

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$(\cos 9x + \sin 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} ① \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ ② \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ② \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$

№3.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^7} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0, y > 0$$

$$\begin{cases} ② y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \\ ① (x^2 y)^{\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$$

$$y^{3\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}$$

Т.к. $f(t) = \ln t$ — мон. возр. ф-ция

$$\ln(y^{3\ln x}) = \ln(y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x})$$

$$3\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y + 2\ln^2 x, \text{ пусть } \ln x = u, \ln y = v$$

$$2u^2 - 3uv + v^2 = 0$$

$$(u-v)(2u-v) = 0$$

$$\begin{cases} u=v \\ 2u=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ \ln x^2 = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=y \end{cases}$$

$\textcircled{2}$

$$\begin{cases} x=y \\ x^2-x^2=2x^2+8x-4x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=y \\ x^4-x^3-2x^2+8x-4x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x=0 \\ x=y \\ x^4-x^3-6x^2+8x=0 \\ x^2=y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ (не носк по ОДЗ)} \\ x=2 \\ y=2 \\ x=0 \text{ (не носк по ОДЗ)} \\ x^3-x^2-6x+8=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ (x-2)(x^2+x-4)=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=4 \\ x^2+x-4=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ y=4 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не носк} \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ y=4 \\ x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0 \\ y = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

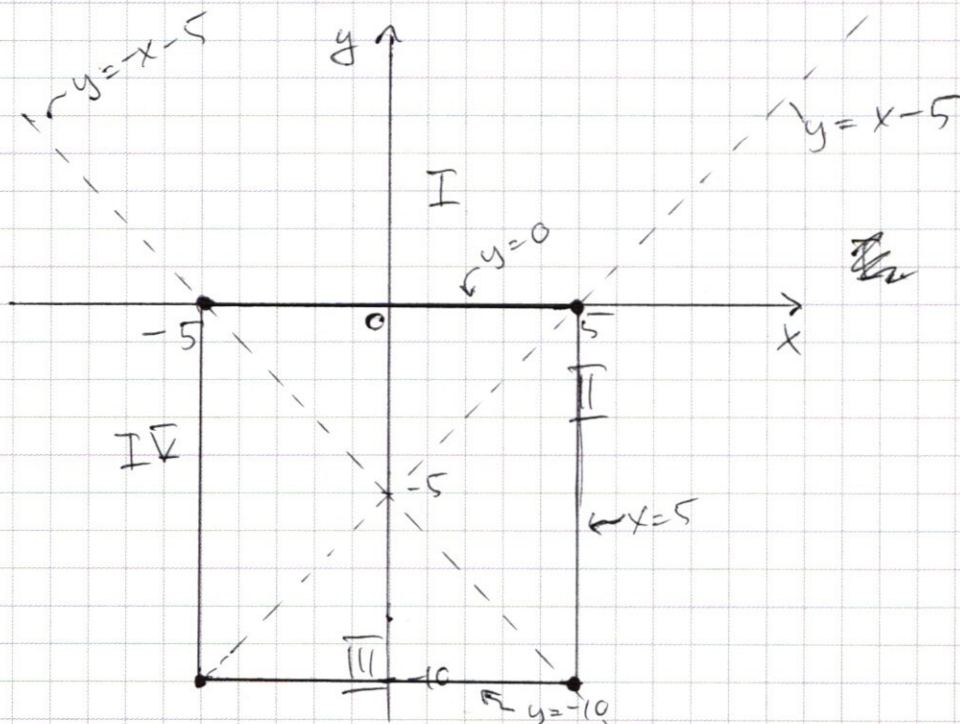
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.

