

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?
3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.
5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба движутся по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Решение: $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Возьмем, что $2 \times 5, 2 \times 7, 5 \times 7, 5 \times 5, 7 \times 7$ и
т.е. если в записи нашего
числа нет 2-х „5“ и 2-х „7“
то они представлены в виде
произведений
других цифр нашего числа, но это
невозможно т.к. цифры — однозначные,
а комбинации 2х5 и 7 — двузначные,
кроме $2 \times 2 = 4$

Рассмотрим случай 1) когда в записи
нашего числа
есть 4, 5, 5, 7, 7 тогда остальные
цифры заполнятся единицами,
иначе их произведение было бы > 4900
тогда у нас 1 раз 4, 2 раза 5, 2 раза 7
3 раза 1. тогда всего случаев $\frac{5!}{3!2!2!} = 10$

т.к. случай когда с единицами считаем
3! раз в 3!, с „5“ и „7“ аналогично с 2!

2) когда в записи ^{есть} 2, 2, 5, 7, 5, 7

тогда 2 единицы, тогда вариантов

$$\frac{6!}{2!2!2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4!}{2} = \frac{6! \cdot 7}{2} = \frac{720 \cdot 7}{2} =$$

$$= 2520$$

$$\frac{8!}{3!2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 1680$$

$$\begin{array}{r} 1680 \\ + 2520 \\ \hline 4200 \end{array}$$

Ответ: 4200 тысяч с произведением
оцифр 4900.

НЗ. Решение:

$$S = v_1 + \dots + v_{3000}$$

по формуле геом. прогрессии:

$$S = \frac{v_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{v_1(q^{3000} - 1)}{q - 1}$$

Рассмотрим в т.ч. с индексом
кратным 3.

$$v_3 = v_1 q^2 \quad v_6 = v_1 q^5 \quad v_9 = v_1 q^8 \quad \dots \quad v_{3000} = v_1 q^{2999}$$

↓

это геом. прогрессия с $v_1 = v_1 q^2$ и
каждый раз дамноженной на q^3

значит, их количество $\frac{3000}{3} = 1000$

и сумма $S_1 = \frac{v_1 q^2 ((q^3)^{1000} - 1)}{q^3 - 1}$

Пусть сумма т.ч. не кратных 3

$$S_0 \Rightarrow S = S_0 + S_1$$

По условию S_1 увеличим в 40 раз

и S увеличилось в 5 раз., тогда

$$\begin{cases} S = S_0 + S_1 \\ 5S = S_0 + 40S_1 \end{cases} \quad (1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а нам надо найти
сумму ~~первых~~ чисел с четными
индексами ~~в~~ увеличенной в 3 раза
последовательности S_2

$$S_2 = \frac{b_1 q \left((q^2)^{1500} - 1 \right)}{q^2 - 1} \quad \text{m. r. sum}$$

на геометрической прогрессии, с
начальным членом $v_2 = v_1 g$ и каждой
последующий это предыдущий домноженный
на g^2

тогда noon noon почти 5'

$$S' = 3 \cdot S_2 + S_0'$$

Все с почтовым уведомлением

$$\frac{5^i}{5} = ?$$

Уз сиромас (1)

$$\begin{cases} S = S_0 + S_1 \\ 5S = S_0 + 40S_1 \end{cases} \quad 4S = 39S_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot b_1 (q^{3000} - 1)}{q - 1} = \frac{39 \cdot b_1 q^2 (q^{3000} - 1)}{q^3 - 1}$$

Вывод 3000 - 2 АА Вывод 2 #1, м.к. это тоже.
выпрощена

$$\Rightarrow \frac{4b_1}{q-1} = \frac{39b_1 q^2}{(q^3-1)}$$

$$\frac{4}{q^2-1} = \frac{39q^2}{q^3-1} = \frac{39q^2}{(q-1)(q^2+q+1)}$$

$$4 = \frac{39q^2}{q^2+q+1}$$

$$4q^2 + q + 1 = 39q^2$$

$$-35q^2 + q + 1 = 0$$

$$35q^2 - q - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 + 4 \cdot 35 = 141$$

