# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

**Бланк задания должен быть вложен в работу.**
**Работы без вложенного задания не проверяются.**

1. **[3 балла]** Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. **[5 баллов]** Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. **[5 баллов]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** Сфера с центром $O$ вписана в трёхгранный угол с вершиной $S$ и касается его граней в точках $K$, $L$, $M$ (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол $KSO$ и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью $KLM$, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой $SO$, равны 1 и 16.

5. **[5 баллов]** Найдите все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. **[6 баллов]** а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF = BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника $ACF$.

7. **[6 баллов]** Найдите количество пар целых чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos(9x)-\cos(5x)-\sqrt{2}\cos(4x)+\sin(9x)+\sin(5x)=0$$

$$-2\sin(7x)\sin(2x)+2\sin(7x)\cos(2x)=\sqrt{2}\cos(4x)$$

$$2\sin(7x)\cdot(\cos(2x)-\sin(2x))=\sqrt{2}(-\sin^2(2x)+\cos^2(2x))$$

$$2\sin(7x)\cdot(\cos(2x)-\sin(2x))=\sqrt{2}(\cos(2x)-\sin(2x))(\cos(2x)+\sin(2x))$$

$$(\cos(2x)-\sin(2x))(2\sin(7x)-\sqrt{2}\sin(2x)-\sqrt{2}\cos(2x))=0.$$

1) $\cos(2x)-\sin(2x)=0$

$\operatorname{tg}(2x)=1$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$

2) $2\sin(7x)-\sqrt{2}(\sin(2x)+\cos(2x))=0$

$\sin(2x)+\cos(2x)=$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2x)\right)=$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

продолж

2) $2\sin(7x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$2\left(\sin(7x)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0$

$\cancel{\sin(7x)=0}$ $\quad$ $\cancel{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0}$

$\cancel{7x=\pi k}$ $\quad$ $\cancel{2x+\frac{\pi}{4}=\pi k}$

$\cancel{x=\frac{\pi}{7}k}$ $\quad$ $\cancel{x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k}$

~~Ответ~~. $\sin\left(\frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0$

$\sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0$ $\quad$ $\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}=\pi k$ $\quad$ $\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi k$

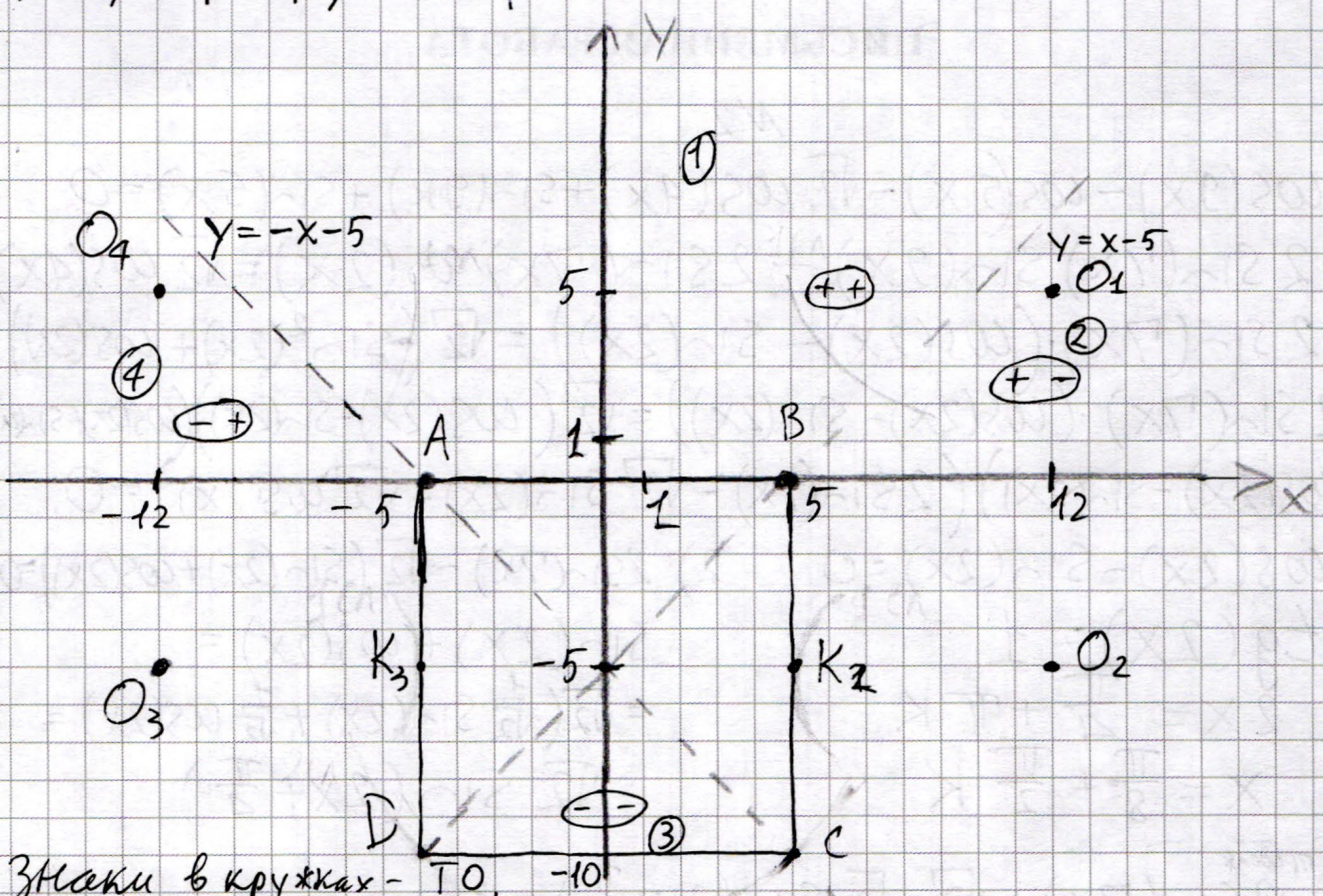
$x=\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k$ $\quad$ $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi k$

