

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 50 раз, сумма  $S$  увеличится в 10 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 2 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$ .
5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(-2; -2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1 \quad \text{— в разложении, выноса единицу.}$$

$$\underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1}$$

По правилу канонизации получим, что такая  
числа  $6! = \cancel{720}$

Ответ: 720

№ 2

Пусть  $b_1; b_2; \dots; b_{3000}$  — геометрическая прогрессия  
со знаменателем  $q$  ( $q > 0$ )

Тогда  $b_3; b_6; \dots; b_{3000}$  — тоже геометрическая  
прогрессия со знаменателем  $q^3$ ,

А  $b_2; b_4; b_6; \dots; b_{3000}$  — геометрическая прогрессия со  
знаменателем  $q^2$ .

$$S_1 = \frac{b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} \quad \text{— сумма членов начальной геом. пр.}$$

$$S_2 = \frac{b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \quad \text{— сумма членов геом. пр., пом. : 3.}$$

$$S_3 = \frac{50 b_3 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1} \quad \text{— сумма членов той же пр., умноженных на 50.}$$

$$\frac{S_1 - S_2 + S_3}{S_1} = 10$$

$$1 + \frac{49q^2}{q^2 + q + 1} = 10 \Rightarrow 40q^2 - 9q - 9 = 0; D = 39^2$$

Проверяю, что  $q > 0$ , найдем:

$$q = \frac{9 \pm 39}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$

$$S_4 = \frac{6,4(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} - \text{сумма четного членов ряда пр.}$$

$$S_5 = \frac{26,4(q^{3000} - 1)}{q^2 - 1} - \text{сумма тех же членов, умноженная на 2.}$$

$$\frac{S_5 - S_4 + S_5}{S_4} = 1 + \frac{q}{q+1} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{3}{8} = 1,375$$

Ответ: увеличится в 1,375 раз.  
№3

Допустим обе части уравнения на  $\sqrt{2}$ :

$$(x+6)\sqrt{x^3-4x+80} = \sqrt{2}(x+6)(x+4)$$

Если  $x = -6$ , то  $x^3 - 4x + 80 < 0$ , чего быть не может.

Возведем обе части уравнения в квадрат, сократив на  $x+6$ :

$$x^3 - 4x + 80 = 2(x^2 + 8x + 16)$$

$$x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 12x + 48 = 0$$

$$(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$$

$$x = 4$$

$$\frac{D}{n} = 1 + 12 = 13$$

$$x = -1 \pm \sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } x = 4; -1 \pm \sqrt{13}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

Изобразим водометную черепашку на окружности, по которой бежит жук. ~~Изобразим~~

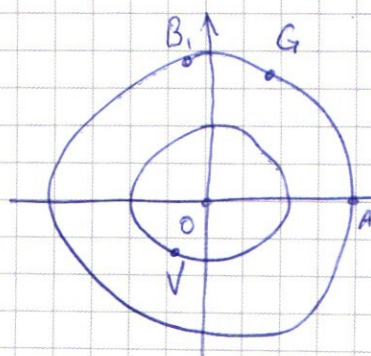
Радиус окружности водометки —  $R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{4 + 28} = 4\sqrt{2}$ , жук —  $R_{ж} = \sqrt{x_{ж}^2 + y_{ж}^2} = \sqrt{25 + 15} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$$\frac{R_{жс}}{R_0} = 2,5$$

$\vartheta = \omega R$ ;  $R$  — радиус кр-ки,  $\vartheta$  — скорость (угловая),  $\omega$  — угловая скорость.

Т.е., чтобы сохранилась угловая скорость водометки, надо увеличить ее линейную скорость в 2,5 раза.