$q > 0$ т.к. все члены положительны

$$q = \frac{1 + \sqrt{141}}{70}$$

найдем S_2' — сумму ~~элементов~~ ^{считаем} ~~индексов~~ ^{индексов}

$$S_2' = \frac{b_1(q^{3500}-1)}{q^2-1} \quad \text{т.к. геометрической прогрессии}$$

b_1 , следовательно $b_3 = b_1 q^2 \dots$

тогда нам надо найти

$$S' = S_2' + 3S_2 = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} + \frac{3b_1q(q^{3000}-1)}{q^2-1} =$$

$$= \frac{b_1(q^{3000}-1)}{(q^2-1)} (1 + 3q) = \frac{b_1(q^{3000}-1)}{q^2-1} \cdot \frac{1+3q}{q+1} =$$

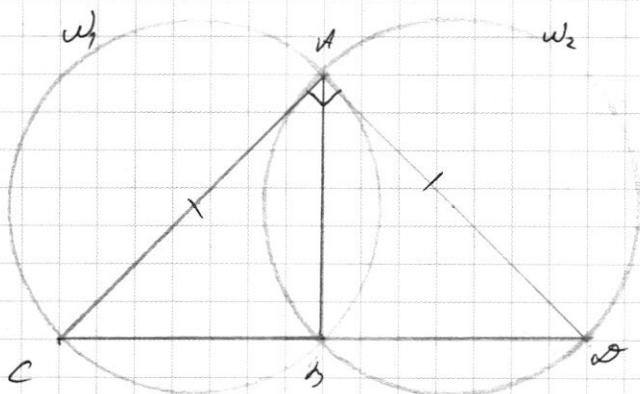
$$= 5 \cdot \frac{1+3q}{q+1} = 5 \cdot \frac{1 + \frac{3+3\sqrt{141}}{70}}{\frac{1+\sqrt{141}}{70} + 1} =$$

$$= 5 \frac{73 + 3\sqrt{141}}{71 + \sqrt{141}} \quad \text{тогда} \quad \frac{S'}{S} = \frac{73 + 3\sqrt{141}}{71 + \sqrt{141}}$$

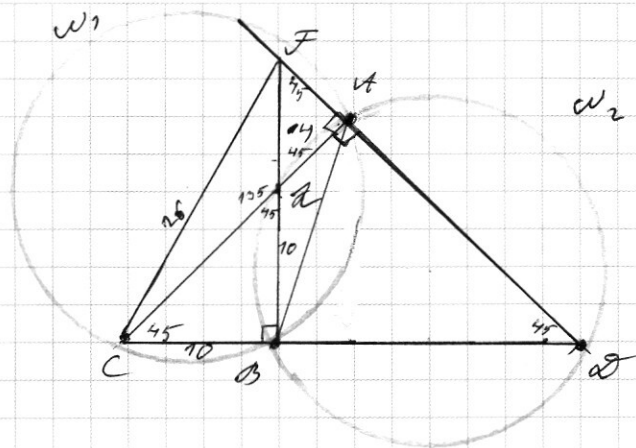
Ответ: числится в $\frac{73 + 3\sqrt{141}}{71 + \sqrt{141}}$ раз.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



Решение: по свойству равных
окружностей, на равные хорды в
равных окружностях опираются
равные углы, значит $\angle ACB = \angle ADB$
т.к. дуга $\angle ACB$ опирается на хорду AB
в ω_1 , а $\angle ADB$ тоже на AB в ω_2 .
т.к. C, B, D - лежат на одной ^{прямой} прямой
по условию, значит в $\triangle ACD$, $AC = AD$
 $\angle ACD = 90^\circ$ и $\angle ADC = \angle ACD \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
значит AB перпендикулярна CD и B к CD
значит AB перпендикулярна CD , значит AB перпендикулярна CD
значит AB перпендикулярна CD , значит AB перпендикулярна CD .