5

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k;\ \frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi k\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

№5

$$\begin{cases}(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a \\ |x+y+5|+|y-x+5|=10\end{cases}$$ ровно 2 реш.




Знаки в кружках — то, с каким знаком раскроется модуль $|x+y+5|$ и $|y-x+5|$

① $x+y+5+y-x+5=10$

$2y=0 \Rightarrow y=0.$

② $x+y+5-y+x-5=10$

$2x=10 \Rightarrow x=5$

③ $-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y=20 \Rightarrow y=-10$

④ $-x-y-5+y-x+5=10$

$-2x=10 \Rightarrow x=-5$

Итак II-е уравнение задаёт квадрат со стороной 10

а I-е уравнение задает 4 ок-ти радиусом $\sqrt{a}$

и центрами в точках: $(12;5)$, $(12;-5)$, $(-12;5)$, $(-12;-5)$

Случай 1: $O_2$ и $O_3$ касаются квадрата в $K_2$; $K_3$, $O_1$ и $O_4$ не достают до него

тогда $\sqrt{a}=r=12-5=7$ $a=49$

Случай 2: $O_1$ и $O_4$ проходят через $D$ и $C$; $O_3$ и $O_2$ не пересекают квадрат

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $r^2 = 17^2 + 15^2 = 514 =$

Ответ: $a \in \{49; 514\}$

№ 3.

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0; y > 0$

$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$

по т. Виета $y_1 + y_2 = x + 4$ $\quad y_1 = 2x$

$y_1 \cdot y_2 = 2x(-x+4)$ $\quad y_2 = -x+4$

~~①~~ $\cancel{(y-2x)(y+x-4) = 0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -x+4 \end{array}\right.$ 1

$\cancel{1)\ y = 2x}$

$\cancel{(x^2\,16x^4)^{-\ln x} = 2x^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}}$

$\cancel{(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2/x^6)}}$

$\cancel{a^{\ln b} = b^{\ln a}}$ ~~- св-во логарифмов~~

$\cancel{(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln(2x)}}$

$\cancel{(16x^6)^{-\ln x} = \left(\left(\frac{x^6}{2}\right)^{\ln 2}\right)^{-\ln x}}$

$\cancel{16x^6 = \left(\frac{x^6}{2}\right)^{\ln 2}}$

Преобразуем 1-е уравнение:

$\ln\left((x^2y^4)^{-\ln x}\right) = \ln\left(y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}\right)$

$-\ln x(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$

$\ln x = u \quad \ln y = v$

$-2u^2 - 4uv = v^2 - 7uv$

~~$x^2-3$~~ $v^2-3uv+2u^2=0$

$(v-u)(v-2u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=2u \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln y=\ln x \\ \ln y=2\ln x \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2 \end{array}\right.$ ②

из условий ① и ②:

$\begin{cases} y=2x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ не уд. ОДЗ.

