

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11) Представим 500 в каноническом виде:

$$500 = 2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 1^3$$

То есть нам необходимо распределить цифры: 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 2

на 8 позиций, при этом порядок важен, но не между одинаковыми цифрами

1) 3 - 8 вариантов. ($C_8^1 = \frac{8!}{1!7!} = 8$)

2) две 5-ки: $A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$ $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ вар-ов.

3) две 2-ки: $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ вар-ов.

4) три 1-ки: $C_8^3 = 1$ вар.

итого, поскольку выборы цифр зависят друг от друга иждует что итоговое кол-во вар-ов есть:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 720 \text{ вар-ов.}$$

$$8 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_3^3$$

Ответ: 720 вар-ов

12) $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_{b_n} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

сумма всех членов: $S_{b_{3000}} = \frac{b_1(1-q^{3000})}{1-q} = S$

Рассм найдем сумму из которой 3-ий член.

$$6,9^2 + 6,9^5 + 6,9^8 + \dots + 6,9^{2999} = 6,9^2(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{2997}) = \frac{6,9^2(1-q^{3000})}{1-q^3}$$

$$= S_{3,6000}$$

Рассм найдем сумму и которую 2-ой член. (первый член)

$$6,9 + 6,9^3 + 6,9^5 + \dots + 6,9^{2999} = 6,9(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2998}) = \frac{6,9(1-q^{3000})}{1-q^2} =$$

$$= S_2$$

Увеличилось, или?

$$S_{\text{стар}} + 49 S_{3,63000} = 10 S_{\text{стар}} \Rightarrow 49 S_{3,63000} = 9 S \Rightarrow$$

$$\frac{496,9^2(1-q^{3000})}{1-q^3} = \frac{96,9(1-q^{3000})}{1-q} \Rightarrow \frac{49q^2}{q^2+q+1} = 9 \Rightarrow$$

$$49q^2 = 9q^2 + 9q + 9 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$q = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{80} = \frac{9 \pm 39}{80} \begin{matrix} \nearrow -\frac{3}{8} \rightarrow W \\ \searrow \frac{3}{5} \end{matrix}$$

Рассмотрим каждый вариант, где $x=10$, восточную рожу изменили.

$$S + 9S_2 = xS \Rightarrow 9S_2 = (x-1)S \Rightarrow \frac{96,9(1-q^{3000})}{1-q^2} = \frac{(x-1)6,9(1-q^{3000})}{1-q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9q}{q+1} = x-1 \Rightarrow \left[x = \frac{10q+1}{q+1} = \frac{10 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{2 \cdot 5}{8} = \frac{35}{8} \right]$$

Ответ: увеличится в $\frac{35}{8}$ раз.

№3 $\left(\frac{x+6}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = -x^2 + 10x + 24.$

1) ППЧ: $x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$

2) $(x+6) \left(\sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} - (x+4) \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ \sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} \geq 0 \\ \sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} - (x+4) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$

3) Решим $\textcircled{1}$

$$\begin{cases} x = -6 \\ \frac{x^3}{2} - 2x + 40 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ -108 + 16 + 40 = -52 \geq 0 \rightarrow W \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

4) Решим $\textcircled{2}$

$$\sqrt{\frac{x^3}{2} - 2x + 40} = x+4$$

и, 1) $x < -4 \Rightarrow \emptyset$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4,2) \quad x^3 - 4x + 80 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{2} - 2x + 40 = x^2 + 8x + 16 \quad \left(\frac{x^3}{2} - 2x + 40 \geq 0 \right)! \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 4x + 80 - 2x^2 - 16x - 32 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0 \quad [1] \end{array} \right.$$

Разложим на множители используя схему Горнера.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -20 & 48 \\ -4 & -4 & +14 & -56 & 64 \\ -4 & 1 & -6 & 1 & -4 \end{array}$$

24

$$(14) \quad 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x^2(x-2) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \\ (2) \quad \begin{cases} x < 2 \\ 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

а) Рассмотрим (2)