точка F — точка пересечения
 срединных DA и перпендикуляра из B
 т.к. $BF = BD$ и $\angle FBD = 90^\circ \Rightarrow$
 $\angle FDB = \angle BFD = 45^\circ$ но $\angle ADB = 45^\circ \Rightarrow$
 F, A, D лежат на одной прямой.
 т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ и $\angle CAB = 90^\circ \Rightarrow$

$FABC$ — вписанный но описанная
 окружность вокруг $\triangle ABC$ — и есть $FABC$
 $= W_1 \Rightarrow F$ лежит на W_1 т.к.
 $\angle FAC = 90^\circ \Rightarrow CF$ — диаметр, $CF = 2R =$
 $= 26$

2) $BC = 10$ $S_{\triangle ABC} = ?$, пусть пересечение CA и $BD =$
 K
 $\triangle FCB$ $\angle B = 90^\circ \Rightarrow$

$$CF^2 = FB^2 + CB^2$$

$$26^2 = FB^2 + 10^2$$

$$FB = \sqrt{576} = 24 = BK + KF = 10 + KF \Rightarrow$$

$$KF = 14.$$

$$BD = BF = 24$$

$$AC^2 + AD^2 = CD^2 \quad \triangle ACD, AC = AD$$

$$2AC^2 = CD^2 = (24 + 10)^2 = 1156 \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AC = \sqrt{578}$$

$$\triangle ACK \angle A = 90^\circ \Rightarrow$$

$$AK^2 + AC^2 = CK^2$$

$$AK = 14 \Rightarrow$$

$$2 AK^2 = CK^2 = 14^2 = 196$$

$$AK^2 = 98$$

$$AK = \sqrt{98}$$

$$S_{\triangle ACK} = \frac{AK \cdot AC}{2} \text{ т.к. } \angle KAC = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACK} = \frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{578}}{2} = \frac{2 \sqrt{49 \cdot 289}}{2} =$$

$$= 7 \cdot 17 = 119 \text{ кв. ед.}$$

$$\text{Ответ: а) } CK = 14 \text{ ед.) } S_{\triangle ACK} = 119 \text{ кв. ед.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а его темп проходит за это же
время $2\pi R_k = \frac{2\pi R_k}{2} = \pi R_k$

$$\frac{2\pi R_k}{t} = v \Rightarrow \frac{\pi R_k}{t} = \frac{v}{2}, \text{ тогда}$$

скорость каравана в 5 раз больше
скорости ~~из~~ темп пикара.

Заметим, что в нач. момент пикар пикари
в точке $N = \left(\frac{2}{2}; \frac{-4\sqrt{2}}{2}\right) = (1; -2\sqrt{2})$

т.к. $(0;0)$ и N и N_0 лежат на одной
прямой и $2R_k = R_k$ ~~и~~ $2ON = ON_0$
 $ON = R_k$ $ON_0 = R_k \Rightarrow N_0$ и N диаметрально
противоположны в W_k

Рассмотрим, из скорости ~~по окружности~~
так же относятся как же и их
угловые скорости т.к. радиус один и
тот же, тогда пусть $W_k = 5$ и $W_0 = 5$ $\frac{0}{2} = 5 \text{ ч/с}$

$$W_k = W_0 \frac{0}{2} \text{ (градусов/секунду)} = 12 \text{ ч/с}$$

тогда т.к. между ними 180°

они встретятся через $\frac{180^\circ}{(W_k - W_0)} = \frac{180}{4} = \frac{45}{4} \text{ секунды}$