Теперь скорость водометки в 5 раз больше скорости жука, ~~и ее радиус~~. Заметим, что, если смотреть от оси  $Ox$ ,



то жук находится "под углом"  $\angle AOG = \arctg \sqrt{7}$ , а водометка —

"под углом"  $\angle AOV = \pi + \arctg \sqrt{7}$  — ~~на~~ в ~~пределах~~ диаметрально противоположных точках кр-ки.

$$\omega_0 = \frac{\vartheta_0}{R_{жс}} = \frac{5\vartheta_{жс}}{R_{жс}} = 5\omega_{жс}$$

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ , где  $\Delta\varphi$  — "пройденный" угол за промежуток времени  $\Delta t$ ; водометка догонит жука с  $\omega_1 = \omega_0 - \omega_{жс} = \frac{4}{5}\omega_0$ .

Первый раз водометка встретится с жуком через  $\Delta t = \frac{\pi}{\frac{4}{5}\omega_0} = \frac{5\pi}{4\omega_0}$ , за этот промежуток времени водо-

мерная пройдет угол  $\frac{5\pi}{4}$ . Мы и водометная встретимся впервые в м. В. то есть, что  $\angle AOB_1 = \arctg \sqrt{7} - \pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \arctg \sqrt{7}$ . Найдем координаты этой точки:

~~$$\frac{y_1}{x_1} = \tan(\arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}}; x_1^2 + y_1^2 = R_m^2 = 200$$~~

~~$$x_1 = 100(1-\sqrt{7}), y_1 = 100(1+\sqrt{7})$$~~

Следующей раз встретимся будем в м. А<sub>2</sub>. Тогда через  $\Delta t = \frac{2\pi \cdot 5}{4\omega_0} = \frac{5\pi}{2\omega_0}$ , водометная пройдет угол  $\frac{5\pi}{2}$ .

И.е. точек точки встретим всего 4:

Под углом  $\arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}$ ;  $\arctg \sqrt{7} + \frac{3\pi}{4}$ ;  $\arctg \sqrt{7} + \frac{5\pi}{4}$ ;

$\arctg \sqrt{7} + \frac{7\pi}{4}$ . Осталось найти координаты точек

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \\ y_1 = 5\sqrt{4+\sqrt{7}} \\ x_2 = -5\sqrt{4+\sqrt{7}} \\ y_2 = -\frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \\ x_3 = -\frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \\ y_3 = -5\sqrt{4+\sqrt{7}} \\ x_4 = 5\sqrt{4+\sqrt{7}} \\ y_4 = \frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg(\lg(\sqrt{7} + \frac{1}{4})) = \lg \frac{\sqrt{7} + 1}{1 - \sqrt{7}} = \frac{x}{x}$$

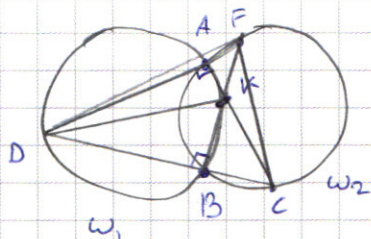
$$y = x \cdot \frac{8 + 2\sqrt{7}}{-6} = -x \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

$$x^2 \left( \frac{9 + 16 + 7 + 8\sqrt{7}}{9} \right) = 200$$

$$x^2 = \frac{25 \cdot 200 \cdot 9}{8(4 + \sqrt{7})} = \frac{15}{\sqrt{4 + \sqrt{7}}}$$

$$y = \frac{25 \sqrt{4 + \sqrt{7}}}{3} = 5 \sqrt{4 + \sqrt{7}}$$

$$\frac{225}{4 + \sqrt{7}} + 25(4 + \sqrt{7}) = 25 \left( \frac{9 + 16 + 7 + 8\sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} \right) = 25 \cdot 8$$



№6

$$\angle CHD = 90^\circ$$

$$R_1 = R_2 = 5$$

$$CD \perp BF$$

$$FB = BD$$

$$CF = ?$$

а) \*  $\triangle ADBK$  - вписанный четырехугольник ( $K = AC \cap BF$ )

П.к.  $A, D, B \in \omega_1$ , то и  $K \in \omega_1$ . Тогда  $DK$  - диаметр  $\omega_1$ ;

$DK = 10$ . ( $\angle DAK = 90^\circ$ , опирается  $DK$ )

$$** \quad \angle ADB = \angle BFD = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle AKB = 360^\circ - 2(90^\circ - 45^\circ) =$$

$$= 135^\circ; \angle CKB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ; \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ;$$

$\triangle CBK$  - р/б ( $KB = BC$ ).

