

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Число 4900 раскладывается на простые множители следующим образом:

$$4900 = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

На однозначные множители есть только два способа разложения: $7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ и $7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$, т.к. любая пара краев 2 и 2 в произведении дает уже двузначное число.

Значит, искомые 8-значные числа содержат либо все указанные шестёрку, либо пятёрку и единицы в записи.

Следовательно количество таких чисел равно

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 + C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 выбор пары 7 из 8 выбор пары 5 из 6 выбор пары 2 из 4 выбор пары 7 из 8 выбор пары 5 из 6 выбор 4 из 4

$$C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 + C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \left(\frac{4!}{2! \cdot 2!} + 4 \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} \left(\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \right) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (10) = 8400$$

Ответ: 8400

№3

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$$

$$O.O.P: x^3 - 64x + 200 \geq 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+10) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = (x+10)(x-4)$$

$$(x+10)\left(x-4 - \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}}\right) = 0$$

$$1. x + 10 = 0$$

$$x_1 = -10$$

$$2. x - 4 - \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} = 0$$

$$x - 4 = \sqrt{\frac{x^3 - 64x + 200}{8}} \quad \text{Возведем в квадрат с последующей проверкой корней}$$

$$x^2 + 16 - 8x = \frac{x^3 - 64x + 200}{8}$$

$$x^3 - 8x^2 + 72 = 0$$

$$x_2 = 6 \text{ является корнем}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 72 & x - 6 \\ \hline x^3 - 6x^2 & \\ \hline -2x^2 & \\ -2x^2 + 12x & \\ \hline -12x + 72 & \\ -12x + 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$D = (-2)^2 + 4 \cdot 12 = 52$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + |x+2|^2 - 5x^2|x+2| \geq 0$$

~~$$4x^4 + |x+2|^2 - 5x^2|x+2| \geq 0$$~~

$u = x^2$ $v = |x+2|$, найдем корни:

$$4u^2 + v^2 - 5uv \geq 0$$

$$D = 25u^2 - 4 \cdot 4u^2 = 9u^2$$

$$v = \frac{5u \pm 3u}{8} = u; \frac{u}{4}$$

$$|x+2| = x^2 \quad |x+2| = \frac{x^2}{4}$$

$$x_1 = -1$$

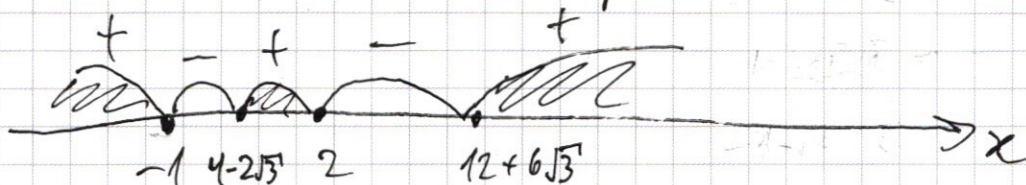
$$x_3 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$x_2 = 2$$

$$x_4 = 12 + 6\sqrt{3}$$

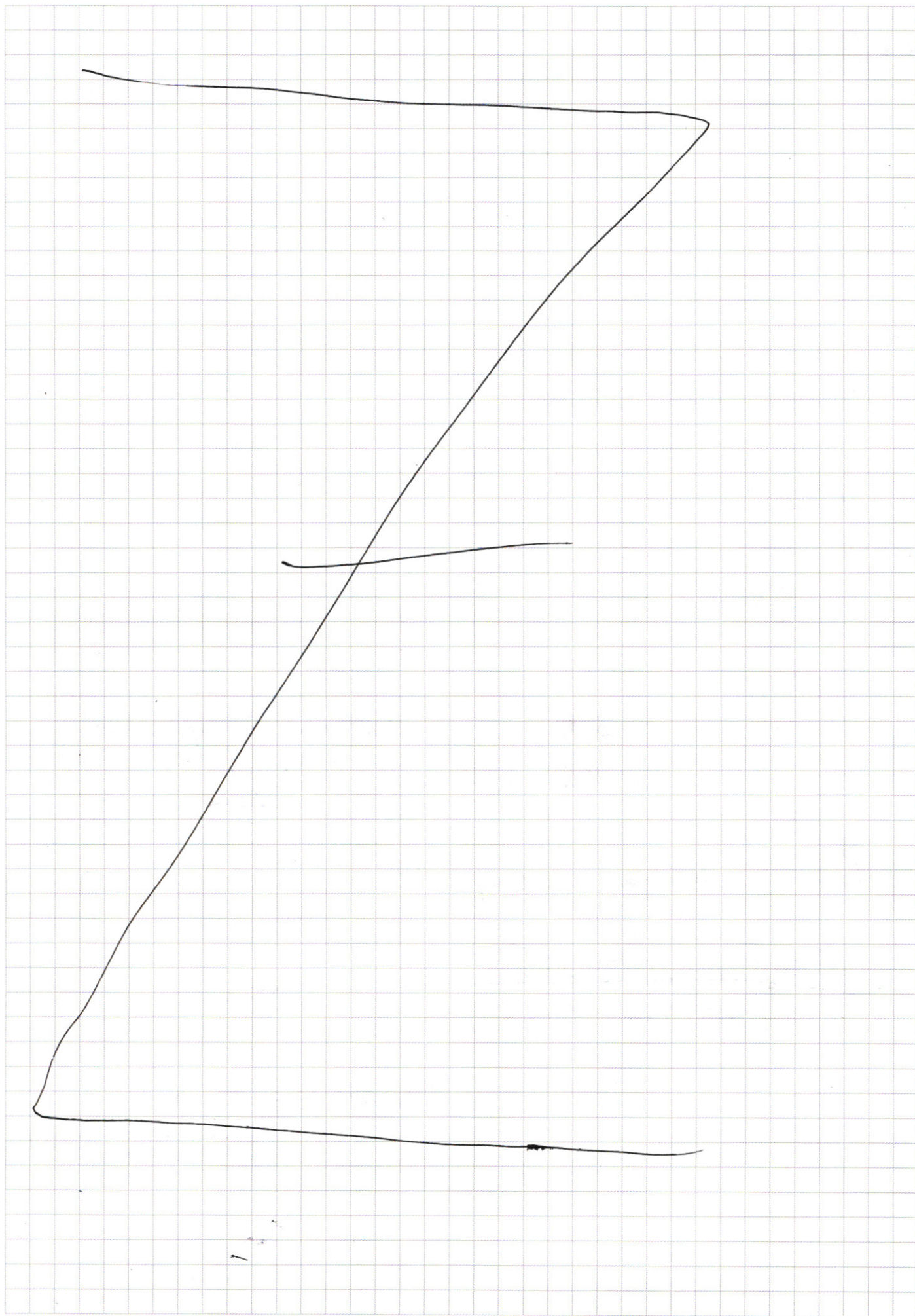
(Максимум два пересечения:

Решим методом интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup$

$\cup [4 - 2\sqrt{3}; 2] \cup [12 + 6\sqrt{3}; +\infty)$

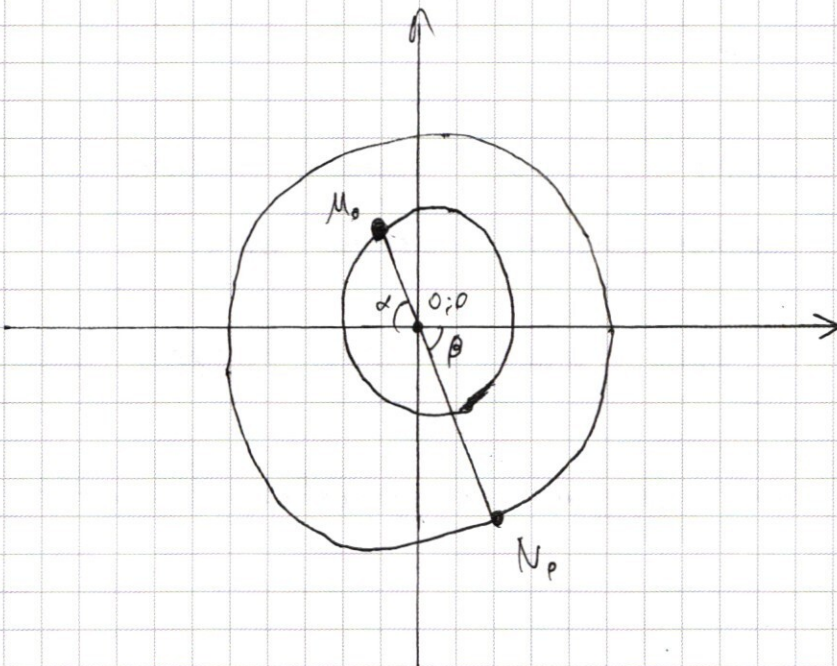


☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Заметим, что $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и α и β оба острые $\Rightarrow \alpha = \beta$.

~~Радиус окружности караса равен~~

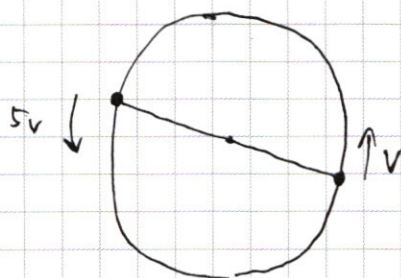
Заметим, что $\tan \alpha = \tan \beta = 2\sqrt{2}$, α и β оба острые $\Rightarrow \alpha = \beta$.