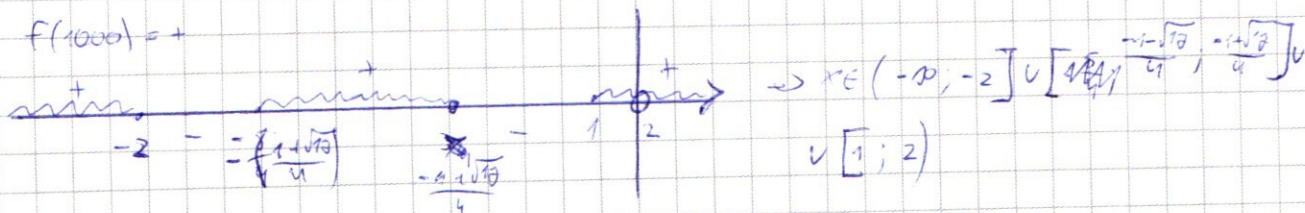
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ (x-1)(2x^3 + 5x^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 5 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ (x-1)(x+2)(2x^2 + x - 2) \geq 0 \end{cases}$$

Решим (2) $D = 1 + 2 \cdot 2 - 4 = \sqrt{9}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ (x-1)(x+2) \left(x + \frac{1-\sqrt{9}}{4} \right) \left(x + \frac{1+\sqrt{9}}{4} \right) \geq 0 \end{cases} \\ & f(x) \end{aligned}$$



2) Решим ①

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \underbrace{x^3(2x-5)}_{[1]} + \underbrace{x(2x-4)}_{[2]} + 4 \geq 0 \end{cases}$$

2.1) Решим [1]

$$\left. \begin{aligned} x^3 > 0 \text{ на } x \geq 2 \\ 2x-5 \geq 1 > 0 \text{ на } x \geq 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3(2x-5) > 0 \text{ (на } x \geq 2)$$

2.2) Решим [2]

$$\left. \begin{aligned} x \geq 2 > 0 \\ 2x-4 \geq 0 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(2x-4) > 0 \text{ (на } x \geq 2)$$

2.3) из п. 2.1) 2.2) $\Rightarrow x \geq 2$

$$\text{из 1), 2.3) } \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [2; +\infty)$

⑤ Радиус окружности, по которой ^{плыв} плывет лодка:

$$R_k = \sqrt{(5-0)^2 + (5\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \quad (\approx 14,1)$$

Радиус окружности, по которой ^{плыв} плывет лодка. Возвращение

$$R_b = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4\sqrt{2} \quad (\approx 5,65)$$

Заметим что M_0, K_0 и $S(0;0)$ лежат на одной прямой.

Пусть скорость ^{плыва} ~~вектор~~ v , тогда скорость ^{плыва} ~~вектор~~ $2v$

$$\left. \begin{aligned} \text{линейная скорость } \omega_b &= \frac{2v}{R_b} = \frac{v}{2\sqrt{2}} \\ \text{линейная скорость } \omega_k &= \frac{v}{R_k} = \frac{v}{10\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\omega_b}{\omega_k} = 5 \Rightarrow$$

Забываем, что ^{плыв} плыв будет проходить 1 круг - водометная выложит 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассматривая точку между двумя и возмущенной функцией
в первом раз. (т.е. она его заходит) t_g - время захода

$$\omega_m t_g = 5\omega_m t_g - \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_g = \frac{\pi}{4\omega_m} \Rightarrow \text{Время за которое возмущенная}$$

$$\text{обойдет на круге радиуса } t_k = \frac{\pi}{2\omega_m}$$

$$\text{При этом точка пройдет круг за } t_m = \frac{2\pi}{\omega_m} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~возмущенная~~ возмущенная будет "обойдет" круга в 4-х различных точках.