\*\*\* По Т. Пифагора,  $FC^2 = FB^2 + BC^2$ ;  $BC = BK$ ;  $FB = DB$ ;

$$FC = DK \quad (DK^2 = DB^2 + KB^2) = 10, \text{ FC - диаметр.}$$

Ответ:  $FC = 10$ .

б) П.к.  $FC$  - диаметр, то  $\angle FAC = 90^\circ$ .

\*  $\angle BFD = 45^\circ$ ;  $\angle FKA = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т.е.  $\triangle FAK$  - р/б ( $FA = AK$ )

\*\*  $CB = BK = 6$ ;  $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (по Т. Пифагора)

Пусть  $AF = AK = a$ ;  $KC = 6\sqrt{2}$  (по Т. Пифагора)

По Т. Пифагора, для  $\triangle AFC$ :  $100 = a^2 + (a + 6\sqrt{2})^2$

$$\text{Отсюда, } a = -3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2} = \sqrt{2} = AK = AF$$

$$S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} (AF \cdot AC) = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 6\sqrt{2})}{2} = 7$$

Ответ:  $S_{\triangle AFC} = 7$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \quad (\text{если } x \geq 2)$$

$$2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

~~\*\*\*~~

$$2x^4 - 2x^3 - x^3 + x^2 + 6x^2 - 4x - 2x + 2$$

$$2x^3 + 3x^2$$

$$2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 5x^2 + 10x -$$

$$2x^4 - x^3 + 2x^3 + x^2 + 6x^2 - 3x - x +$$

$$2x^4 - 6x^3 + 3x^3 - 9x^2 + 16x - 48x$$

$$2x^4 +$$

$$2x^4 + x^2 + 4 =$$

$$D = 49 - 32 = 17$$

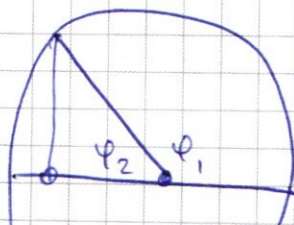
$$2x(x^3 - 2) + x^2(1 - 3x + 6) + 4 \geq 0$$

$$x - 2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

2

$$x_1 = \frac{10\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{32 - 8\sqrt{7}}} = \frac{15}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}$$



$$x = \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{7}(\sqrt{7}-1)}$$

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \pi - (\arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} - \arctg \sqrt{7}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{7} + 1}; \quad y_1^2 + x_1^2 = 200 \quad x_1 = \sqrt{\frac{600}{\sqrt{7}(\sqrt{7}+1)}}$$

$$y_1^2 = x_1^2 \cdot \frac{(8 - 2\sqrt{7})^2}{6} = x_1^2 \cdot \frac{(4 - \sqrt{7})^2}{3} \cdot \frac{7 - 1}{3} = 200$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{7} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{(1+\sqrt{7})^2} = \frac{x^2}{y^2}$$

$$200 = x^2 + y^2 = x^2 + x^2 \frac{(1+\sqrt{7})^2}{(\sqrt{7}-1)^2} = x^2 \left(1 + \frac{(1+\sqrt{7})^2 (1+\sqrt{7})^2}{36}\right) =$$

$$= x^2 \left(1 + \frac{(1+\sqrt{7}+2\sqrt{7})^2}{36}\right) = x^2 \left(1 + \frac{16+7+8\sqrt{7}}{9}\right) = x^2 \left(1 + \frac{23+8\sqrt{7}}{9}\right) = 200$$

$$\frac{8x^2(4+\sqrt{7})}{9} = 200 \Rightarrow 25$$

$$x = \sqrt{\frac{25 \cdot 9}{4+\sqrt{7}}} = \frac{15}{\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$y = \frac{(1+\sqrt{7})15}{(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 25 \\ \hline 46 \\ 575 \end{array}$$