Радиус траектории караса равен $\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = 3$

Радиус траектории пещары равен $\sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$

Радиусы окружностей отличаются в 2 раза $\Rightarrow$ можно "спрессировать" караса на другую траекторию и увеличить скорость в два раза! Представим, что они на одной окружности и кратчайшее расстояние между ними, когда они в одной точке — один догонит другого)

(Продолжение № 5)

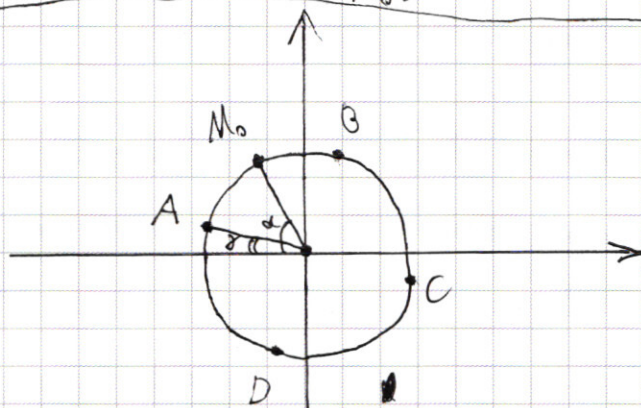
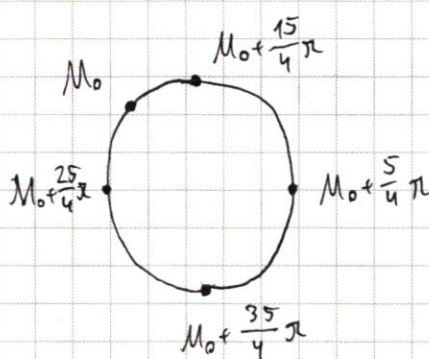


Пусть скорость пешкара V , тогда скорость караса $2,5 \cdot V = 5V$. Значит, карась „догонит“ пешкара через

$\frac{\pi}{5V-V} = \frac{\pi}{4V}$ времени и будет потом догонять катящееся

$\frac{2\pi}{5V-V} = \frac{\pi}{2V}$ времени. За эти отрезки он промывает $\frac{5}{4}\pi$ и $\frac{5}{2}\pi$ соответственно.

Значит, точки встречи такие:



$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4 + \sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Продолжение №8)

Найти образы, координата т. А по Ox =

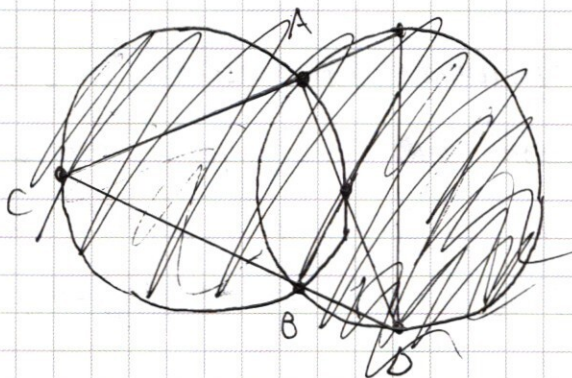
$$-3 \cdot \cos 8 = -3 \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{6} = -\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{По } Oy: \sqrt{9 - \left(-\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{18+8\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{18-8\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{18-8\sqrt{2}}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

П.к. точки симметричны, получаем ответ.

~~Ответ: $\left(-\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-4}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}-4}{2}, -\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$~~

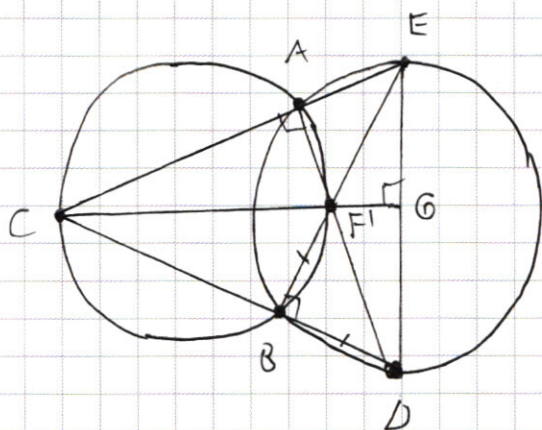
~~№8/8~~



Для пересчета, каждую координату нужно умножить на два.

Ответ: $(-4-\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}), (4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}), (4+\sqrt{2}, \sqrt{2}-4), (\sqrt{2}-4, -4-\sqrt{2})$

No. 6



Дано!

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$B \in C_D$$

BF LCD

$$r_1 = r_2 = 13$$

d, $BC = 10$

Devinu!

a) CF, σ , S_{ACK}

Решение:

а) Пусть BF пересечет окружность в F' . Тогда, CF' — диаметр ($\angle CBF' = 90^\circ$). $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD$ опирается на диаметр $\Rightarrow F' \in AD$.

Пусть AC пересекает вторую окр. в E. Тогда ED - диаметр ($\angle DAE = 90^\circ$). $\angle DBF' = 90^\circ \Rightarrow \angle DBF'$ опирается на диаметр $\Rightarrow F' \in DE$

у) прямоугольные треугольники $\triangle CDG$ и $\triangle EDB$ общий угол $\angle CDE \Rightarrow$
они подобны ~~по~~ (CG - третья высота в $\triangle CED$). $\triangle CF'B$ и $\triangle CDG$
подобны по общему углу $\angle GCB$. Значит, $\triangle CF'B \sim \triangle EDB$.

$CF' = ED$ по условию $\Rightarrow BF' = BD \Rightarrow F' = F$. Значит, $CF = CF' = 26$.