$= 45^\circ \Rightarrow$ тогда они встретятся в

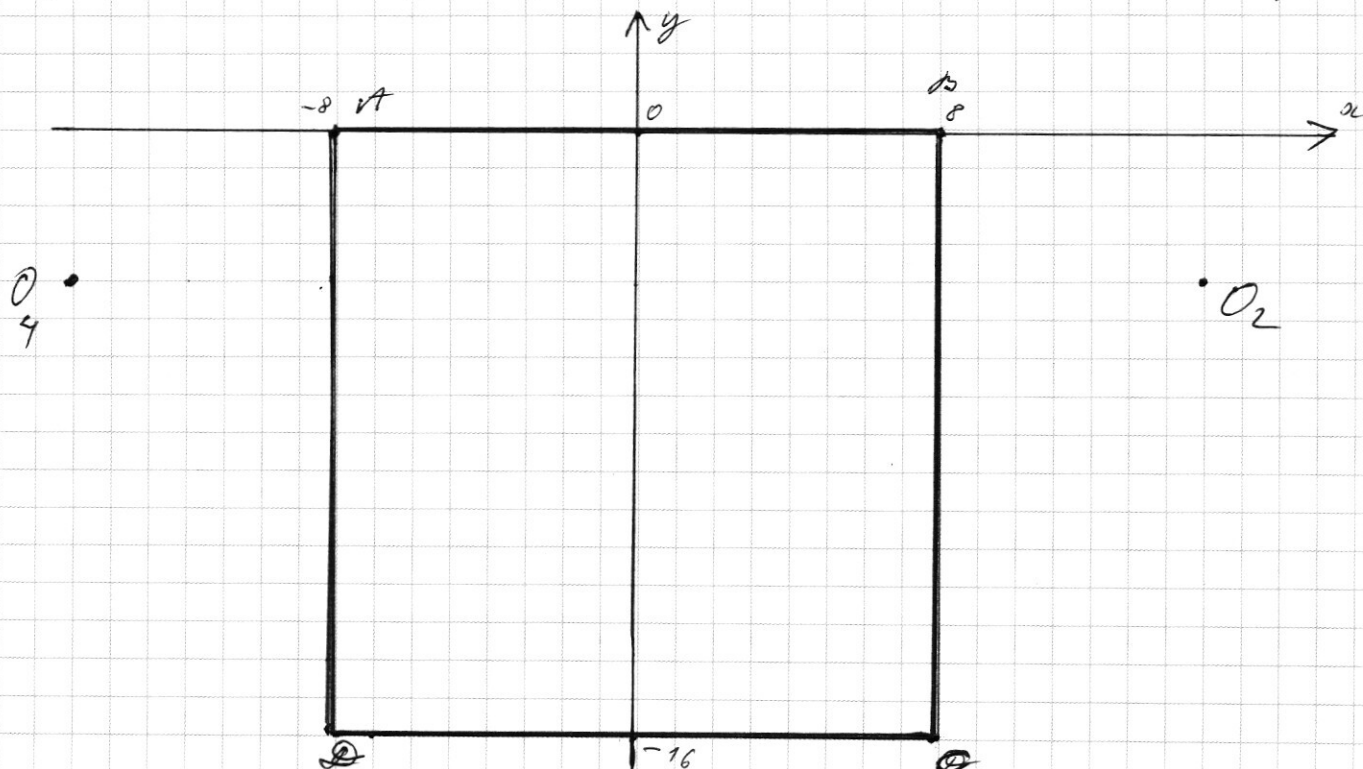
точке V_1 - такая, что $\angle V_1ON = 45^\circ$

затем они начнут с одной точки

т.е. угол между ними 360° тогда
 от вертикали через $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
 через 90° тень пескостая повернется на 90°
 $\angle V_2 O V_1 = 90^\circ$
 V_2 , аналогично $\angle V_3 O V_2 = 90^\circ \dots$
 $\angle V_{i+1} O V_i = 90^\circ$, т.к. с одной точки
 они начинают свое движение.
 значит $\angle V_3 O V_2 = 90^\circ$ $\angle V_4 O V_3 = 90^\circ$
 $\angle V_5 O V_4 = 90^\circ \Rightarrow \angle V_1 O V_5 = 90 + 90 + 90 + 90 =$
 $= 360^\circ \Rightarrow$ точки пересечения не имеют

ниже $\&$ внутри. и значит точки
 Ответ:
 пескостая в этот момент V_1', V_2', V_3', V_4'
 с известными координатами точек
 V_1, V_2, V_3, V_4 соответственно.

№7. $\begin{cases} |y+x-8| + |y-x-8| = 16 \\ (x-15)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

график первого уравнения, прообраз
АВСД (его стороны)