$$575 + 225 = 800$$

$$\frac{5(1+\sqrt{7})^2}{\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot 6} = \frac{(8+2\sqrt{7})5}{2(\sqrt{4+\sqrt{7}})} =$$

$$= \frac{5(4+\sqrt{7})}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} = 5\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

$$\frac{225}{4+\sqrt{7}} + 25(4+\sqrt{7})$$

$$\frac{225 + 25(4+\sqrt{7})^2}{4+\sqrt{7}} = \frac{225 + 25(16+7+8\sqrt{7})}{4+\sqrt{7}} = \frac{625 + 800\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{7}) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{7}-1}{1+\sqrt{7}} = \frac{y}{x}$$

$$y = \frac{(\sqrt{7}-1)x}{1+\sqrt{7}} = x \frac{8-2\sqrt{7}}{6} = x \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$$x^2 \left(1 + \frac{16+7-8\sqrt{7}}{9}\right) = x^2 \left(\frac{32-8\sqrt{7}}{9}\right) = x^2 \frac{4-\sqrt{7}}{9} = 200 \Rightarrow 25$$

$$x = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

$$200 - \frac{225}{4-\sqrt{7}} = 200 - \frac{225(4+\sqrt{7})}{9} = \frac{1800 - 900 - 225\sqrt{7}}{9} =$$

$$= \frac{900 - 225\sqrt{7}}{9} = \frac{3 \cdot 25 \sqrt{4-\sqrt{7}}}{3} = 5\sqrt{4-\sqrt{7}}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} - \frac{b_1 q^2(q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{50q^2 b_1(q^{3000}-1)}{q^3-1} = 10$$

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1}$$

$$1 - \frac{q^2}{q^2+q+1} + \frac{50q^2}{q^2+q+1} = 10$$

$$q^2+q+1 - q^2 + 50q^2 = 10(q^2+q+1)$$

$$50q^2 - 10q^2 + q - 10q + 1 - 10 = 0$$

$$40q^2 - 9q - 9 = 0$$

$$D = 81 + 1440 = 1521 = 39^2$$

$$q = \frac{9 \pm 39}{80}; q > 0$$

$$q = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$1 + \frac{q}{q+1} =$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 160 \\ \hline 80 \\ 1440 \\ \hline 7200 \\ \times 39 \\ \hline 117 \\ + 351 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$81 + 160 \cdot 9 = 900 + 540 + 81 = 1521 = 39^2$$

$b_2, b_4, \dots, b_{3000}$  — тоже геом. прогр. с знаменателем

$$q^2. S_4 = \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1}; S_5 = \frac{2b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

$$\frac{S_1 - S_4 + S_5}{S_1} = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} - \frac{b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{2b_1 q (q^{3000}-1)}{q^2-1}$$

$$\frac{b_1(q^{3000}-1)}{q-1} =$$

$$= 1 - \frac{q}{q+1} + \frac{2q}{q+1} = 1 + \frac{q}{q+1} = 1 + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}} = \frac{11}{8}$$

$$t = \frac{\sqrt{5} \cdot 5}{4\omega_0}$$

$$\omega_0 t = \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{I_{B1}}{R_0} = \frac{I_{B2}}{R_{ac}}$$

$$\frac{I_{B2}}{I_{B1}} = 2,5$$

$$(2t) = \frac{5\pi}{2\omega_0}$$

$$\arctg(\sqrt{7})$$

Водолерия первый раз встретится с жуком через время:  $\frac{\pi}{\frac{5}{4}\omega_0} = \frac{5\pi}{4\omega_0}$ , при этом

„пробегав“ угол, равный  $\frac{5}{4}\pi$ . Это будет в

точке A, ~~начная~~  $\angle BOA = -\pi + \arctg \sqrt{7} + \frac{5}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + \arctg \sqrt{7}$

