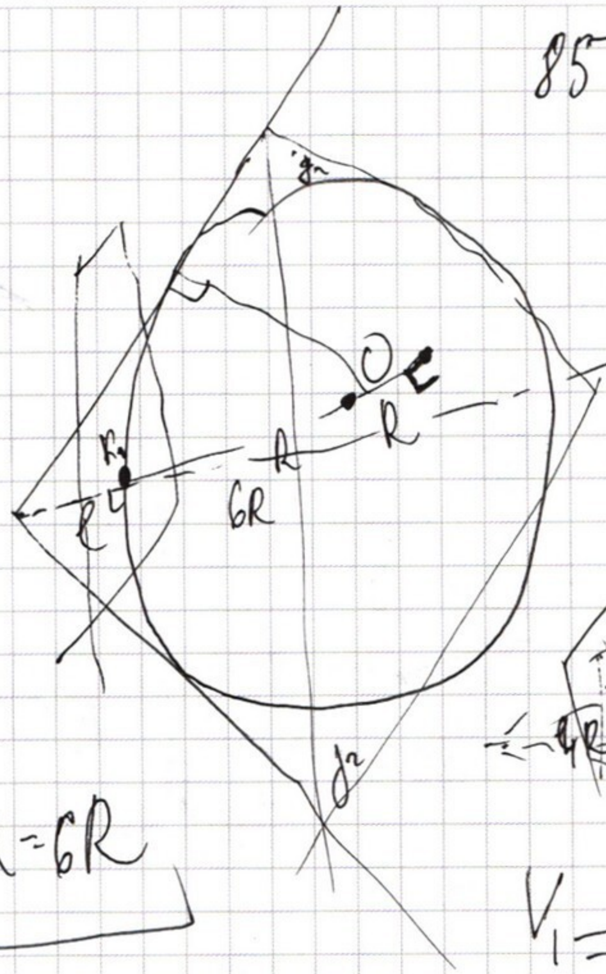
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$85+(3^{85}-1)x > 3^x + 4\cdot 3^{81}$

1) $y < 3^{81} - 1 + 85 = 3^{81}+84$

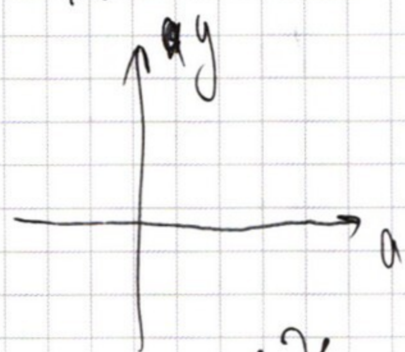
2) $y > 4\cdot 3^{81}+3$





$l + 2R = 6R$

$V_1 =$



$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$|a-y| + |a+y| = 12$

$y, x \in \mathbb{Z}$

$x = 3$

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$

Пусть $y > 4\cdot 3^{81}$

1) т.е. $x < 4$

~~3) $x = 1, 2, 3$~~

3) $x = 0$ ⊖

4) $x = 1$

а) $y \geq 3 + 4\cdot 3^{81}$

б) $y < 85 + 3^{81} - 1$

$84 + 3^{81}$

$x = 1$

2) $x < 0$ ⊖, т.к. $\begin{cases} y < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ ⊗

$\begin{cases} y \geq 27 + 4\cdot 3^{81} \\ y < \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$85 + (3^{81} - 1)$

$(3^x)' = 3^x \ln 3$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

$f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} \vee 0$

$f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x \underbrace{\ln 3}_{>1, <1,5} \vee 0$

$f(81 - x) + f(x)$

$\cancel{85 + (3^{81} - 1)}$

$85 + 3$

$f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$

При $x \le 80$

При $x = 81 < 0$ 3^{80}

$f(x) + f(85 - x) =$

$= 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} + 85 + (3^{81} - 1)(85 - x) - 3^{81-x} + 4 \cdot 3^{81}$

$f(100)$

$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

При $x = 81$: $81(3^{81} - 1)$ $5 \cdot 3^{81}$

$+85$

$f($ $3^{x-81} \cdot 3^{81} = 3^{81}(3^{x-81} + 4) \le 4 \cdot 3^{81}$

$f(100)$ 3

$3^x > 3^{81} \cdot x$

$f(4)$

$85 + (3^{81} - 1)4 - 3^4 - \cancel{4 \cdot 3^{81}} =$

$= 0$

$4 \leftrightarrow 85$ $x = 85$ $3^{85} = 3^{81} \cdot 3^4$ 81

$f(x) + f(44 -$

$3^{86} = 3^{81} \cdot 243 \vee 3^{81} \cdot 86$

$81 / 2$

8 44

$85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} + 85 + (3^{81} - 1)(x + 81)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)