д) ~~ААВВ~~ Прямоугольные треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle BF'D$ подобны по общему углу $\angle ADC \Rightarrow AC = AD = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} (BC + \sqrt{CF^2 - BC^2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (10 + \sqrt{26^2 - 10^2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 34 = 17\sqrt{2}$

$$AF = \sqrt{CF^2 - AC^2} = \sqrt{26^2 - 17^2} = \sqrt{387} = 3\sqrt{43}$$

$$S_{ACF} = AC \cdot AF / 2 = 17\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{43} = 51\sqrt{86}$$

Orbiter: a) 26, d) $51\sqrt{86}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Решите данную задачу графически

График первого уравнения выглядит следующим образом:

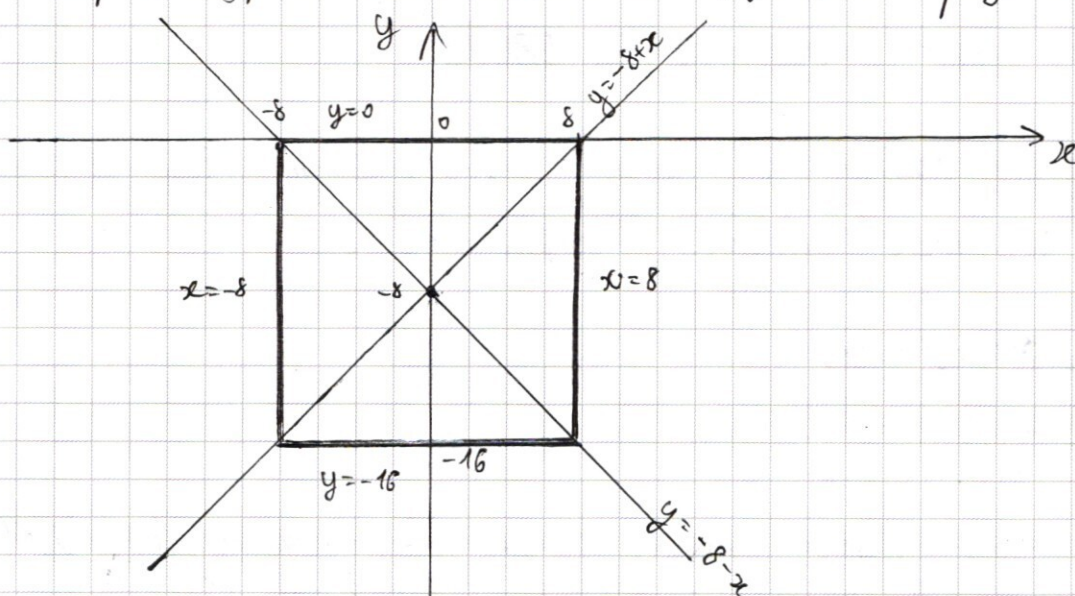
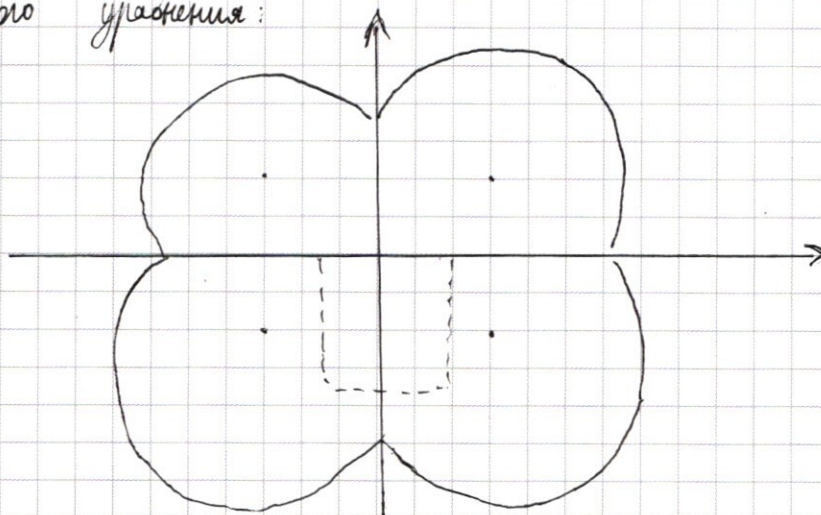
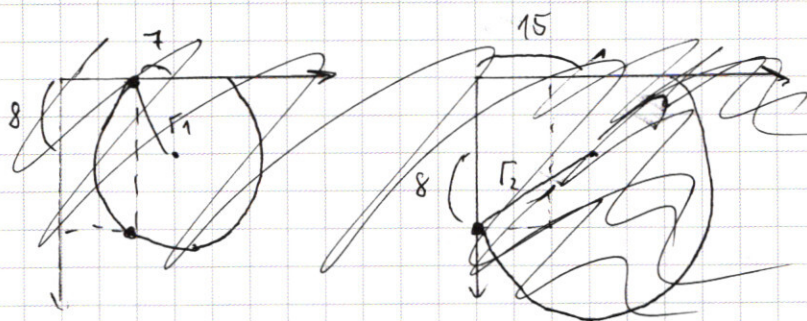


График второго уравнения:



(Окружность симметрично отражается отн. Ox и Oy из-за $(x|u|y)$)

~~Система имеет ровно два решения тогда когда~~



~~при радиусе круга радиус~~

~~когда радиус (r_1) имеет строго между r_1 и r_2 не
включительно (см. рис.). Найдем r_1 и r_2 .~~

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 7^2 + 8^2 = 113 \\ r_2^2 &= 15^2 + 8^2 = 289 \end{aligned}$$

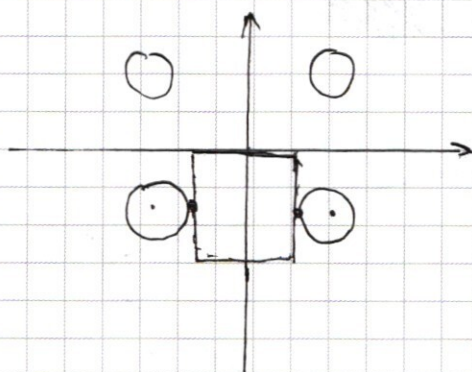
~~Значит система имеет два решения при $r \in (113; 289]$
Также необходимо учесть случай касания
Система имеет~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

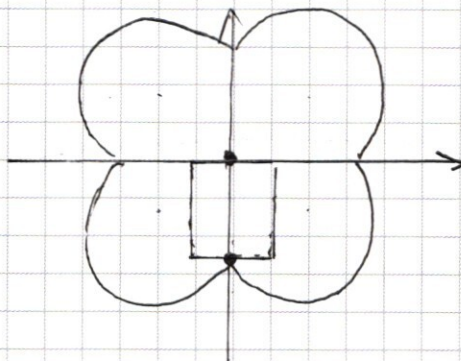
(Продолжение №7)

Система имеет ~~два~~ два решения только тогда, когда:

1.



2.



Если радиус меньше, чем Γ_1 , то решений нет

Если радиус больше Γ_1 и меньше Γ_2 , то решений 4

Если радиус больше Γ_2 - решений нет.

$$\Gamma_1 = 15 - 8 = 7$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

Значит система имеет два решения только когда

$$\alpha = \Gamma_1^2 = 49$$

$$\text{или } \alpha = \Gamma_2^2 = 289$$

Ответ: 49; 289

Продолжение №3)

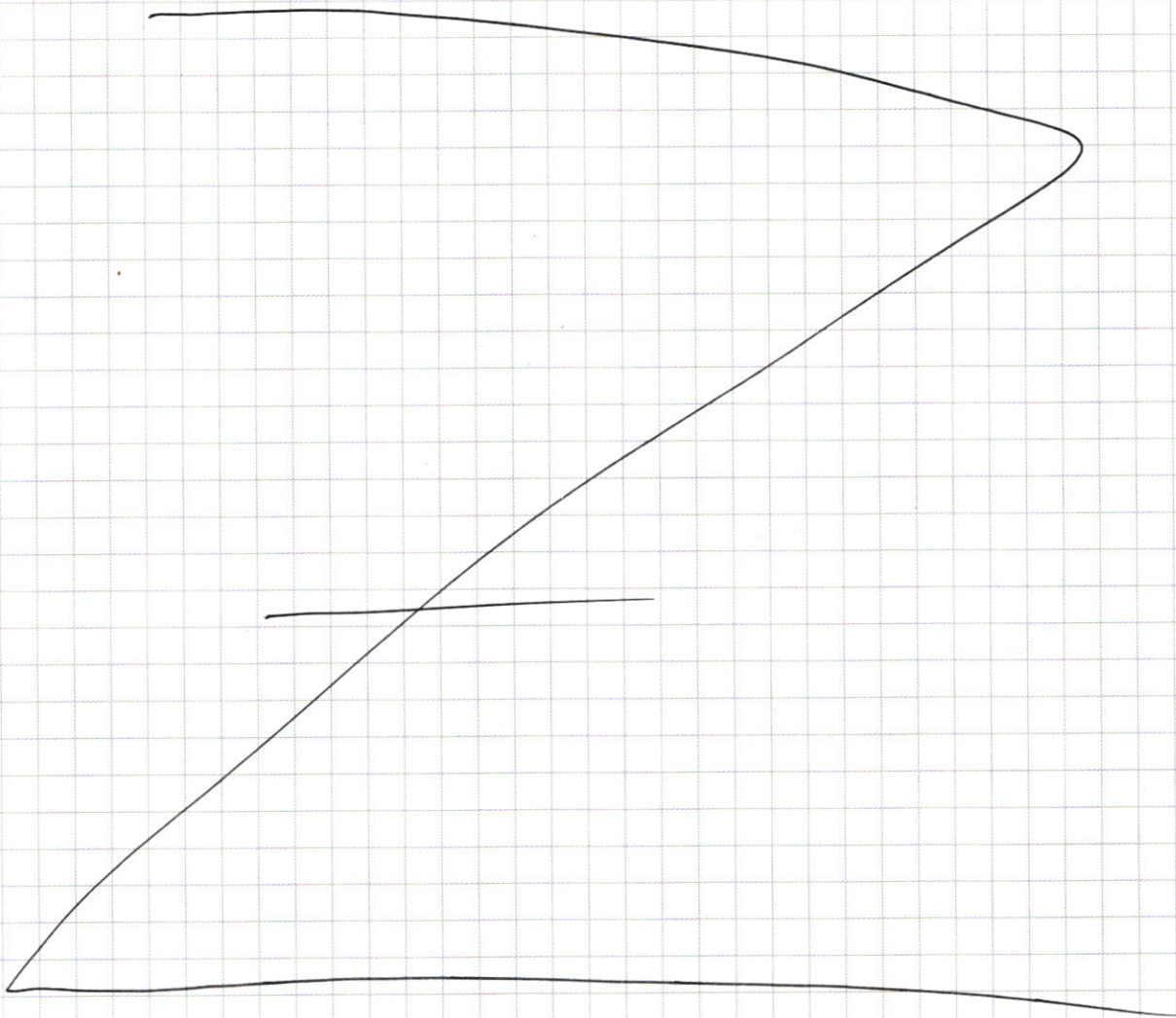
$$x_{3,4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