$$① |y - (-x - 5)| + |y - (x - 5)| = 10$$

$$② (x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$$

изобразим ① мн-во на плоскости $(x; y)$



$$I. y + x + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y = 0$$

$$II. \cancel{y + x + 5} - \cancel{y + x + 5} = 10$$

$$x = 5.$$

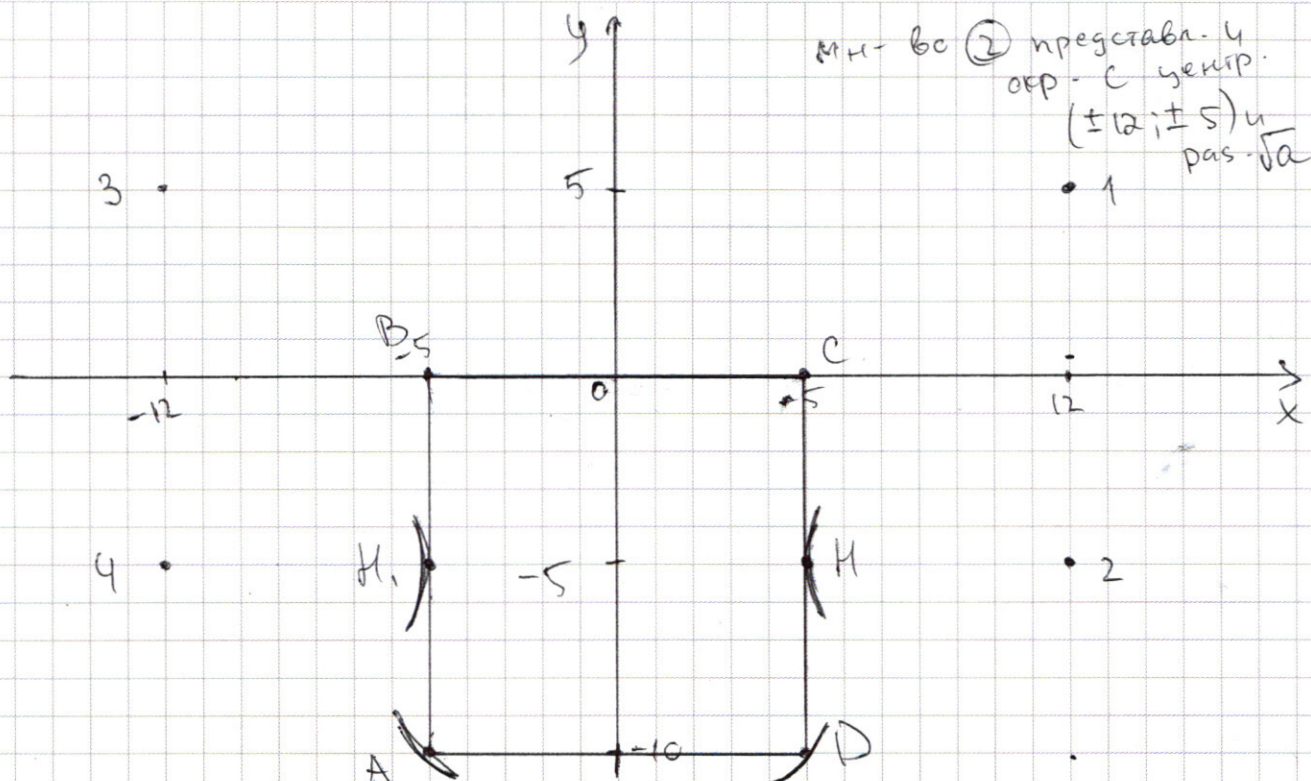
$$III. \cancel{-x - y - 5} - \cancel{y + x - 5} = 10$$

$$y = -10$$

$$IV. -\cancel{x - y - 5} + \cancel{y - x + 5} = 10$$

$$x = -5.$$

Теперь изобразим оба мн-ва на коорс. пл-сти



① окр. с центр. 2 и 4 касаются квадрата в т. H
и H₁ соотв.
 $\sqrt{a} = 7, a = 49$

② окр. с центр. 1 и 3 ~~кас.~~ кас. к квадр. в т.
 $\sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 17^2}, a = 15^2 + 17^2 =$ A и D соотв.
 $= 225 + 289 = 514$

а) когда окружность из
окружностей пересекает квадрат в 2 и более точках,
то решений больше 2, т.к. найдётся окружность, сим. ей
и такая пересек. квадрат.