из неравенства в модулях

$$16 = |y + x + 8| + |y - x + 8| \geq |(y + x + 8) + (y - x + 8)| =$$

$$\Rightarrow 16 \geq |2y + 16|$$

~~Рассмотрим случай~~

$y \leq 0$ тогда $16 \geq 2y + 16 \geq 16 - \phi$

Если $y < -16$ тогда

$2y < -32$ тогда,

$|2y + 16| = -2y - 16$

$2y < -32 \Leftrightarrow -2y > 32 \Rightarrow$

$16 \geq -2y - 16 > 32 - 16 = 16 - \phi \Rightarrow 0 \geq y \geq -16.$

~~ура~~ ~~Рассмотрим случай~~

~~Рассмотрим случай $y > 16$~~

Если $x < -8$

$|y + x + 8| + |y - x + 8| = 16$

~~Рассмотрим~~ $+y - x + 8$ т.к. $x < -8, y \leq 0 \Rightarrow y - x + 8 > 0$

$-y - x + 8$ т.к. $y \leq 0, x < -8, +y + x + 8 < 0$

$|y + x + 8| + |y - x + 8| = -y - x - 8 + y - x + 8 = 16$

~~т.к.~~ $-2x = 16 \quad x = -8 \quad \text{но} \quad x < -8 \quad \phi$

~~ура~~ ~~Рассмотрим~~

~~Рассмотрим $-8 > x \geq -16$ и $y > 16$~~

Если $x > p$,

$$|y+x+p| + |y-x+p| = 16$$

т.к. ~~мы~~ $y \geq -16$

~~мы~~ $x > p$ $y \geq -16$

$\Rightarrow$ ~~мы~~

$$y+x+p > -16+p+p = 0.$$

$$\Rightarrow |y+x+p| = y+x+p$$

$$|y-x+p| \leq 0 \text{ т.к.}$$

$$x > p \Leftrightarrow -x < -p \text{ и } 0 \geq y$$

$$-p > -x$$

$$0 \geq y$$

$$-p > -x + y$$

$$0 > y - x + p \Rightarrow |y-x+p| = -y+x-p$$

$$|y+x+p| + |y-x+p| = y+x+p - y+x-p =$$

$$= 2x = 16. \text{ Но } x > p \Rightarrow 2x > 16 \text{ } \cancel{\text{не}}$$

Тогда в 1-й системе $y \in [0; -16]$

$x \in [-p; +p]$ — квадрат $A B C D$.

$$\text{Если } x = -p \quad |y-p+p| + |y+p+p| = 16$$

$$|y| + |y+16| = 16$$

$$-16 \leq y \leq 0 \Rightarrow -y + y + 16 = 16 \quad y - \text{любое}$$

$$\text{значение из } -16 \leq y \leq 0$$

$$x = p \quad |y+p+p| + |y-p+p| = 16 \text{ — аналогично}$$

$$y = -16 \quad |-16+x+p| + |-16-x+p| = 16$$

$$|x-p| + |-x-p| = 16$$

$$p-x > -p$$

$$y = 0$$

$$p-x + x+p = 16 \quad x - \text{любое число,}$$

$$|p+p| + |-x+p| \text{ — аналогично предыдущему.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим 2 в уравнение:

$$(x-15)^2 + (y-2)^2 = a$$

$$1) x \geq 15 \quad y \geq 2 \quad (x-15)^2 + (y-2)^2 = a$$

$$2) x \geq 15 \quad y < 2 \quad (x-15)^2 + (2-y)^2 = a$$

$$3) x < 15 \quad y \geq 2 \quad (15-x)^2 + (y-2)^2 = a$$

$$4) x < 15 \quad y < 2 \quad (15-x)^2 + (2-y)^2 = a$$

Видим, что это окружности с радиусом $\sqrt{a}$ с центрами

$$1) O_1(15; 2)$$

$$3) O_3(-15; 2)$$

$$2) O_2(15; -2)$$

$$4) O_4(-15; -2)$$

Заметим, что O_3 и O_1 и O_2 и O_4 симметричны относительно O_4 и $ABCD$ тоже симметричен.

Что есть если одна из окружностей проходит через квадрат $ABCD$

она имеет ≥ 1 решения точки, кроме угла касания. тогда и симметричная

ей окружность имеет ≥ 1 ~~решения~~ $ABCD$

≥ 1 решения $\Rightarrow$ в сумме $\geq 2 \Rightarrow$

окр. касаются стороны $ABCD$

т.к. расстояние от O_3 до квадрата

$>$ расстоянию от O_4 до квадрата, т.к.

$$\rho(O_3; ABCD) = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$\rho(O_4; ABCD) = 7$$

с O_3 и O_2 одновременно $\Rightarrow$

Окружностям с центрами

O_2 и O_4 касаются со стороны

$ABCD$, если пусть это выполняется при $a = a_0^2$, если $a < a_0^2$, тогда

1) окр. с центром O_2 не пересекается

с $ABCD$, если $a > a_0^2$ тогда

этот случай мы уже рассмотрели $\Rightarrow$

$\sqrt{a_0}$ - расстояние O_4 до AD или O_2 до CD

то есть $\rho(O_4; AD) = 7 \Rightarrow a_0 = 7^2$

Ответ: при $a = 49$.