Корень $x_2 = 8$ подходит (как и $x_1 = 10$)

Проверки x_3 и x_4

...7

~~XXXXXXXXXX~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4900 \approx 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$$

$$-3 \cdot 64 = 192$$

$$7, 7, 5, 5, 4$$

$$200 \cdot 6 = 1200$$

$$7, 7, 5, 5, 2, 2$$

$$1200 \cdot 7 = 7000 + 1400 = 8400$$

$$6 \cdot (-28) + 200$$

$$-168 + 200$$

$$1 - \sqrt{13}$$

$$x^2 + 6x - 40$$

$$-10 \quad 4$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{2000} = S \quad \frac{32}{8} = 4$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_3 + b_4 + b_5 + \dots + 40b_{2000} = 5S$$

$$x + 10$$

$$x = 4$$

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{2999} = S$$

$$b + bq + 40bq^2 + \dots + 40bq^{2999} = 5S$$

$$4 + 4 \cdot 12 = 52$$

$$b + 3bq + bq^2 + 3bq^3 + \dots + 3bq^{2999} = 9S$$

$$2bq + 2b \cdot b_3 + b_6 + b_9 + \dots + b_{2000} = \frac{4}{39} S$$

$$36 \cdot 6 - 8 = -72$$

$$2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + \dots + 2b_{2000}$$

$$bq^{19}$$

$$216 - 8$$

$$bq^2 + bq^5 + bq^8 + \dots + bq^{2999} = \frac{4}{30} S$$

$$bq + bq^3 + bq^5 + \dots + bq^{2999} = 7S$$

$$6 \cdot 36$$

$$bq^7 \cdot bq^9 \cdot bq^{11}$$

$$64 - 8 \cdot 16 = 4 \cdot 16 - 8 \cdot 16 = -144 + 72$$

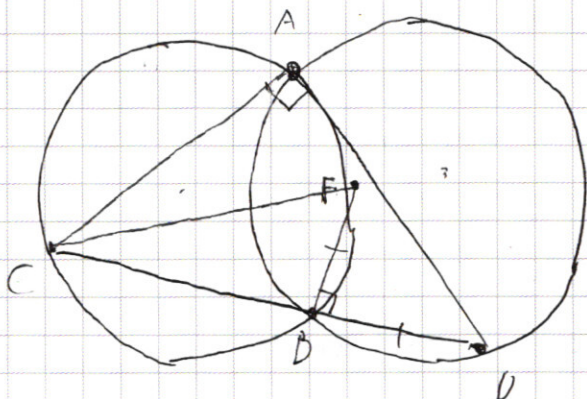
$$-3 \cdot 9 - 8 \cdot 9$$

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$$

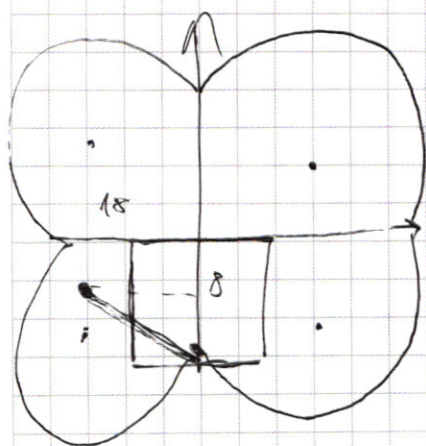
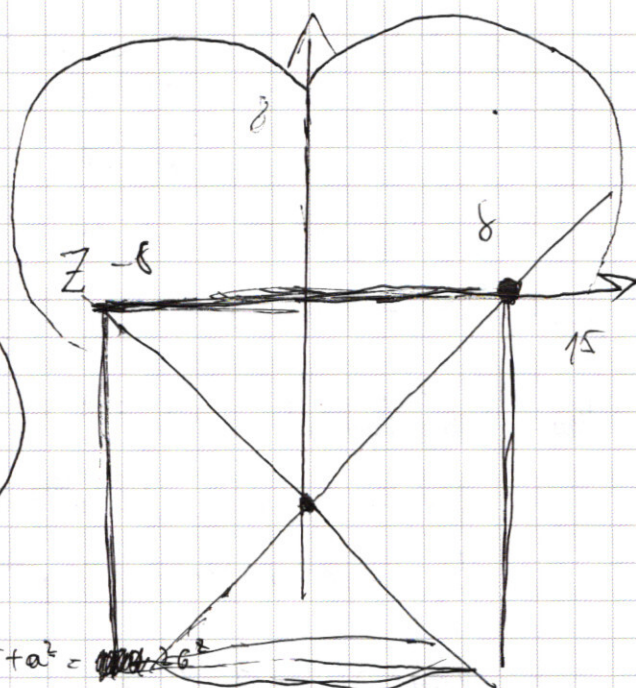
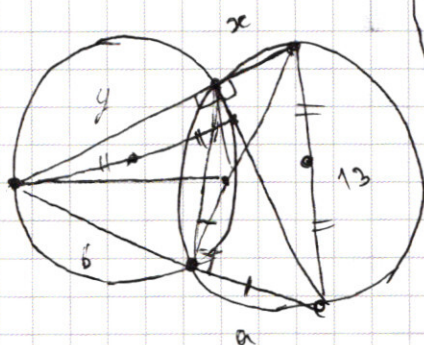
$$-2 \cdot 9 - 8 \cdot 4$$