б) если квадрат перес. и окр. 1, и окр. 2, но касая
в 1 точке, то решений всё равно больше 2, т.к.
окр. 3 и 4 также пересек. квадрат.

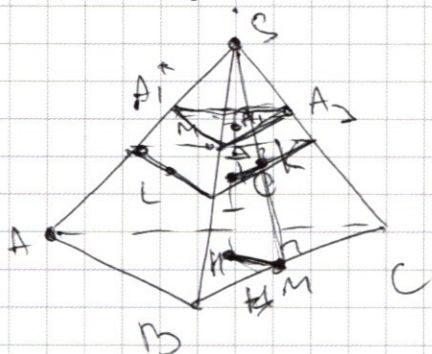
⇓
решений больше нет

Ответ: 49; 514.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.

Представим данный угол в виде пирамиды с вершиной S и плоскостью осн. ABC , перп. SO



H - центр впис. сфр в

$$\Delta ABC, S_{ABC} = 16$$

$A_1A_2A_3$ - второе сеч, ~~касая~~ касая
сферы $\Rightarrow S_{\Delta A_1A_2A_3} = 1$

Поскольку все свугр.
углы при основании
равны, возьмем к на SBC

Рассм. ΔSHM



$$\frac{H_1M_1}{HM} = \sqrt{\frac{S_{A_1A_2A_3}}{S_{ABC}}} = \frac{1}{4} = \frac{SH_1}{SH} \Rightarrow \frac{SH_1}{H_1H} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

Пусть радиус сферы R , тогда

$$H_1H = 2R, SH_1 = \frac{2R}{3}$$

$$SO = \frac{2R}{3} + R = \frac{5R}{3}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{OK}{OS} = \arcsin \frac{3}{5}$$

O' - точка, где сеч.

угла α - сфр KLM перес SO

$$\angle OKO' = \angle KSO \Rightarrow OO' = KO \cdot \sin \angle KSO = R \cdot \frac{3}{5} = \frac{3R}{5}$$

$$SO' = SO - OO' = \frac{5R}{3} - \frac{3R}{5} = \frac{16R}{15}$$

$$SH = SO + R = \frac{8R}{3}$$

$$\frac{SO'}{SH} = \frac{O'K}{HM} = \sqrt{\frac{S_{сеч}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{16R}{15}}{\frac{8R}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{сеч} = \frac{4}{25} \cdot S_{ABC} = \frac{4}{25} \cdot 16 = \frac{64}{25} = 2 \frac{14}{25} = 2,56$$

Ответ: ~~2,56~~ $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}, S_{сеч} = 2,56$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Может заметить, что $x_1 = 6$ ~~не~~ $(2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12)$
сверху

Но он не входит во мн-во, т.к. ~~пер-во~~ ~~строгое~~ ~~пер-во~~

Предположим ~~оценки~~ ~~найдём~~ ~~такие~~ ~~что при~~
 x_2 ~~$f_1(x_2) < f_2(x_2)$~~ , а при x_3 ~~$f_1(x_3) > f_2(x_3)$~~

При $x = 8$ ~~при $x = 7$~~

~~$$f_1(x) = 2 + 6 \cdot 2^{33}$$~~

~~$$f_2(x) = 76 + 7 \cdot 2^{33} - 14$$~~

~~$\Rightarrow x = 7$ подходит~~

~~При $x = 8$~~

~~$$f_1(x) = 2 + 3 \cdot 2^{34}$$~~

~~$$f_2(x) = 76 + 4 \cdot 2^{34} - 16$$~~

~~f~~

~~$$f_2(x) - f_1(x) =$$~~

~~$$= 2^{33} \cdot (28 + 76 - 14) > 0 \Rightarrow$$~~

Предположим найти
такие ~~x_2, x_3~~ ~~такие~~ ~~что~~

~~$$f_1(x_2) < f_2(x_2), \text{ а } f_1(x_3) > f_2(x_3)$$~~

При $x = 38$

$$f_1(x) = 2^{34} \cdot 19$$

$$f_2(x) = 76 - 76 + 2^{34} \cdot 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(38) = f_2(38) \Rightarrow x_2 = 38$$