Далее водолерия будет встречаться с жуком ~~каждый~~ через некоторый угол. Вр.  $\Delta t = \frac{2\pi \cdot 5}{4\omega_0} = \frac{5\pi}{2\omega_0}$ , „проходя“ при этом угол  $2,5\pi$  с местом встречи, т.е. ~~сам~~ A, — точка между — каждой их встречи, т.е.  $\angle A_1OB = \arctg \sqrt{7} + \frac{5\pi}{4} + \pi$ ;

Сопоставив,  $\angle A_2OB = \arctg \sqrt{7} + \frac{5\pi}{4}$ ;  $\angle A_3OB = \arctg \sqrt{7} + \frac{7\pi}{4}$

Найдем координаты точек A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>:

$$A: \tg(\arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{7}+1}{1-\sqrt{7}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}};$$

$$\frac{(\sqrt{7}+1)(1+\sqrt{7})}{1-7} = \frac{8+2\sqrt{7}}{-6} = \frac{4+\sqrt{7}}{-3} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$y_1^2 = x_1^2 \frac{4+\sqrt{7}}{-3}$$

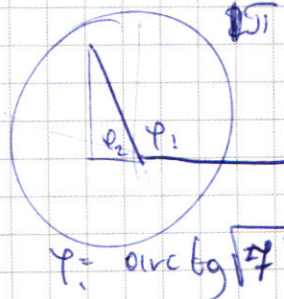
$$x_1^2 + x_1^2 \frac{4+\sqrt{7}}{3} = 200$$

$$x_1^2 \frac{-1-\sqrt{7}}{3} = 200$$

$$x_1 = -\frac{600}{1+\sqrt{7}} = -\frac{600(1-\sqrt{7})}{-6} = 100(1-\sqrt{7})$$

$$y_1 = 100(1+\sqrt{7})$$

$$\tg \varphi_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$$



$$\pi - (\arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} - \arctg \sqrt{7}$$

$$\varphi_1 = \arctg \sqrt{7} + \frac{\pi}{4}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$101: 700 \mid 2 \cdot 2 \cdot 2$   
 $350 \mid 2$   
 $175 \mid 5$   
 $35 \mid 5$   
 $7 \mid 7$   
 $1 \mid 1$

$700 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1$

$N = 6^3 \cdot 5^1 = 216 \cdot 20 \cdot 6 = 25920$

$$\begin{array}{r}
 216 \\
 \times 116 \\
 \hline
 1296 \\
 2160 \\
 \hline
 25920
 \end{array}$$

N<sub>3</sub>: 0 2 3:  $x^3 - 4x + 80 \geq 0$

~~$x^3 - 6x^2 + 8x - 36x + 32$~~

~~$$x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 12x$$~~

~~$$5x^2 + 5x^2 - 25x + 21x - 105$$~~

~~$$x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 16x^2 + 20x + 80 = 0$$~~

~~$x^2(x+4)$~~

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 - 5x^2 - 25x \end{array}$$

~~$x^3 + 2x^2 - 2x - 4$~~

~~$$x^3 + 6x^2 - 6x^2 + 36x - 40$$~~

30.12.2

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 30 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2} = -6, -4$$

$$-216 + 24780$$

№3

$$\cancel{(x+6)} \sqrt{x^3 - 4x + 80} = (x^2 + 10x + 24) \sqrt{2} = \sqrt{2} \cancel{(x+6)} (x+4)$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 16x + 12x + 48$$

$$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x + 4)$$

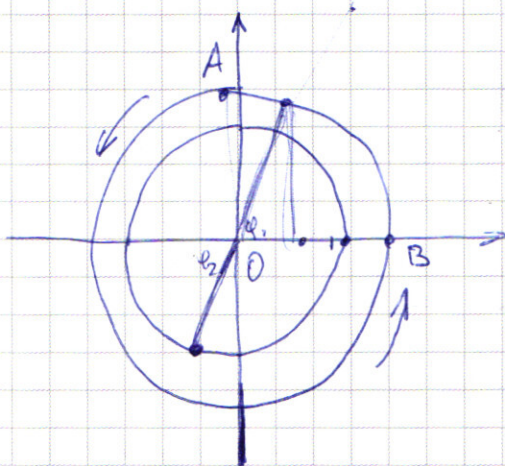
$x \neq 4$ ; м.е.  $\emptyset$

Если  $x \geq 2$ , то:

$$\begin{aligned} & 2x^4 + x^2 - 4x - 3x^3 + 6x^2 + 4 \geq 0 \\ & \boxed{2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 4x + 4 \geq 0} \\ & \cancel{2x^4} + \cancel{2x^3} + \cancel{1x^3} + \cancel{1x^2} + \cancel{6x^2} - \cancel{6x} \\ & \cancel{2x^4} - \cancel{x^3} - \cancel{2x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{6x^2} - \cancel{3x} = \cancel{x} + \cancel{7} \end{aligned}$$

$$(2x^4 + 7x^2 + 4) - (3x^3 + 4x) \geq 0$$

$$D = 49 - 32 \quad 25 \cdot 7 = 175$$



$$R_{к} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{7})^2} = \sqrt{25 + 175} = \sqrt{200} =$$

$$R_{б} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{4 + 28} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$g_{б} = 2 g_{к}$$

$$R_{к} = 2,5 R_{б}$$

$$\omega = \frac{g}{R}; \quad \omega_{б} = \frac{2 g_{к}}{\frac{R_{к}}{2,5}} = 5 \omega_{к}$$

$$\sqrt{(x_{к} - x_{б})^2 + (y_{к} - y_{б})^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\varphi_1 = \arctg \sqrt{7}$$

$$\varphi_2 = \arctg(+\sqrt{7}); \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

Известно, что с помощью водометра определяют

$$\text{мгн} - \omega_{б} - \omega_{к} = \frac{4}{5} \omega_{б} = 4 \omega_{к} = 4 \frac{\varphi_{к}}{t_{к}} \quad t = \frac{\varphi}{\omega_{б1}} = \frac{\pi \cdot 5}{4 \omega_{б}} = \frac{5\pi}{4 \omega_{б}}$$

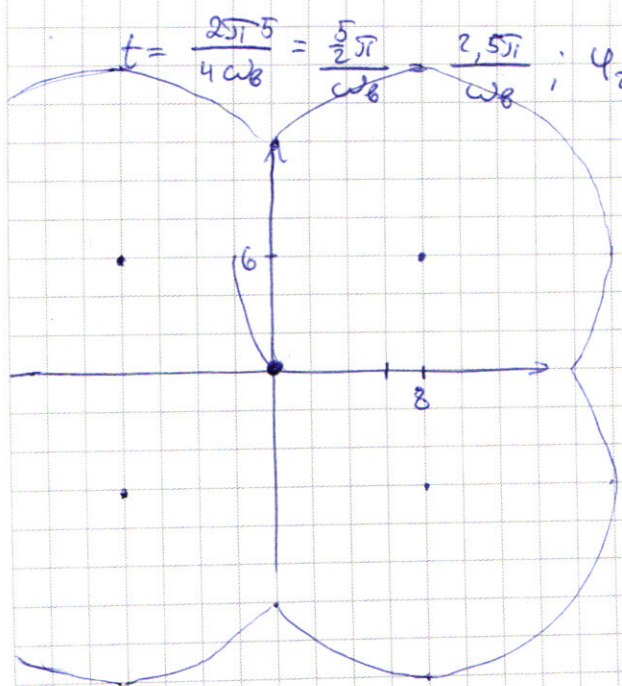
$$t = \frac{\varphi}{\omega_{б}}; \quad \varphi_1 = \frac{5}{4} \pi$$

$$t = \frac{2\pi \cdot 5}{4 \omega_{б}} = \frac{5\pi}{2 \omega_{б}} = \frac{2,5\pi}{\omega_{б}}; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = \frac{5\pi}{4 \omega_{б}} = \frac{1,25\pi}{\omega_{б1}}$$