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$$

$$-12 \cdot 16$$



$$\begin{aligned} y+x &\geq 8 \\ y &\geq 8-x \\ y-x &\geq 8 \\ y &\leq 8+x \end{aligned}$$



$$b^2 + z^2 = (x+y)^2$$

$$\frac{xy}{8} = \frac{a+b}{y}$$

$$a^2 = 15^2 + 8^2$$

$$z^2 + a^2 = 26^2$$

$$x^2 + w^2 = 26^2$$

$$y^2 + w^2 = (a+b)^2$$

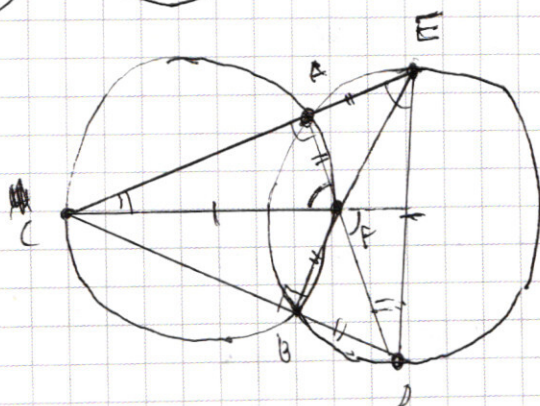
$$y^2 + 26^2 - x^2 = (a+b)^2$$

$$6^2 + 26^2 - a^2 = (x+y)^2$$

$$3 \cdot \sqrt{43}$$

$$2y + 16 = 16$$

$$y = 0$$



289

119

26

26

156

52

676

17

17

119

17

289

676

289

387

$$-2y - 16 = 16$$

$$y^2 = 16$$

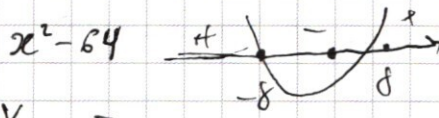
$$y = -16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Продолжение №3)

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$(2u-v)^2 \geq uv$$



$$\sqrt{13} \approx \frac{7}{2}$$

$$4u^2 + v^2 - 4uv \geq uv$$

$$4(80) \quad 4 \cdot 13 = 52 = 49$$

$$4(16) - 64 = 0$$

$$2(16) - 64 = -32$$

$$4u^2 - 9uv + v^2 \geq 0 \quad \frac{2x}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{1}{x\sqrt{x+2}} + 1$$

$$12 - 9 = 3 \quad 25u^2 - 16v^2 = 9u^2$$

$$4 \cdot 64 - 64$$

$$-3 \cdot 64$$

$$v = \frac{5u \pm 3u}{8} = u \cdot \frac{4}{8} \quad 2x^2 - |x+2| \geq x\sqrt{x+2}$$

$$1 - \sqrt{13}$$

$$(2x^2 - |x+2|)^2$$

$$-x^2|x+2| \geq 0$$

$$-2, 5, -3$$

$$2x^2$$

$$2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3|x+2| + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 - 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x + 5x^3 + 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$16x^3 - 15x^2 - 18x + 4 \geq 0$$