Стметим, что $x \in \mathbb{Z}$ только тогда, когда $x \in \mathbb{Z}$ и $x \geq 0$
(от 1 пер-во)

~~Верно все x~~ $\Rightarrow$ Есть решение для x от 7 до 37

~~Всего y где x всего пар:~~

$$N = f_2(7) - f_1(7) + f_2(8) - f_1(8) + \dots + f_2(37) - f_1(37)$$

$$F_2 = f_2(7) + f_2(8) + f_2(9) + \dots + f_2(37) = 76 \cdot 31 + (2^{33} - 2) \cdot \left(\frac{7 + 37 \cdot 31}{2} \right)$$

$$F_1 = f_1(7) + f_1(8) + \dots + f_1(37) = 3 \cdot 2^{34} \cdot 31 + 2^7 \left(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{27} \right) =$$

$$= 3 \cdot 31 \cdot 2^{34} + 2^7 \cdot \frac{2^{28} - 1}{1} = 3 \cdot 31 \cdot 2^{34} + 2^{35} - 2^7$$

$$F_2 - F_1 = (76 \cdot 31 + 2^{33} \cdot 22 \cdot 31 - 44 \cdot 31) -$$

$$- (93 \cdot 2^{34} + 2^{35} - 128) =$$

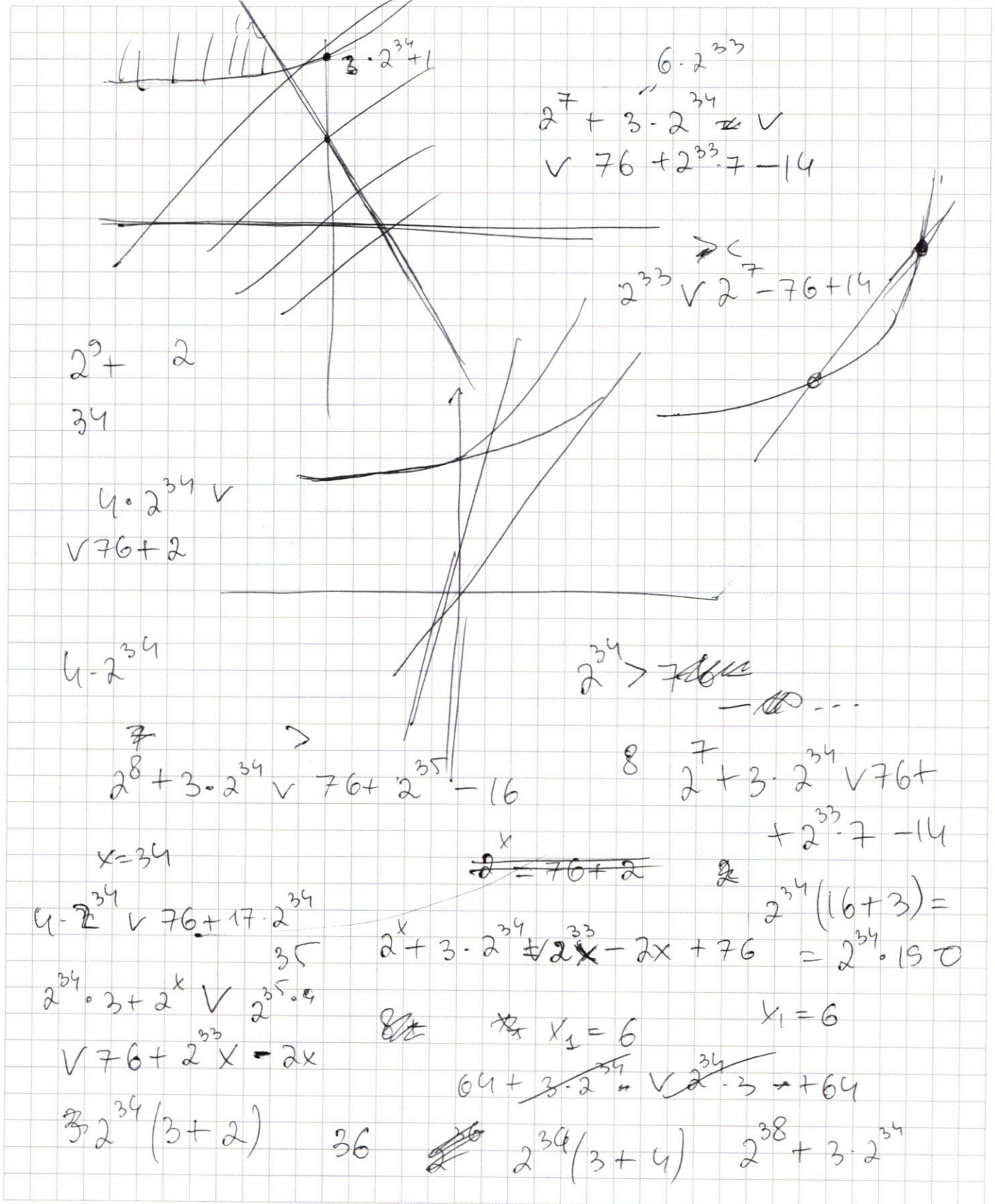
$$= 32 \cdot 31 + 2^{33} \cdot 22 \cdot 31 - 93 \cdot 2^{34} - 2^{35} + 128 =$$