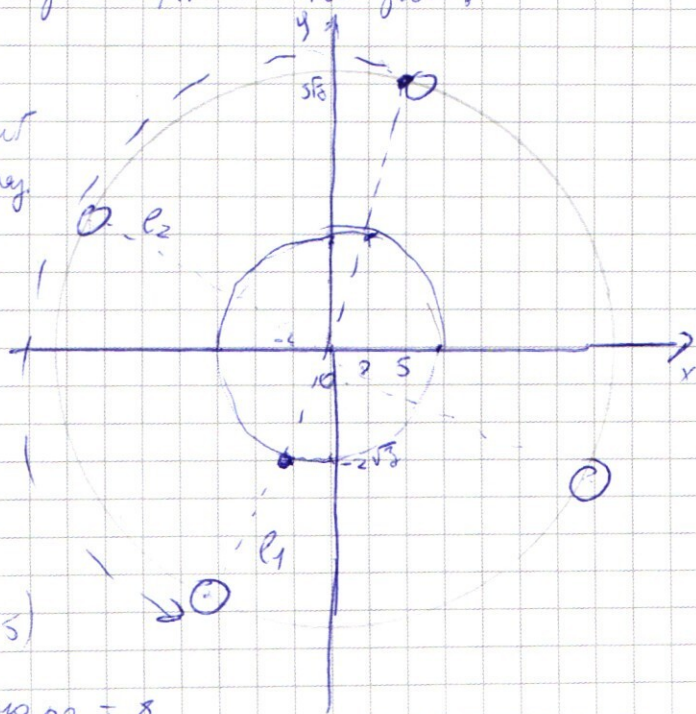
Первая, вторая будет когда точка повернется на угол:

$$X = 2X - \pi \Rightarrow X = \pi$$

$$\text{по формуле } X_n = \pi \cdot \frac{\pi n}{2} \text{ контур } n\text{-го раз}$$

$$C_1 = y_1(x) = \sqrt{3}x \Rightarrow (5; 5\sqrt{3}), (-5; -5\sqrt{3})$$

$$C_2 = y_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x \Rightarrow (-5\sqrt{3}; 5), (5\sqrt{3}; -5)$$



Ответ:

$$(-5; -5\sqrt{3}), (5; 5\sqrt{3}), (-5\sqrt{3}; 5), (5\sqrt{3}; -5)$$

Прямые (№6) BF по Т. Пифагора = 8

$$S_{ACF} = S_{CAB} - S_{CFB} - S_{FDB} =$$

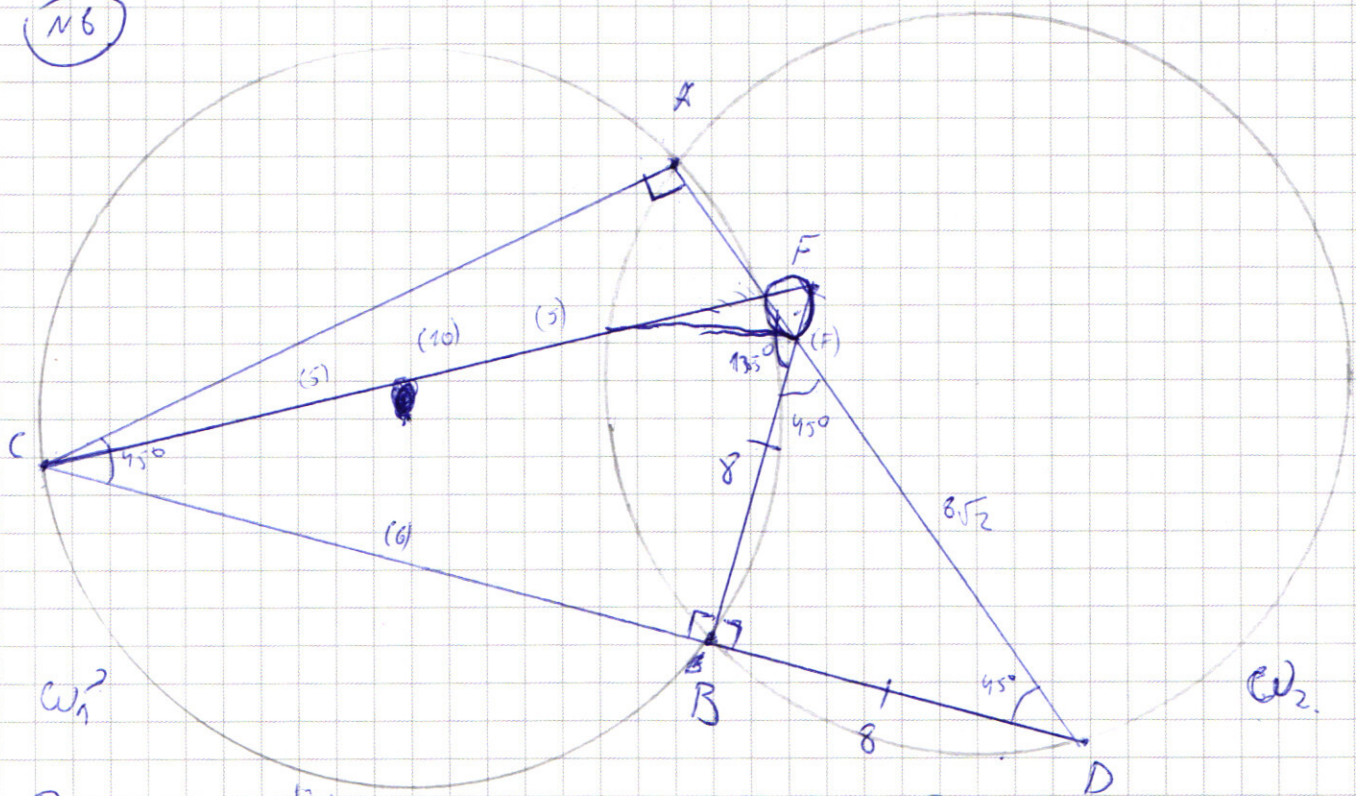
$$\frac{AC}{BF} = \frac{CD}{FD} \Rightarrow \frac{AC}{8} = \frac{14}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$$