$\begin{cases} y=2x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=2x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)=0 \\ y=x^2 \end{cases} \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-x+4 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=x^2 \end{cases} \begin{cases} x^2=-x+4 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-4=0 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\overset{x>0}{\Rightarrow} \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{18-2\sqrt{17}}{2}=9-\sqrt{17} \end{cases}$

Ответ: $(2;4);(2;2);\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2};9-\sqrt{17}\right)$ 5

№1

$9261=3^3\cdot 7^3$, выходит, что восьмизначные числа будут состоять из

2 „1" 3 „3" 3 „7"

~~чтобы посчитать~~ посчитаем сначала, скольками сп. можно расставить 3 „3" и 3 „7" 333777 1 случай

$C_6^3$

Теперь посчитаем, скольками способами можно между ними переставить 2 „1" $\underline{333777}$ 11: $C_8^2$

Ответ:

по правилу произведения искомое число: $C_6^3\cdot C_8^2=\boxed{560}$

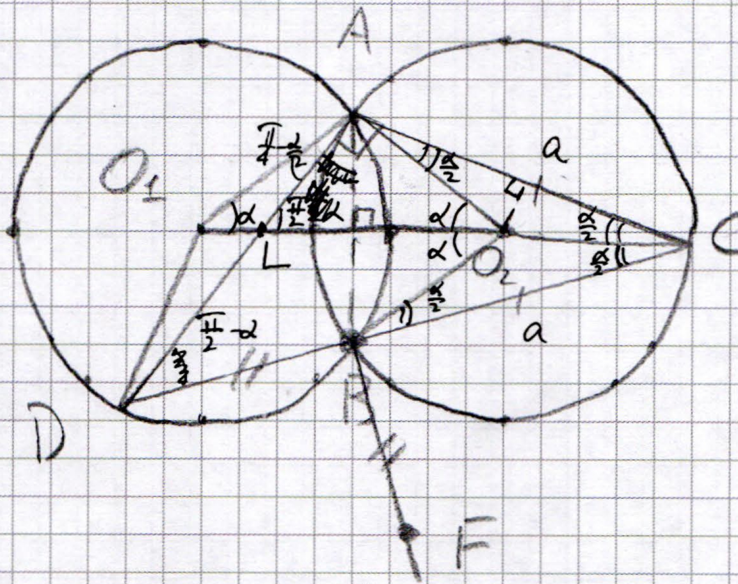
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$R=10$




Пусть $\angle AO_1O_2=\alpha$ $O_1$ $O_2$ - центры ок-тей
тогда т.к. $AO_2=AO_1=10$ $\triangle O_1AO_2$ равнобедр.
$\angle AO_2O_1$ тоже $\alpha$.

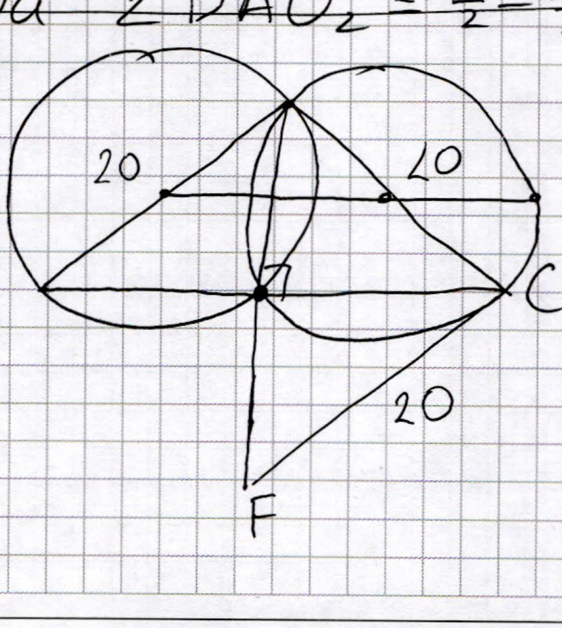
$AO_2=O_2C=10$

По т. о внеш. углe для равнобедрен. $\triangle AO_2C$:

$\angle O_2AC=\angle O_2CA$

$\angle AO_2O_1=\angle O_2AC+\angle O_2CA \Rightarrow \angle O_2AC=\frac{\alpha}{2}$

~~тогда $\angle DAO_2=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$; для~~




$DC \parallel O_1O_2$

$CF=20.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{\cos} -2\sin(7x)\sin(2x)+2\sin(7x)\overset{\cos(2x)}{\cancel{\sin 2x}} = \sqrt{2}\cos(4x)$$

$$\cancel{2}\,2\sin(7x)\cdot\left(-\sin(2x)+\cos(2x)\right)=\sqrt{2}\cos(4x)$$

$2$

$$\cos(2x)=\cancel{4}\,2\cos^2x-1=\cos^2x-\sin^2x$$

$\sin\alpha+\cos\alpha$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(9x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(9x)\right)=\sqrt{2}\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(5x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(5x)\right)=\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(7x)\underline{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=\underline{\cos(4x)}$$

$$\frac{9}{2}x=\frac{3\pi}{8}+\pi k$$

$$x=\frac{\cancel{3}\pi}{4\cdot\cancel{9}3}+\frac{2}{9}\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi k$$

$$\frac{\pi}{\cancel{8}4}\cdot\frac{2}{5}=$$

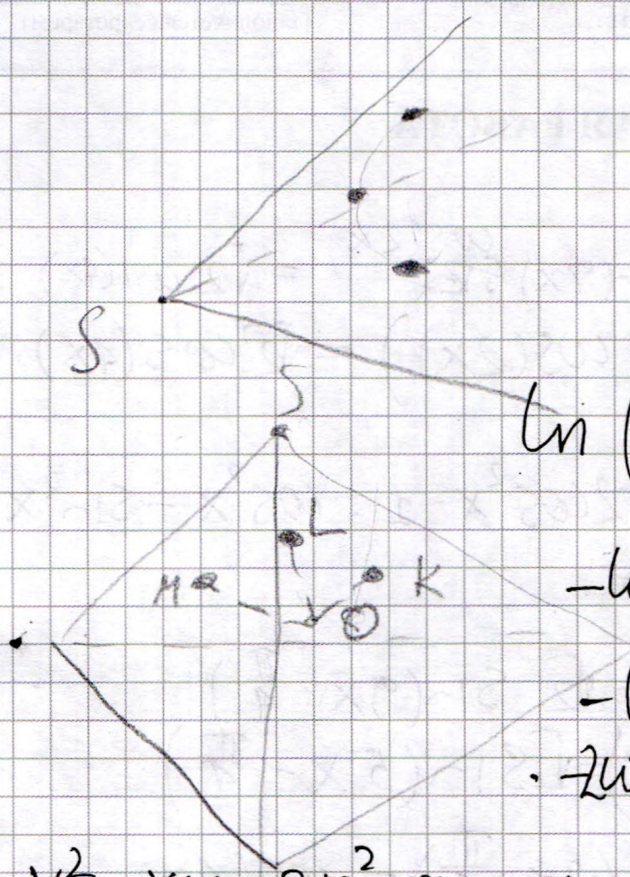
$$\frac{3\pi}{\cancel{8}4}\cdot\frac{2}{\cancel{9}3}=$$

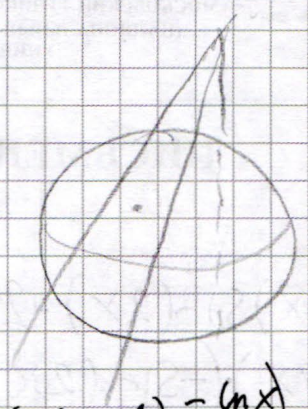
$$289+225=\cancel{513}$$

$$+\begin{array}{r}289\\225\\\hline 514\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$\ln\left(\left(x^2y^4\right)^{-\ln x}\right) = \ln\left(y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}\right)$$

$$-\ln x \cdot \ln\left(x^2y^4\right) = \ln\frac{y}{x^7}\ln y$$

$$-\ln x\left(2\ln x + 4\ln y\right) = \left(\ln y - 7\ln x\right)\ln y$$

$$-2u^2 - 4uv = v^2 - 7uv$$

3)