$$= 32 \cdot 31 + 128 + 2^{34} (11 \cdot 31 - 93 - 2) =$$

$$= (1024 - 32) + 128 + 2^{34} \cdot 246 = 1116 + 2^{34} \cdot 246$$

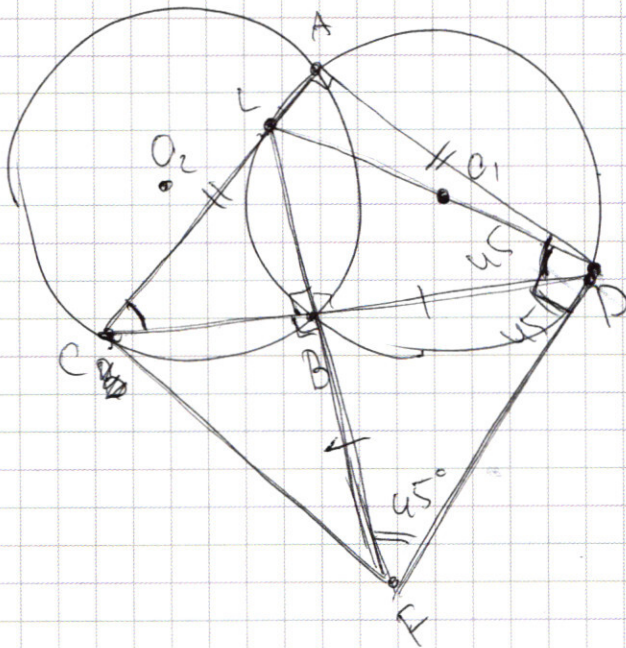
$$\text{Ответ: } 1116 + 2^{34} \cdot 246$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N6.

a)



① Пусть

$AC \cap \text{окр}(O_1) =$
 $= L, \angle LAD = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow LD - \text{диаметр} \Rightarrow$

$\Rightarrow L \in \text{перпендикуляра}$
 $\perp BD;$

② $AB(\text{окр } 1) = AB(\text{окр } 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDA = \angle PCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CAD - \text{прям.}$