$$AF = AC - FD = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ответ: } CF = 10, S_{ACF} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

nb



Дано:
 ω_1, ω_2

$$R(\omega_1) = R(\omega_2) = 5$$
$$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$
$$\angle CAD = 90^\circ$$

FB_LCD

$$BF = BD.$$

CF-3

- 1) $\angle ACD$ omg. na $UAB (w_1)$
 $\angle ADB$ omg. na $UAB (w_2)$
 $UAB(w_1) = UAB(w_2)$ - belying ainnaw? μ
- $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADB = \frac{180 - 30}{2} = 45^\circ$
- 2) Dn. $PD, \angle BFD - p/s \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = \frac{180 - 30}{2} = 45^\circ$
 ($BF = BD$)

- 3) $\angle FDB \subset \angle ADC \rightarrow$ F-simut per AD
- 4) $\angle AFB + \angle DFB = 180^\circ$ (linea) $\left\{ \begin{array}{l} \angle AFB = 135^\circ \\ \angle DFB = 45^\circ \text{ (u.2)} \end{array} \right. \rightarrow$
- $\angle FBC + \angle FDB = 180^\circ$ (linea) $\rightarrow \angle FBC = 90^\circ$
= 90° (no ques)

- 5) Ресурсы АФБС

$$\angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ACB + \angle AFB = 180^\circ$$

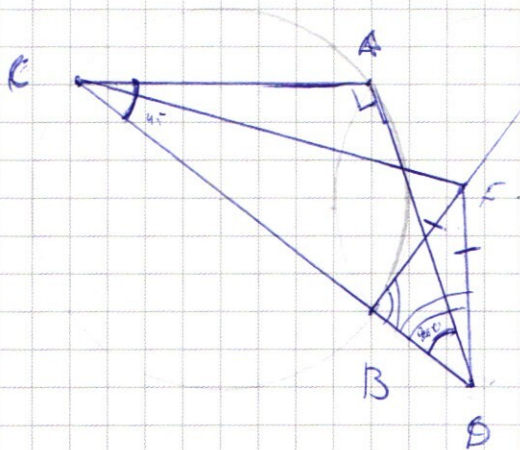
⇒ KFBC - вычислитель $\Delta \omega_1 \Rightarrow$
T - чертит на ~~д~~ ω_1 .