$$N 4. \quad 4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2 \mid x+2 \mid +9, 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 + 4x^4 - 5x^2 \mid x+2 \mid \geq 0$$

$\Downarrow$

$$(x+2)^2 + x^2 (4x^2 - 5 \mid x+2 \mid) \geq 0.$$

Если $x > -2$

$$(x+2)^2 + x^2 (4x^2 - 5(x+2)) \geq 0$$

$\Downarrow$

$$(x+2)^2 + x^2 (4x^2 - 5x - 10) \geq 0.$$

$$(x+2)^2 + x^2 \left(\left(2x - \frac{5}{4} \right)^2 - 10 - \frac{25}{16} \right) \geq 0 \quad | \cdot 16.$$

$$(4x+8)^2 + x^2 ((8x-5)^2 - 160 - 25) \geq 0$$

$$(4x+8)^2 + x^2 ((8x-5)^2 - 185) \geq 0$$

$$(8x-5)^2 < 185$$

$$\sqrt{185} < 8x-5 < \sqrt{185}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$4x^2 - 13x + 6$$~~

$$-\sqrt{125} + 5 < 8x < \sqrt{125} + 5$$

$$\frac{-\sqrt{125} + 5}{8} < x < \frac{\sqrt{125} + 5}{8}$$

$$|x+2| = a$$

$$4x^4 + a^2 - 5x^2a \geq 0$$

~~$$4(2x^2 - a)^2 = 4x^4 - 4x^2a + a^2$$~~

$$(2x^2 - a)^2 - x^2a \geq 0$$

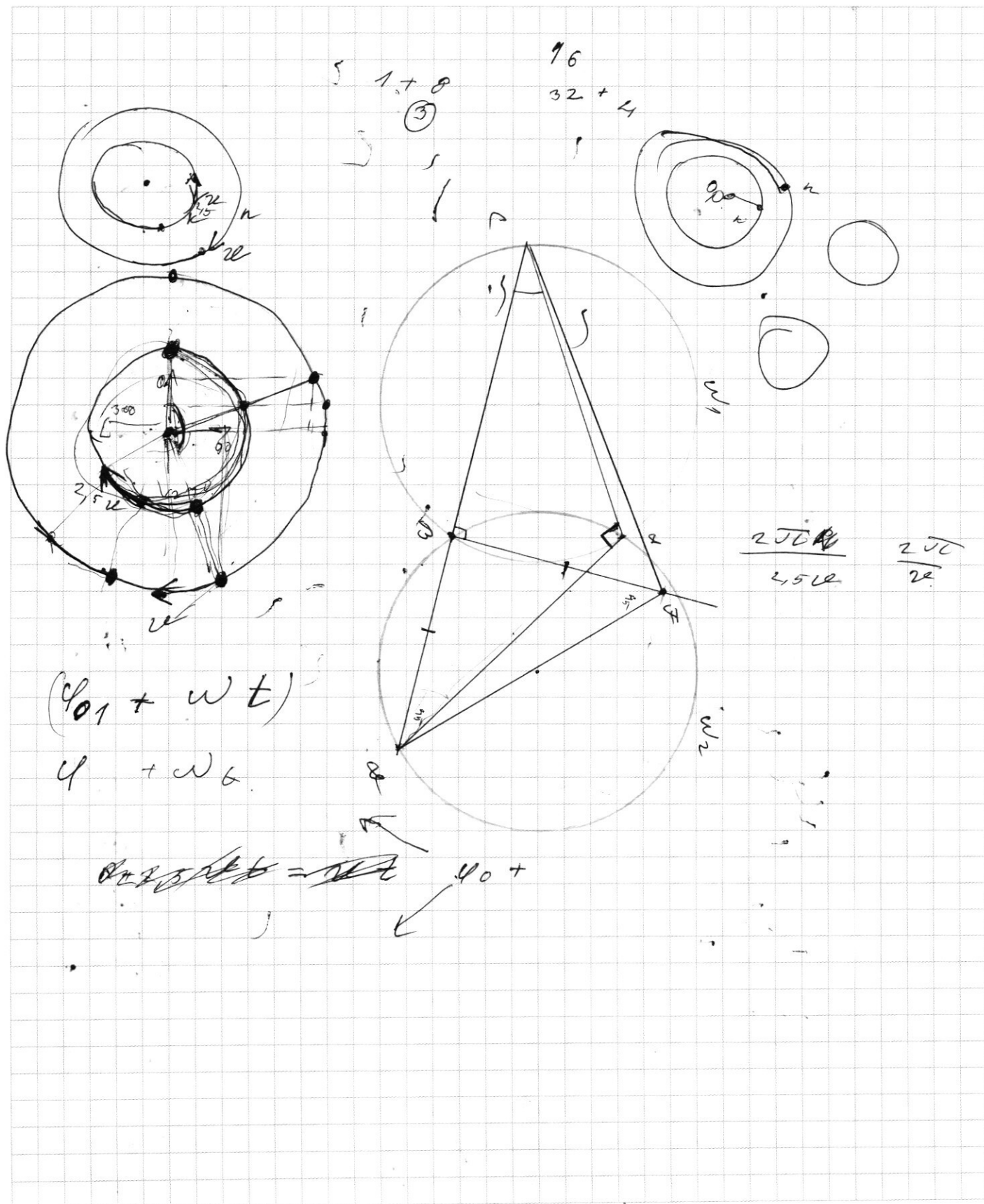
$$(2x^2 - a)^2 \geq x^2a$$

~~$$(2x^2 - (x+2))^2 \geq x^2(x+2)$$~~

~~$$x \geq -2$$~~

~~$$(2x^2 - (x+2))^2 \geq x^2(x+2)$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x+2)^2 + 4x^4 - 5x^2 | x+2 | \geq 0.$$

$$(x+2)^2 + x^2 | 2x^2 - 5 | x+2 | \geq 0,$$

~~$$x^3 - 6x^2 + 200$$~~

~~$$x(x^2 - 6x) + 200$$~~

$$x(x-2)(x+2) + 200$$

$$2x^2 - 5 | x+2 |$$

x

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$(x+2)$$

$$2x^2 - 5x + 2$$

$$\begin{array}{r} 578 \\ \times 17 \\ \hline 3946 \\ 1156 \\ \hline 9766 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 877 \\ \times 40 \\ \hline 35080 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ \times 10 \\ \hline 11560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 14 \\ \hline 8064 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 9 \\ \hline 1521 \end{array}$$