$\Rightarrow \angle ACD = 45^\circ =$

$\angle ADC, \text{ но } \angle FDB =$

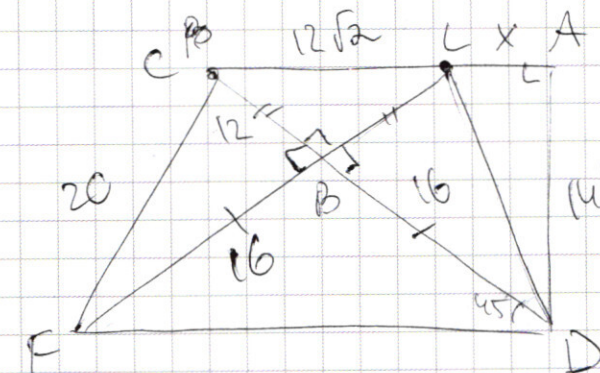
$45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CADF - \text{трапеция} \Rightarrow CLDF - \text{прям. трапеция} \Rightarrow$

$\Rightarrow LD = CF = 20$

Ответ: $CF = 20$

б) $BC = 12 \Rightarrow CL = 12\sqrt{2}$



Рассм. $\triangle CBF$, см н/у

$BF = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = 12 + 16 = 28$

$AD = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}, FD = 16\sqrt{2}$

$\triangle ACD \sim \triangle CBL \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AC$, пусть

$CL = x$, тогда $AD =$
 $= 12\sqrt{2} + x$

$\frac{CB}{AD} = \frac{CL}{CD}$
 $\frac{12}{14\sqrt{2}} = \frac{x}{28}$
 $AD = \frac{28}{\sqrt{2}}$



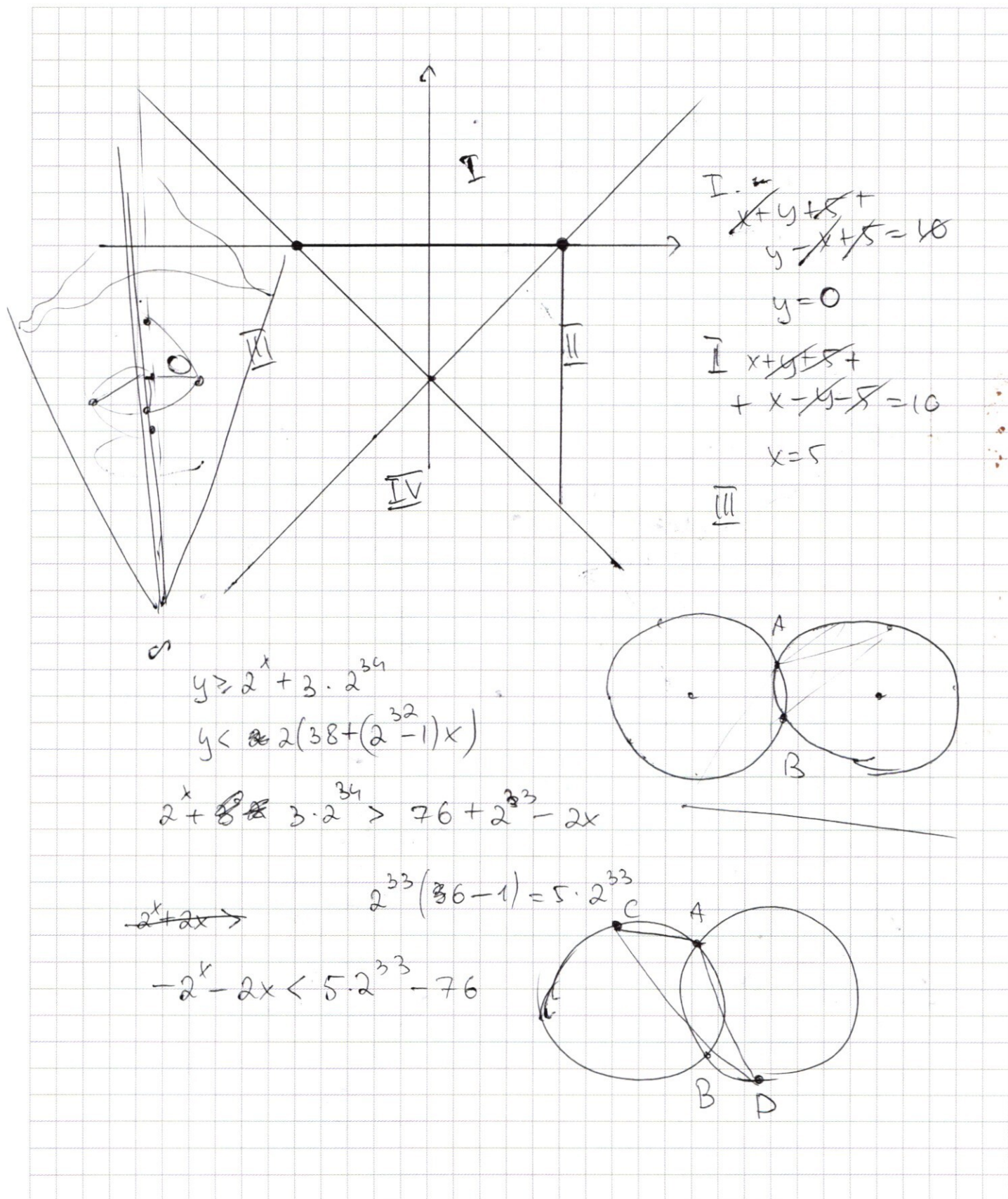
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