- 6) $\angle CBF = 30^\circ$ - угол на CF
 $B \in \omega_1$ } $\rightarrow$ [CF - диаметр $\omega_1 = 2R = 40$]

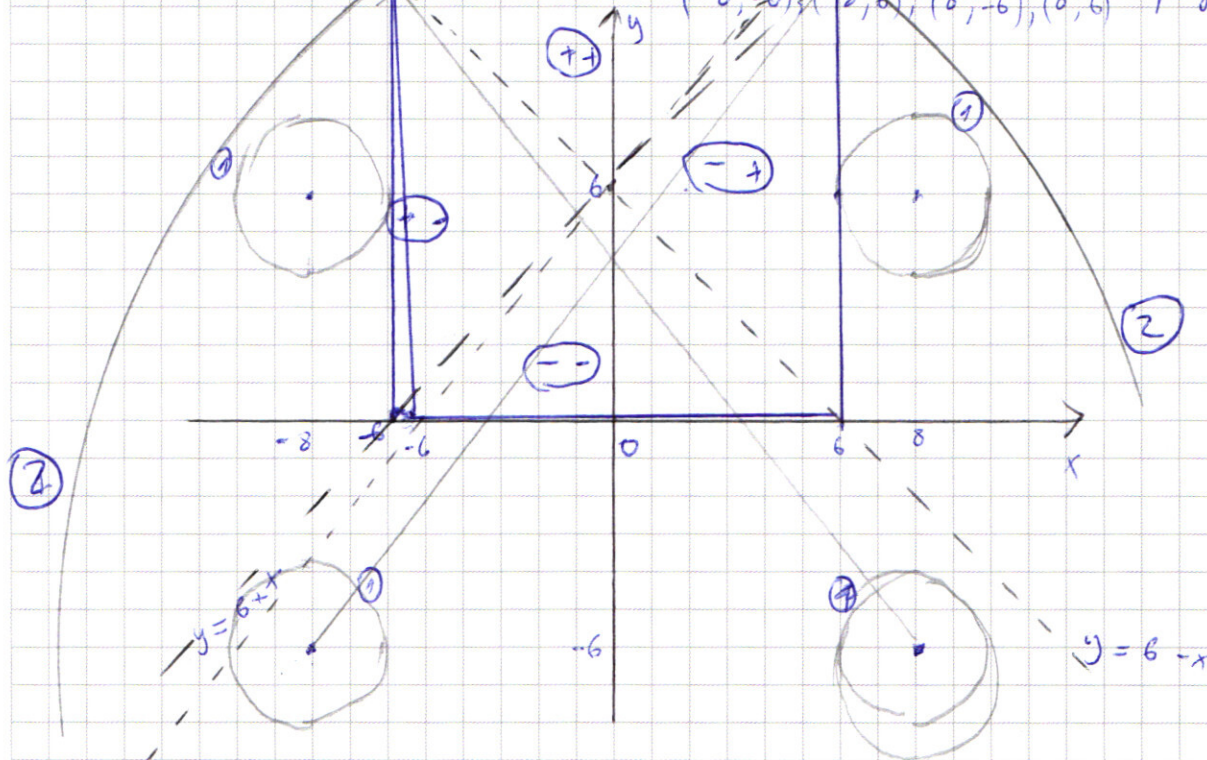
Прозаклетие не стр 5.

~~Given: CF = 10~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ $\begin{cases} |y-6-x| + |y-6+x| = 12 & \text{двухсторонний квадрат} \\ (|x|-8)^2 + (|y|-6)^2 = a & \text{окружности с центрами} \end{cases}$
 $(-8; -6), (-8; 6), (8; -6), (8; 6)$ и радиусом $\sqrt{a}$



$(++) \quad y-6-x + y-6+x = 12 \Rightarrow y=12$
 $(+-) \quad y-6-x - (y-6+x) = 12 \Rightarrow x=-6$
 $(-+) \quad -(y-6+x) + (y-6+x) = 12 \Rightarrow x=6$
 $(--)$ $-(y-6+x) - (y-6+x) = 12 \Rightarrow y=0$

2 решения возможны лишь в 2-х случаях (1), (2)