$$16x^3 - 15x^2 - 18x + 4$$

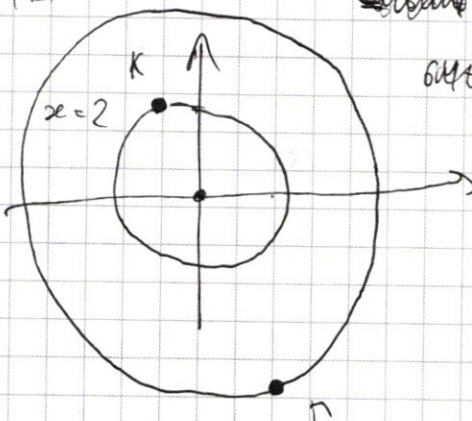


$$54 - 60 - 36 + 8 + 4$$

$$4x^4 - 5x^3$$

$$(2x^2 - |x+2| - x\sqrt{x+2})$$

$$(2x^2 - |x+2| + x\sqrt{x+2}) \geq 0$$



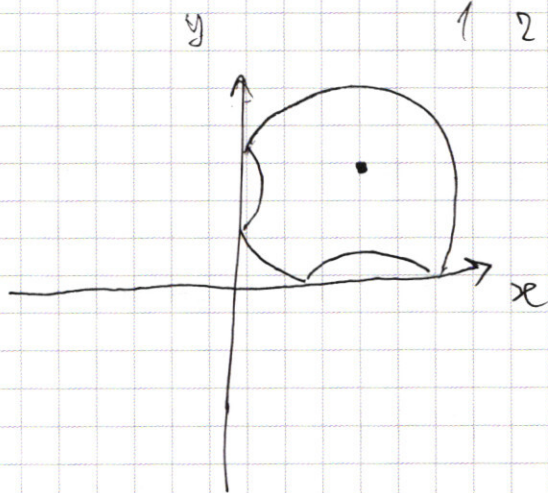
$$64 - 60 - 36 + 8 + 4$$

$$4 - 4 + 11 - 2 + \frac{15}{4} + 11(4) - 13 + \frac{21}{4}$$

$$16x^3 - 15x^2 + 22x + 4$$

$$48x^2 + 30x + 22 = 0$$

$$24x^2 + 15x + 11$$



$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \quad 100 \sim 0.20$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{9} (1+x+2)^4$$

8/10

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$x(64-x^2) \times 6$$

$$\frac{b_1(1-q)}{1-q}$$

$$\frac{b_{3000}}{1-\frac{1}{q}}$$

$$\frac{b_{3000}}{1-}$$

$$\cos \alpha = 45$$

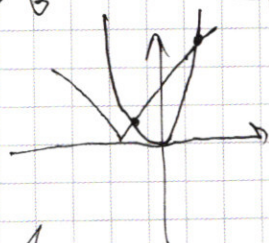
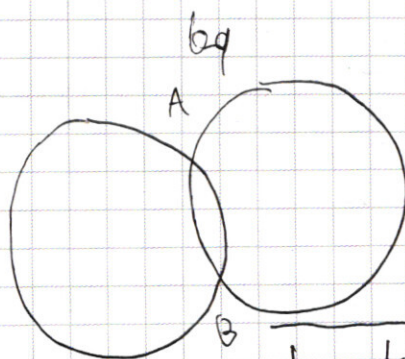
$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = c$$

$$\frac{b_1(q-1)}{1-q}$$

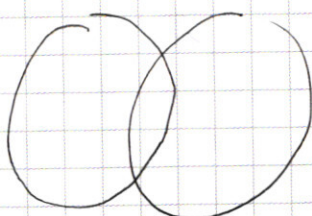
$$\frac{bq^2(q-1)}{1-q}$$

$$= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4}$$

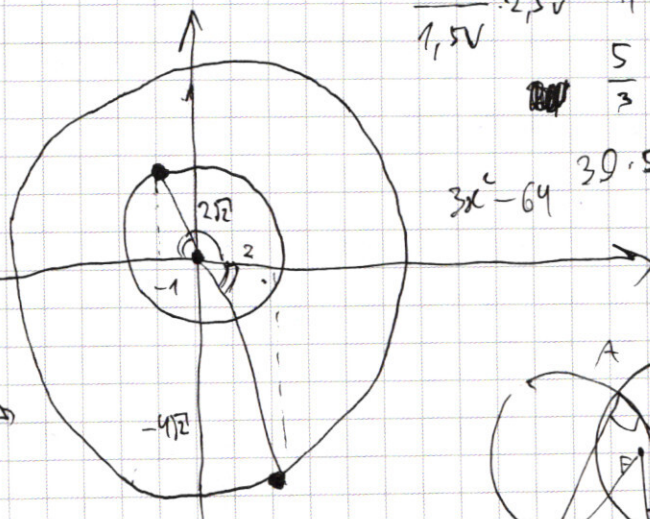
$$1.5V \quad \pi$$



$$\pi - \alpha \cos \frac{1}{2\sqrt{2}} +$$



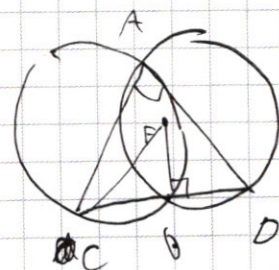
27.



$$\frac{\pi}{1.5V} \cdot 2.5V$$

$$\frac{5}{3} \pi$$

$$3x^2 - 64 \quad 39.5$$



$$\pi - \alpha \cos \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$- \alpha \cos \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(x^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}) / (x + \frac{8}{\sqrt{2}})$$

$$|x+2|((1+x+2)-5x^2) \quad 4x^4 + (x+2)^2 - 5x^2(x+2) \geq 0$$

$$4x^4 + (x+2)((1+x+2)-5x^2)$$