Если

$$a \geq 100$$



$$2a^2 + 8a\sqrt{2} - 14 = 0$$

$$D = 18 + 14 = 32$$

$$a = -3\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$64 + (36 + 2a^2 + 12\sqrt{2} \cdot a) = (a^2 + 2a \cdot 40 + 40^2)$$

$$100 + 2a^2 + 12\sqrt{2}a = a^2 + 2a \cdot 40 + 40^2$$

$$100 - 40^2 = a^2, \text{ м.е.}$$

$$2a^2 + 12\sqrt{2}a = 2a \cdot 40$$

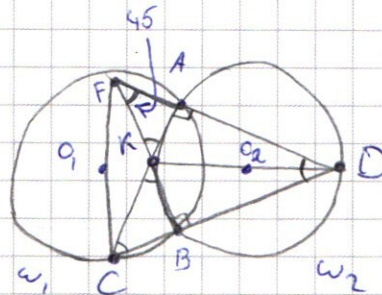
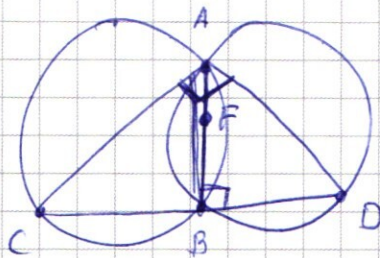
$$a \neq 0, \text{ м.е.} \quad 2a + 12\sqrt{2} = 2 \cdot 40$$

$$40 = a + 6\sqrt{2}$$

$$\Leftarrow 100 = a^2 + a^2 + 12a\sqrt{2} + 72$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 а



\*  $ADBK$  - вписанный четырехугольник; т.к.  $m.A; B; D \in \omega_2$ , то  $K \in \omega_2$ .

$\triangle KFA \sim \triangle KVB$  (по 2-м).  $\angle ADB = \angle BFD = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ \Rightarrow$

\*\* По т. К; B; D  $\in \omega_2$  и  $\angle KBD = 90^\circ$ , то  $KD = 10$  (диаметр  $\omega_2$ )

\*\*\* По т. Пифагора,  $FC = \sqrt{CB^2 + FB^2}$ ;  $FB = BD$ ;  $CB = KB$ ;  $\sqrt{KB^2 + BD^2} = KD$ ; т.е.  $FC = KD = 10$

\*\*\*  $\angle ADB = \angle BFD = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle AKB = 360^\circ - 2 \cdot (90^\circ) - 45^\circ = 135^\circ$ ;  $\angle CKB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ;  $\angle KCB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т.е.

$\triangle KBC$  - р/д;  $(KB = BC)$

№ 6 б

\*  $\angle BFD = 45^\circ$ ;  $\angle FKA = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т.е.  $\triangle FAK$  - р/д ( $FA = AK$ )

\*\*  $CB = BK = 6$ ;  $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$  (по т. Пиф.)

Пусть  $AF = a$ ;  $AK = a$

$FB^2 + BD^2 = FD^2$  (по т. Пиф.)

$$64 + (a\sqrt{2})^2 = (a + 10)^2$$

$$\sqrt{64 + 2a^2} + 12\sqrt{2}a + 30 = a^2 + 20a + 100; 100 - a^2 = 40$$

$$AD^2 + 2a \cdot AD + (100 + a^2 + 12\sqrt{2}a) = 0$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 100 - a^2 - a \cdot 12\sqrt{2} = -$$

$$(6\sqrt{2} + a)^2 + 40^2 = 196; 40^2 = 100 - a^2$$

~~$$72 + 12a\sqrt{2} + a^2 + 40^2 = 196$$~~

~~$$a^2 + 12a\sqrt{2}$$~~

~~$$72 + 12a\sqrt{2} + a^2 + 100 - a^2 = 196$$~~

~~$$a\sqrt{2} = \frac{24}{12\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$~~