1) Рассмотрим (1) - окружности с центрами $(8; 6), (8; 6)$ касаются ребер квадрата в $(6; 6)$ и $(6; 6)$ соответственно.
 $\sqrt{a} = \sqrt{(8-6)^2 + (6-6)^2} = 2 \Rightarrow a=4$ (при меньших значениях a решений нет)

2) Рассмотрим (2) - окружности с центрами $(-8; -6), (-8; -6)$ касаются вершин квадрата в $(6; 12)$ и $(-6; 12)$ соответственно.

$$\sqrt{a} = \sqrt{(6-(-8))^2 + (12-(-6))^2} = \sqrt{14^2 + 18^2} = \sqrt{520} \Rightarrow$$

$a \leq 520$, при больших значениях a решений нет, при $a \in (4; 520)$ - 2 решения.

Ответ: $a \in \{4; 520\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$800 = 8 \cdot 100 = 8 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 1^3$$

$$\cancel{6_1} + \cancel{6_1} q^2 + \cancel{6_1} q^5 + \cancel{6_1} q^8 = 6(1 + q^2 +$$

$$\cancel{6_1} q^2 + \cancel{6_1} q^5 + \cancel{6_1} q^8 + \cancel{6_1} q^{11} = 6_1(q^2 + q^5 + q^8 + q^{11}) = 6q^2(1 + q^3 + q^6 + q^9) =$$

$$= 6q^2(1 - q^{12})$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 160 \\ \times 9 \\ \hline 1440 \\ + 81 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\frac{48}{80} =$$

$$-216 - 32 + 120 + 48$$

$$-64 - 64 + 80 + 48$$

$$= 64 - 32 + 80 + 48$$

$$f(3) \quad 27 - 18 + 60 + 48 = 9$$

$$f(5) \quad -25 - 18 + 60 + 48 = 53$$

$$f(2) \quad 8 - 8 - 40 + 48 = 8$$

$$f(-2) \quad -8 - 8 + 40 + 48 = 72$$

$$f(1) = 1 - 2 + 20 + 48 = 26$$

$$f(-1)$$

$$f(6) = 216 - 32 - 120 + 48 = 264 - 120 = 144$$

$$f(-6) = -216 - 32 -$$

$$f(-4) = -64 - 32 + 80 + 48 = 132$$

$$f(-5) = -125 - 50 + 100 + 48 = -27$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ + 1120 \\ \hline 1100 \end{array}$$

$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + 20$$

$$\frac{1}{8} - \frac{2}{8} + \frac{3}{4} - 2 + 4$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 = 2,5$$

$$32 = 24 + 28 - 8 + 4 = 32$$

$$= 8x^3 - 3x^2 + 14x + 4$$

$$64 - 36 + 28 - 4 = 52 - 1$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & -3 & 3 & -4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 6 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 + 4x + 2 \\ - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 - 4x + 2 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 =$$

$$= 2x^4 + 7x^2 - 4x + 4$$

$$x^3(2x-3) + 3x^2 - 4x + 4$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{94}}{3}$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 - 20 + 48 = 27$$

$$f(-1) = -1 - 2 + 20 + 48 = 65$$

$$f(-2) = -8 - 8 + 40 + 48 = 72$$

$$f(2) = 8 - 8 - 40 + 48 = 8$$

$$f(3) = 27 - 18 - 60 + 48 = -3$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \times 141 \\ \hline 1564 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 \\ - 5x^3 - 5x^2 \\ \hline 4x + 4 \\ = 4x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 - 4 \quad | \quad x+2 \\ - 2x^3 + 4x^2 \\ \hline x^2 \\ - x^2 + 2x \\ \hline 2x - 4 \end{array}$$

$$x(x^2 - 20) = 2(x^2 - 24)$$

$$x \pi = 2x \pi \Rightarrow \pi$$

3

$$\pi \omega t = 5 \omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$\pi = 4 \omega t$$

$$\omega t_g = 5 \omega t_g - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = 4 \omega t_g = t_g = \frac{\pi}{4}$$

$$t = 60$$

$$\omega t = 12 \omega t + 2\pi$$

$$2\pi = 11 \omega t \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\pi}{11\omega}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 324 \\ + 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 154 \end{array}$$