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$2x(-x+4) \qquad y_1 + y_2 = x+4$$

$$y \qquad y_1 y_2 = 2x(-x+4)$$

$$y^{-\alpha}\cdot y^{\alpha} = 1 \qquad 2x;\ (-x+4)$$

$$y^2 + (x-4-2x)y - 2x(x-4)$$

$$x^{-2\ln x}\, y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-3\ln x} = y^{\ln y}\cdot x^{-3\ln y}$$

$$2^{\ln 2}$$

$$e$$

$$x^6 = t \qquad a^{\ln a} = a^{\frac{\log_a e}{\log_a e}} =$$

$$16t = \left(\frac{t}{2}\right)^{\ln 2} \qquad a^{\ln a} = a^{\frac{1}{\log_a e}} = \frac{1}{a}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$v^2+(4u-7)v+2u^2=0$

$v=-\frac{4u-7}{2}\pm\sqrt{\frac{16u^2+49-56uv-8u^2}{4}}$

$2u^2$

$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+4}$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$(4\cdot 16)^{-\ln 2}=2^{\ln\frac{1}{26}}=(2^6)^{-\ln 2}=2^{-6\ln 2}$

$4-4 \quad -8+16-8$

$9261=3\cdot 3087$

abcdefg

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

$9261 : 3 = 3087$

$3087 : 3 = 1029$

$9261=3\cdot 3087=$

$=3^2\cdot 1029=3^3\cdot 343$

$=3^3\cdot 7\cdot 49$

$=3^3\cdot 7^3$

$343=$

1
3
7

3 „3" и 3 „7" и 1 „1"

2 „3" и 3 „7" и 2 „1"

2 „7" и 3 „3" и 2 „1"

a

333777

333111

$C_6^3$

$P=$

2

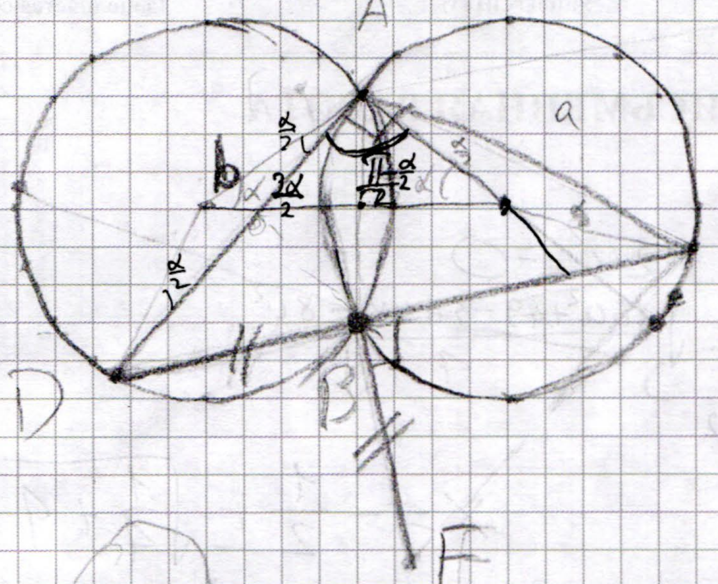
1000.

$C_4^1$ $C_4^2=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2}=6$

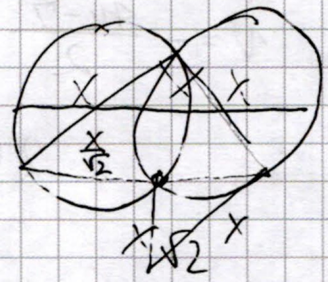
1010 1001 0101 0011 0110 1100

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)




$R = 10$




$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} + \alpha\right) =$

$\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + x = \pi$

$\cancel{\frac{\alpha}{2} = \pi}$ $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$C_6^3 \cdot C_8^2 = C_5^2 \cdot C_8^3$

$\frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!}$

$\alpha + x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\alpha$

$2R\cos\alpha = d$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} =$

$\cancel{d^2 = 1}$ $R^2 = R^2$

$00!$

$\cancel{\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}$

$\cancel{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6 \cdot 2}}$

$\cancel{\pi/2} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha$

560

$\frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{R}{\sin\alpha} =$

$x = \frac{\alpha}{2}$

$\frac{1}{2} d_1 d_2 = R^2 \sin(2\alpha)$

$\cancel{\frac{1}{2} 2R\sin\alpha \cdot 2R\cos\alpha}$