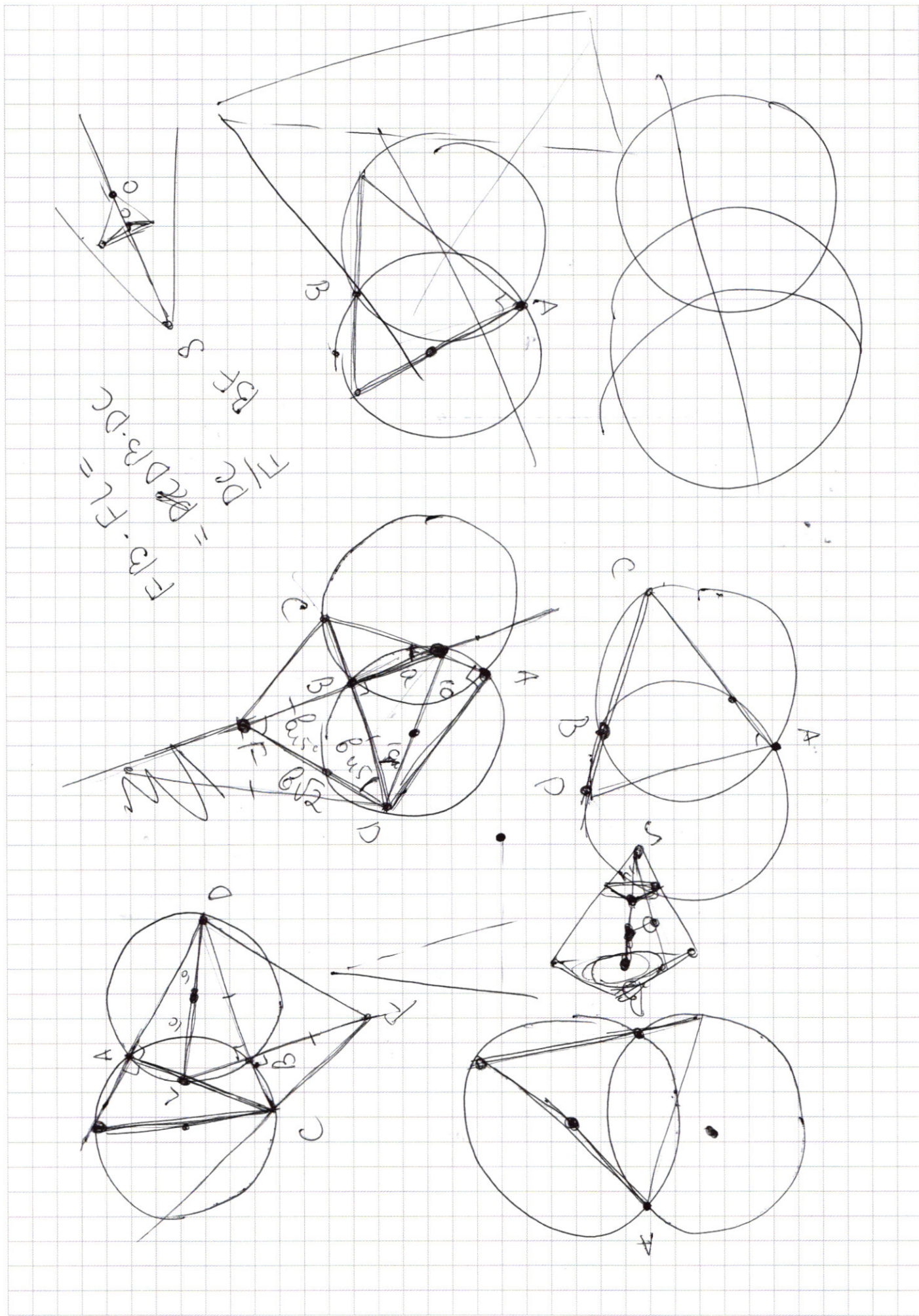
$$S_{\Delta ACF} = S_{FCAD} - S_{\Delta FAD} = \frac{14\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} \cdot 14\sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2}}{2}$$