~~$$(a + 6\sqrt{2})^2 = 14.8 = 84$$~~

~~$$a^2 + a6\sqrt{2} - 112 = 0$$~~

~~$$D = 72 + 4 \cdot 112 = 448 + 72 = 520$$~~

~~$$\frac{D}{4} = 130$$~~

~~$$a = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{130}}{2}$$~~

~~$$a + 6\sqrt{2} = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$~~

~~$$a = \sqrt{2}$$~~

~~$$100 =$$~~

\*\*\* Т. Тир. для  $\triangle AFC$ :  $100 = a^2 + (a + 6\sqrt{2})^2$

$$100 = 2a^2 + 12a\sqrt{2} + 72$$

$$a^2 + 6\sqrt{2} \cdot a - 14 = 0$$

~~$$D = \frac{D}{4} = 18 + 14 = 32$$~~

$$a = -3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Итак,  $HK = AF = \sqrt{2}$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} (AF + CA) = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 6\sqrt{2})}{2} = 7$$

Ответ: а) 10; б) 7.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2^2(x+4)} \quad \boxed{\sqrt{2} \cdot 3}$   
 $\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2} \cdot 3$   
 $x^3 - 4x + 80 = 2x^2 + 16x + 32$   
 $x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0$   
 $x^3 + 2x^2 - 4x^2 + 8x - 12x$   
 $x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x + 12x + 48 = 0$   
 $x^2(x-4) + 2x(x-4) - 12(x-4) = 0$   
 $(x-4)(x^2 + 2x - 12) = 0$   
 $x = 4$   
 $\frac{D}{4} = 1 + 12 = 13$   
 $x = -1 \pm \sqrt{13}$

$-1 - \sqrt{13} \approx -4,5$   
 $2025 \cdot 45 =$   
 $\begin{array}{r} 10125 \\ \times 45 \\ \hline 50625 \\ + 101250 \\ \hline 202500 \end{array}$   
 $-91,25 + 80 + 4,5$   
 $\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 2025 \end{array}$   
 $\begin{array}{r} 120 \\ \times 25 \\ \hline 3000 \\ + 24000 \\ \hline 30000 \end{array}$   
 $x^3 - 2x^2 - 20x + 48$

$\sqrt{64 - 16 + 80} =$   
 $= \sqrt{128} =$   
 $= 8\sqrt{2}$

$b, bq, bq^2, \dots, bq^n$   
 $\frac{b(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$   
 $\frac{b(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$   
 $S_3 = \frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1} \left( 1 + \frac{4992}{q^2 + q + 1} \right)$   
 $\frac{b(q^{3000} - 1)}{q - 1}$   
 $49q^2 - 9q^2 - 9q - 9 = 0$   
 $40q^2 - 9q - 9 = 0$

№ 2

$b_3, b_6, b_9 \dots b_{3000}$  — тоже геом. прогр. Но если в прогр.  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$  знаменатель  $q$ , то в прогр.  $b_3, b_6 \dots b_{3000}$  знаменатель  $q^3$ .

$$S_1 = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$S_2 = \frac{b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$S_3 = \frac{50b_3(q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

$$\frac{S_1 - S_2 + S_3}{S_1} = 10;$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1} - \frac{b_1 q^2 (q^{1000} - 1)}{q - 1} + \frac{50b_1 q^2 (q^{1000} - 1)}{q - 1} =$$

$$\frac{b_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{3000} - 1 - q^2(q^{1000} - 1) + 50q^2(q^{1000} - 1)}{q^{3000} - 1} = 10$$

$$(q^{3000} - 1) - q^{1002} + q^2 + 50q^{1002} - 50q^2 = 40q^{3000} - 10$$

$$-9(q^{3000} - 1) + 49q^{1002} - 49q^2 = 0$$

$$-9(q^{1000} - 1)(q^{2000} + q^{1000} + 1) + 49q^2(q^{1000} - 1) = 0$$

$$(q^{1000} - 1)(-9(q^{2000} + q^{1000} + 1) + 49q^2) = 0$$

$$q = 1$$

$$+9(q^{2000} + q^{1000} + 1) = 49q^2$$