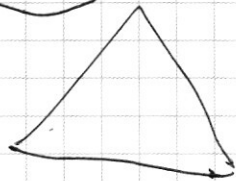
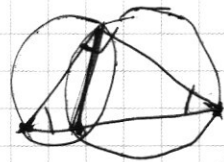
$$10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$12$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 26 \\ \hline 1014 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- A diagram of a rectangle with dimensions and labels.
- Arithmetic calculations: 4900 , 2450 , 1225 , 245 , 49 .
- Algebraic expressions: $y + x + 8$, $2y + 16$, $0.72y - 8$, $y + x + 8 + y - x + 8 = 16$.
- Calculus/Algebra: $S = S_0 + S_1$, $S_1 = S_0 + 40 S_1$, 22.55 , 4 , 4.5577 .
- Sequences: $b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $b_1 + b_1 q + \dots + b_n$.
- Formulas: $\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $|x + 8| + |-x + 8| \geq 16$.
- Other calculations: 360 , 25 , 20 , 305 , 30 , 16 , 8 , $1/4$.

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

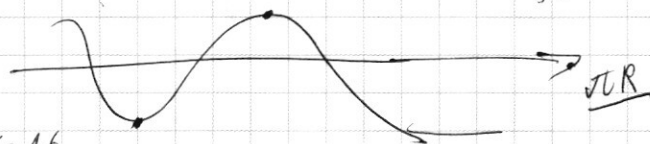
$$x \geq -2$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2(x+2) + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + x^2 + 4x - 5x^3 - 10x^2 + 4 \geq 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$4x^4 + 4x + 4 \geq 5x^3 + 9x^2 = x^2(5x + 9)$$



$$4 \cdot 3x^3 - 5 \cdot 2x^2 - 9x$$

$$4 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$16x^3 - 15x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$y + 8 + 8 \quad y = 8 + 8$$

$$4x^4 + x^2 \geq 5x^2x$$

$$16x^3 + 4 = x(15x + 9)$$

$$4(4x^3 + 1) = x(15x + 9)$$