$$= 30 \cdot 14 - 16 \cdot 14 = 15 \cdot 14 = 196 + 14 = 210$$

Ответ: $S = 210$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{array}{r} 926 \overline{) 3087} \\ 9 \overline{) 026} \\ 24 \\ \underline{-26} \\ -24 \\ \underline{-24} \\ 21 \end{array}$$

$$3087 \overline{) 3}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 1029} \\ 12 \\ \underline{-11} \\ 9 \end{array}$$

$$7^3 \cdot 3^3$$

~~код-60~~
~~код~~

г. Каборн

$$\{7; 7; 7; 3; 3; 3\} \quad \{7; 7; 7; 9; 3\}$$

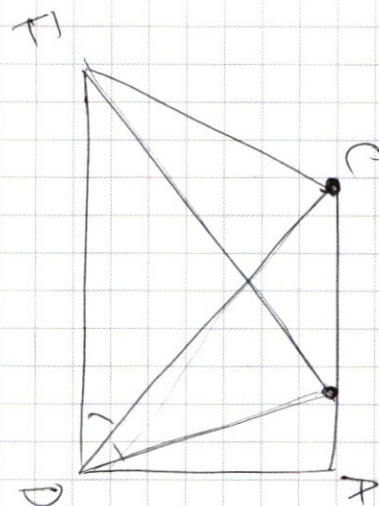
№7.

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76$$

$$343 \approx 3 \cdot 81$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 17} \\ 28 \overline{) 343} \\ 63 \end{array}$$



№2.

$$\cos 9x - \cos 5x$$

$$2 \cos 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} =$$

$$= 2 \sin 7x (1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x) - \sqrt{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\frac{2\sin 7x (\sin 2x - \cos 2x)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\textcircled{1} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\textcircled{2} \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\{7, 7, 7\}$$

N3.

$$x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\frac{-2\ln x}{x} \cdot y = \frac{\ln y}{y}$$

$$y^{3\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}$$

$$3\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y + 2\ln^2 x$$

$$2\ln x = \ln y$$

$$\ln y = v$$

$$\ln x = \ln y, x = y$$

$$2\ln x = \ln y$$

$$x^2 = y$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 343} \\ -686 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + x - 4)$$

$$\{7, 7, 7\}$$

$$2u^2 - 3uv + v^2 = 0$$

$$D = 9v^2 - 8v^2 = v$$

$$u_{1,2} = \frac{3v \pm v}{4} \rightarrow \frac{V}{2}$$